UNE ETUDE DIDACTIQUE DE LA MEMOIRE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES AU COLLEGE ET AU LYCEE. QUELQUES EXEMPLES.

Matheron Yves

UNIVERSITE AIX-MARSEILLE I - Université de Provence

U. F. R. de Psychologie et des Sciences de l'Education

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE AIX-MARSEILLE I

Formation doctorale : Systèmes d'apprentissage, systèmes d'évaluation

présentée et soutenue publiquement

par

Yves MATHERON

le 12 décembre 2000

Titre :

UNE ETUDE DIDACTIQUE DE LA MEMOIRE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES AU COLLEGE ET AU LYCEE. QUELQUES EXEMPLES.

Directeur de thèse : **Alain MERCIER**

JURY

M. Samuel JOHSUA, Président

M. Yves CHEVALLARD

M. Alain MERCIER

M. Charles PAYAN

M. Jean-Yves ROCHEX

M^{me} Maria Luisa SCHUBAUER-LEONI

À tous ceux auprès de qui mon engagement dans ce travail a ôté une partie de ma disponibilité, notamment mes parents, Marceline et Faustine.

Mes remerciements vont à mon directeur de thèse Alain Mercier, professeur à l'INRP, à qui je dois plus que ce travail, puisque c'est lui qui, il y a presque une dizaine d'années déjà, m'a initié à la didactique des mathématiques, me l'a enseignée et m'a permis de rencontrer les chercheurs de ce domaine. Je le remercie pour la confiance et le soutien qu'il m'a témoignés durant tout le temps de cette thèse, notamment dans les moments où la recherche semblait s'arrêter, ainsi que pour l'attention et l'exigence apportées à cet encadrement.

Je remercie Samuel Johsua, professeur à l'Université de Provence, pour le lieu riche en contenus et en débats que j'ai eu la chance de fréquenter en suivant le séminaire de didactique qu'il dirige, pour son attention à offrir aux étudiants les moyens leur permettant de mener à bien leur travail et pour les conseils dont j'ai pu bénéficier de sa part au cours de cette thèse.

Je tiens à remercier Yves Chevallard, professeur à l'IUFM d'Aix-Marseille, qui constitue pour moi, à travers la fréquentation de son séminaire, un exemple de rigueur et de fécondité scientifiques, et grâce à qui cette thèse a été tout simplement possible, puisque ce travail est redevable envers la théorie anthropologique du didactique à laquelle il emprunte beaucoup, et dont il est le fondateur.

Je remercie Charles Payan, professeur à l'Université Joseph Fourier de Grenoble, et Maria Luisa Schubauer-Leoni, professeur à l'Université de Genève, qui ont bien voulu être les rapporteurs de cette thèse, ainsi que Jean-Yves Rochex, professeur à l'Université Paris VIII, qui a accepté de faire partie de son jury.

Une grande partie du matériel empirique exposé dans cette thèse doit beaucoup à ma collègue Catherine Dufossé, professeur de mathématiques au Lycée Marseilleveyre, qui a accepté des dizaines de fois dans ses classes la présence dérangeante de l'observateur que j'étais, et du matériel encombrant qu'il transportait… Qu'elle en soit ici chaleureusement remerciée.

Je remercie René Amigues, professeur à l'IUFM d'Aix-Marseille, Michel Henry, professeur à l'Université de Franche-Comté, et Gérard Sensevy, professeur à l'IUFM de Bretagne, pour la lecture ingrate, mais cependant minutieuse de ce travail lorsqu'il était encore en chantier, qui m'ont donné de précieux conseils et dont les critiques m'ont engagé vers de fructueuses corrections.

Mes remerciements vont vers les participants au séminaire de didactique de l'Université de Provence, les membres de la Commission didactique inter-IREM, mes collègues professeurs de mathématiques de l'IUFM d'Aix-Marseille, dont les débats ont enrichi ma pensée au cours de ces années. Je remercie aussi Georges Blanc, directeur de l'IREM d'Aix-Marseille, ainsi que le secrétariat de l'IREM, pour l'aide documentaire et matérielle qu'ils m'ont apportée.

Je remercie enfin les élèves qui, sollicités, ont eu la gentillesse de se soumettre hors de leur temps de classe aux dispositifs d'observation, et chez qui j'ai rencontré une humanité dans l'étude, allant de la joie de la découverte à la tristesse de l'échec, en passant par la volonté dans l'effort, dont je garde un souvenir inoubliable.

« Quant à moi, après un long embarras, je suis arrivé à la conviction que la mémoire, définie par la présence à l'esprit d'une chose du passé et par la recherche d'une telle présence, peut par principe être attribuée à toutes les personnes grammaticales : moi, elle/lui, nous, eux, etc. Cette assertion d'une attribution plurielle du souvenir ne diffère pas, selon moi, de l'attribution plurielle dont est susceptible n'importe quelle pensée, passion ou affection. Si la thèse de l'attribution multiple fait problème dans le cas de la mémoire, c'est parce que la question de l'identité personnelle - disons la question de soi - y paraît se poser d'une façon incomparable, à la différence des autres faits psychiques, comme si l'appropriation au moi propre constituait un privilège exclusif de la mémoire. Je ne pense pas, néanmoins, que l'on doive se laisser intimider par ce genre d'argument. »

Paul Ricœur, *22^e^ conférence Marc Bloch*

« On pourrait traiter toute la didactique sous ce terme de mémoire. »

Julia Centeno, *La mémoire didactique de l'enseignant*

TABLE DES MATIERES

PRÉSENTATION

Comme pour tout travail de recherche, afin d'aborder la question de la mémoire dans l'étude des mathématiques, nous avons dû recourir à l'exercice obligé du recueil d'observations empiriques et d'éléments théoriques relatifs au thème. Cependant, pour ce présent travail, nous nous sommes heurté, en chacun de ces deux points, à une situation bien singulière. D'une part, les observations empiriques portant sur la mémoire dans l'étude des mathématiques sont quasiment inexistantes, à l'exception du travail de Julia Centeno, tandis que d'autre part, les théories sur la mémoire - mémoire « en général » et non spécifique des mathématiques et de leur enseignement - sont multiples, foisonnantes, voire pléthoriques, et contradictoires.
Cette situation continue de se vérifier actuellement, à travers l'abondante production éditoriale portant sur la mémoire. En réponse peut-être au besoin collectif de mise en ordre des souvenirs accompagnant cette fin de siècle et de millénaire, ici encore les auteurs abordent la mémoire dans la généralité du terme, mais aucun ne s'intéresse, à notre connaissance, au cas sans doute trop matériel de la mémoire pour étudier, et à plus forte raison pour étudier les mathématiques.

Ce constat fait, traiter la question a alors nécessité de combler le manque de données empiriques, en mettant en place des dispositifs d'observation qu'il a fallu concevoir, ainsi que de procéder, simultanément, à un important travail de tri dans le matériau théorique dont nous disposions, travail qui a souvent conduit à la mise à l'écart. Aussi, tandis qu'un « plein » de données observées se constituait, un inquiétant « vide » théorique se creusait, selon un étrange système de vases communicants. Cette thèse tente de rétablir l'équilibre, en versant sa contribution à l'exposé de phénomènes mémoriels liés à l'étude des mathématiques et à leur explication.
La forme en a peut-être souffert car, partant du spectacle de table rase face auquel nous nous trouvions, il a fallu construire et asseoir une nouvelle formulation théorique. D'où l'appel fréquent dans le corps du texte à des extraits d'observation, et le recours tout aussi fréquent à de nombreuses citations. Dans ce dernier cas, il s'agit soit de se démarquer d'éléments théoriques, soit au contraire de s'en servir comme briques permettant de reconstruire à neuf. Nous aurions pu faire le choix de gommer tout cela, rendant peut-être ainsi la lecture plus agréable et facile, mais nous avons préféré, en le conservant, tenter de donner à voir le cheminement d'un travail et la confrontation, dans un premier temps, de la pensée « au réel qui résiste » parce que le matériel théorique disponible est insuffisant pour en rendre raison.

Les observations sur lesquelles nous nous appuyons ont été réalisées entre 1995 et 2000 ; pour l'essentiel et jusqu'en 1999, dans la Cité mixte Marseilleveyre, à Marseille, constituée d'un collège de 1000 élèves, aux classes indifférenciées, et d'un lycée de 1200 élèves. Au lycée, les observations portent sur des cours et des élèves de Terminale S (scientifique). Cet établissement qui, contrairement à certains autres lycées marseillais, ne pratique pas une politique sélective de recrutement dans cette série, obtient un taux de 79,2% de réussite au baccalauréat S à la session 2000. Il se situe ainsi, sans qu'on puisse le taxer d'élitisme pour autant, dans la partie haute de la fourchette des moyennes des quatre départements de l'Académie d'Aix-Marseille qui fluctuent, pour cette session 2000, entre 75,8% pour la plus basse dans les Bouches du Rhône, et 79,1% pour la plus forte dans le Vaucluse ; la moyenne académique est de 76,7%.

Mettre un travail par écrit, pour qu'il soit communicable, engage dans un certain nombre de contraintes, de choix et d'ordre. Le choix implique qu'au-delà de la cohérence visée et du sens donné à l'exposé, le texte n'épuise pas le travail réellement mené. Sa dimension surpasse toujours celle de l'exposé qui n'a forcément recours qu'à une sélection des matériaux théorique et empirique recueillis. On ne trouvera ainsi, pour ce qui concerne les observations, qu'une partie de ce travail de recueil en annexe, celles sur lesquelles s'appuie cette thèse, et dans l'ordre de leur apparition dans le corps du texte.

La linéarité propre à l'exposé induit cet ordre qui, pour le lecteur, ne trouvera (ou pas) sa justification, qu'*a posteriori*, une fois la lecture du texte terminée. Pourtant, la base empirique a été elle-même recueillie selon une chronologie que ne respecte pas l'exposé, et selon des moyens obéissant à des raisons, donc selon une méthodologie qui rend ce recueil intelligible. Cette méthodologie est principalement exposée et discutée dans la troisième partie de cette thèse, puis dans les suivantes lorsque cela est nécessaire. Cependant, nous avons choisi, parce que cela nous permettait d'indiquer l'orientation vers laquelle nous nous dirigions, ou parce que cela éclairait ou aidait à la construction d'un cadre théorique, de donner, dès avant que la méthodologie de ce recueil en ait été exposée, des fragments significatifs provenant d'observations. Ils sont référés par leur date à l'observation dont ils sont extraits, et qui se trouve, comme indiqué précédemment, en annexe. Elle porte le plus fréquemment, soit sur des élèves interrogés sur leur pratique de l'étude des mathématiques, soit sur des cours dispensés en Terminale S, de 1997 à 1999, qui couvrent des périodes durant lesquelles l'objet de l'enseignement et de son étude était toujours constitué des notions de logarithme népérien et d'exponentielle. Ce choix correspond à la volonté de ne pas briser, par l'intermédiaire d'une variation des contenus, la cohérence d'observations qui se sont déroulées durant trois années scolaires. Les observations en collège, en moins grande quantité, portent quant à elle sur des thèmes différents.

Si l'on retrouve, dans le travail « de terrain » précédemment évoqué, les deux éléments du triplet didactique constitués de l'élève et du professeur, le troisième, celui du savoir, est quant à lui souvent abordé, dans cette thèse, à l'aide de dimensions qui peuvent paraître emprunter à l'histoire des mathématiques. Ce serait cependant une méprise que de penser que, ce faisant, nous avons voulu donner une orientation historique ou épistémologique à ce travail. Tout au contraire, étudier la nature de la mémoire mathématique, relative au savoir donc, dans un cadre principalement didactique, ne signifie pas qu'il faille circonvenir la recherche du matériau empirique aux classes et aux dispositifs didactiques qui leur sont annexés. Nous avons voulu explorer certaines des dimensions de la pratique de production des mathématiques, en recourant le plus souvent possible aux textes originaux des œuvres auxquelles nous nous référons. C'est le cas pour les ouvrages de Descartes, Newton, Euler et Lagrange que nous utilisons. Ils sont étudiés à partir des outils théoriques issus de la didactique des mathématiques, et non de leur histoire ou de leur épistémologie. Si nous avons parfois recours à ces deux derniers aspects, c'est simplement pour situer ou éclairer le propos qui porte sur la dimension mémorielle de la pratique des mathématiques, telle que nous pouvons la retrouver dans certains des fragments du savoir mathématique produit et exposé par ces auteurs, et pouvoir la confronter à celle mobilisée par les élèves dans leur pratique d'étude des mathématiques.

Revenant à la logique d'exposition de cette thèse, une première partie constitue tout d'abord un positionnement de la question. Nous présentons des observations d'élèves et les discours tenus par des professeurs de mathématiques au sujet des résultats de leurs classes lors d'une évaluation. Il s'agit ainsi de débattre de la pertinence d'un recours aux théories, notamment psychologiques, de la mémoire, afin de prendre en compte son rôle dans l'étude des mathématiques. Cette discussion nous amène, en particulier, à reconsidérer le sens que l'on attribue généralement au terme de mémoire. Nous l'utilisons dans un sens plus large que celui qui ne la voit que comme une propriété, ou une faculté, spécifique des personnes ; sans négliger cet aspect personnel, nous l'envisageons aussi comme externe et sociale, tout en restant une dimension essentielle des processus cognitifs.

Ce positionnement nous conduit, dans la deuxième partie, à choisir de placer notre étude dans le cadre de l'anthropologie. En effet, cette forme externe et sociale, donc située, de la mémoire, nous conduit à étudier les lieux sociaux en lesquels elle se produit et se rencontre : les institutions. Si la cognition revêt une dimension sociale, par l'intermédiaire des pensées autorisées ou interdites par les institutions chez les personnes qui s'y assujettissent, ces structures institutionnelles impriment alors, chez leurs sujets, un type spécifique de mémoire. Il est donc nécessaire d'étudier selon quels principes s'opère ce formatage mémoriel, et de quel degré de liberté disposent les personnes.
Réduisant le cadre de ce travail aux institutions didactiques, nous proposons un modèle spécifique de la mémoire pour l'étude des mathématiques. Il se décline selon trois dimensions : personnelle, institutionnelle et propre au savoir pour sa pratique.

Ce modèle constitué, il est nécessaire d'en vérifier la pertinence et la consistance. Ce point est discuté au début de la troisième partie, qui joue aussi le rôle de cadre méthodologique à partir duquel il est possible de construire des dispositifs d'observation pour ces trois modalités de la mémoire. Une première observation d'un phénomène d'oubli permet de révéler le rôle des outils pour la pratique des mathématiques, les ostensifs, dans l'organisation de la mémoire des élèves pour l'étude et la pratique de ce savoir.

Ce travail se poursuit, dans la quatrième partie, par les études du rôle des ostensifs dans le recours à la mémoire durant l'activité mathématique, et de leurs effets possibles sur le temps didactique passé ou à venir. Grâce au travail de la mémoire qu'ils autorisent parce qu'ils sont aussi outils dépositaires de mémoire, ils permettent de développer la créativité. Ce point est attesté à travers des exemples tirés d'œuvres mathématiques, donc de productions de savoir ; pour l'illustrer et afin de ne pas s'éparpiller, nous avons majoritairement choisi des œuvres se rapportant aux débuts du calcul différentiel et intégral.
Dans cette même quatrième partie, nous montrons aussi le rôle de la mémoire utilisée par le professeur pour la constitution d'un milieu pour l'enseignement. Est expliquée la nécessité d'oublier parfois « le sens » pour pouvoir apprendre, ou simplement, pour pouvoir s'engager dans un travail d'étude ou de production de mathématiques, contrairement à l'idée reçue de la nécessité d'une bonne mémoire ne laissant rien dans l'oubli pour pouvoir étudier.
Cette partie montre quel usage possible du modèle de la mémoire proposé, et présente quelques premiers résultats, mais elle n'épuise pas le champ des recherches envisageables à partir du modèle.

La cinquième et dernière partie fournit une synthèse des principaux résultats obtenus, et dégage des pistes pour la construction d'ingénieries didactiques ; elle situe cette thèse dans le cadre des études sur le travail du rapport au savoir. Le modèle de la mémoire qui a été construit nous permet, en effet, d'envisager un champ d'étude didactique à partir des trois types de mémoire établis, et de commencer l'analyse d'une ingénierie didactique mise en place en 1999-2000. Celle-ci pointe la direction à prendre pour favoriser et diriger le travail de la mémoire mobilisée par les élèves pour leur pratique des mathématiques, et donc pour leur étude. Fidèle à la direction donnée à cette thèse, son extension à l'étude de la mémoire pour d'autres disciplines scolaires nécessiterait, au préalable, l'analyse et la définition de ce que sont les outils de la pratique de ces savoirs, et l'observation des modalités de leur enseignement et de leur étude telles qu'elles existent réellement dans les classes.

Les deuxième, troisième et quatrième parties sont précédées d'une page qui les présente.

PREMIÈRE PARTIE

MÉMOIRE ET ÉTUDE SCOLAIRE DES MATHÉMATIQUES

1. 1. Le problème de la mémoire en mathématiques : un exemple du côté des élèves

Le travail qui suit porte sur l'enseignement et l'apprentissage d'adolescents, ou de jeunes adultes, qui étudient les mathématiques au sein de l'enseignement secondaire français. Pour une partie du temps qui paraît la plus visible, ces élèves, collégiens et lycéens, se livrent à cette étude à l'intérieur des classes de mathématiques, durant les cours. Mais leur travail revêt d'autres formes, moins apparentes de prime abord, car relevant du domaine privé sur lequel, d'ordinaire, l'institution scolaire ne veut, ou ne peut, rien dire ou rien savoir. Ce travail d'étude peut être par exemple personnel et solitaire, suivant des modalités variables selon les élèves, ou accompli en équipe avec l'aide d'un ou plusieurs camarades, d'adultes parfois, ou bien encore fait de discussions informelles avec des adultes ou d'autres élèves au sein de l'établissement, etc. Un trait est cependant commun à ces diverses formes d'étude. Elles présupposent toutes, bien évidemment, que les élèves qui s'y sont appliqués conserveront un certain souvenir de l'objet de leur apprentissage, et qu'ils pourront l'attester ; par exemple lors d'un moment d'évaluation. Il faut bien en effet, tôt ou tard, présenter à l'institution scolaire le fruit de ce travail privé pour qu'elle se prononce sur sa validité. Car sinon, à quoi bon étudier ?

1. 1. 1. Mémoire et « logique du bon sens »

Un premier exemple permettra de prendre conscience du désarroi dans lequel peut se trouver une élève lorsque, après s'être soumise au dispositif courant d'une évaluation scolaire, elle dresse sur son travail un verdict révélant que, bien qu'étudiées, les « notions » évaluées ont été mal mémorisées. Ceci la conduit entre autres, dans l'entretien qui suit, à construire une image de soi négative. Il s'agit d'une observation réalisée dans une classe Terminale de la série S, scientifique. Cette élève suit, outre l'enseignement obligatoire de mathématiques durant 6 heures hebdomadaires, un enseignement de « spécialité mathématiques » de 3 heures ; l'établissement ayant décidé d'accorder 1 heure de plus à cet enseignement prévu officiellement pour 2 heures. Elle se soumet donc à 9 heures hebdomadaires d'enseignement des mathématiques. Elle est présentée par le professeur de mathématiques de sa classe comme une élève très moyenne, parfois en échec, mais sérieuse, faisant de son mieux pour participer à la classe, ne rechignant pas devant l'effort et le travail. L'entretien a lieu le lendemain d'une interrogation écrite en classe. L'élève s'appelle Sarah. La personne qui pose les questions est identifiée par Q. Une seconde élève de la même classe, Ludivine, avec qui Sarah constitue le « binôme 2 » observé, participe aussi à l'entretien réalisé le 18 mars 1999 ; mais nous ne présentons pas ses propos dans l'extrait suivant :

5. Q : Donc à l'interro, comment ça s'est passé ?
6. Sarah : Mal !…[rires]
[…]
27. Q : Et ensuite y'a eu le cours ?
28. Sarah : Oui, sur les autres fonctions logarithmes. Et là, je peux pas vous en dire plus [rires]…

29. Q : Tu as pas regardé ?…
30. Sarah : Après le test, c'était…
31. Q : Trop préoccupée par le test ?…
32. Sarah : Ah ouais, ouais, ouais… Ah non, ça m'a démoralisé ! J'avais révisé et tout… Et puis voilà, quoi !
[…]
60. Sarah : Voilà ! Mais sinon sur les fonctions, sur les autres fonctions logarithmes…
61. Q : Oui, là tu as pris le cours mais… C'est comme si… C'est tout pareil !
62. Sarah : [rires]… Non, c'est comme si je l'avais pas pris quoi !

Les problèmes suscités par l'échec de Sarah à l'interrogation écrite, et l'embarras dans lequel elle se trouve, l'ont, et elle en est tout à fait consciente, empêchée de garder le souvenir du savoir mathématique relatif aux « autres fonctions logarithmes », et qui a été enseigné dans l'heure de cours qui a suivi. Le bon sens dont elle fait preuve (comme tout un chacun !), lui permet d'identifier les raisons pour lesquelles elle ne se souvient plus de rien sur ces « autres fonctions logarithmes ». Sans doute n'avait-elle « plus la tête à ça », avait-elle « trop de soucis en tête » : chacun peut en témoigner lorsque qu'un événement vous a « démoralisé », comme dit Sarah. Cette logique du « bon sens », tiré de l'expérience quotidienne banale, transparaît dans les sous-entendus du discours et la connivence qui se noue sur ce point entre les deux interlocuteurs. D'ailleurs, pourrait-on dire en suivant cette logique du bon sens, *a contrario*, deux bons élèves de la même classe constituant le « binôme 1 », qui ont assez bien réussi l'interrogation écrite et sont interrogés ce même 18 mars, dans les mêmes conditions que Sarah, par la même personne, se souviennent mieux qu'elle des « autres fonctions logarithmes » enseignées par le même professeur dans l'heure qui a suivi l'interrogation :

50. Q : Et ensuite, vous avez fait cours après une heure et quart d'interro ?
51. Aurélie : Oui. Sur les fonctions exponentielles.
52. Q : Quoi par exemple ?
53. Aurélie : Ben logarithme en base 10, qu'on se sert en physique.
54. Q : Que la base 10 vous avez fait ? !
55. Aurélie : Oui, en base *a* !
[…]
64. Q : Qu'est-ce que vous avez fait sur le logarithme de base *a* ?
65. Aurélie : Ben, on se rappelle plus ! [rires]
66. Alexandre : Juste la formule. C'était logarithme de *c* sur logarithme de *a*.
67. Q : Oui, logarithme de *x*…
68. Alexandre : Oui : logarithme de *x*…
69. Aurélie : Sur logarithme de *a*.
70. Q : Et après, vous avez étudié ces fonctions ?
71. Aurélie : Ben, pas trop. On n'a pas trop eu le temps en fait, autant que je me souvienne.
[…]
75. Aurélie : […] On a cherché… On a tracé sur nos calculatrices lnx sur ln2 et on a vu que c'était symétrique de ln1/2…, que c'était symétrique par rapport à l'axe des *x*. Puis voilà !
[…]
82. Q : Donc pour l'interro, vous pensez vous en être tirés correctement en dehors de ce manque de temps ?
83. Aurélie : Oui, moi y'a une limite que j'ai pas trouvée.

Ces deux élèves, et notamment Aurélie, sont donc capables de se souvenir, au cours de l'entretien, de l'objet du cours, le logarithme de base *a*, de sa définition, d'un exemple particulier (le logarithme de base 2) et d'une propriété (courbes symétriques pour les logarithmes de bases 2 et 1/2), de son utilité (« logarithme en base 10, qu'on se sert en physique »), ainsi que du moment où le cours s'est arrêté.

1. 1. 2. L'impuissance de la « logique du bon sens » à expliquer

Cette « logique spontanée du bon sens », à partir de laquelle les interlocuteurs s'accordent dans l'entretien avec Sarah, est cependant impuissante, tant pour expliquer certains phénomènes mémoriels relatifs à l'étude des mathématiques, que pour essayer d'en comprendre l'échec. Celui-ci est imputé à l'oubli qui, faute de mieux, ne peut être attribué qu'à la personne de Sarah ; cela la conduit à dévaloriser, devant la personne qui l'interroge, l'image de soi qu'elle s'attribue. En suivant cette logique, Sarah doit en définitive assumer sa faute, comme le montre l'extrait suivant du même entretien :

33. Q : Tu es déçue, donc, de l'interro ?
34. Sarah : Ouais, ouais. Déçue de moi.
35. Q : Tu l'attribues à quoi ?
36. Sarah : Je l'attribue à quoi ? Ben…À mon travail quoi, mes révisions…
37. Q : Ben si tu l'avais vachement révisé… [*En 32, Sarah avait déclaré avoir bien révisé l'interrogation*]
38. Sarah : Ouais, mais j'avais peut-être pas révisé dans le bon sens, mais j'avais révisé tout ce qui était… Ben, tous les exercices qu'on avait faits, les limites, tout ça. Mais j'avais pas re-regardé comme suivre jusqu'au bout une étude de fonction, pour les asymptotes. Je me rappelais plus comment on recherchait une asymptote oblique, et puis… Ah non, c'est de ma faute hein ?
[…]
51. Q : […] mais si on met de côté l'asymptote oblique, ça n'entraînait pas, quand même, la suite du problème ? C'était pas…
52. Sarah : Non, mais… Oui bon, alors c'étaient pas les révisions. Alors c'était moi quoi, parce que je suis pas assez futée pour le faire quoi. Je sais pas.

Selon cette logique du sens commun, la faculté de mémoire se montre ou, tout au moins, peut être facilement attestée : dans le cas d'une « bonne mémoire » grâce aux souvenirs précis que la personne peut mobiliser, dans le cas d'une « mauvaise mémoire » par l'oubli. Or, dans les propos de Sarah, oublis et souvenirs sont mêlés. C'est ce qu'indique le tour de parole 38, dans lequel elle évoque le souvenir de ses révisions, et où s'exprime la mémoire de ce qu'elle n'a pas pu faire : « Je me rappelais plus comment on recherchait une asymptote oblique ». Cette mémoire porte ainsi, non sur des mots qu'il s'agirait de retenir, mais sur des techniques qu'il faut mettre en œuvre.

Pour cette logique du bon sens, inexpliquées sont aussi les raisons pour lesquelles le travail de révision, que Sarah a fourni, ne lui permet pas d'avoir correctement mémorisé la technique demandée lors de l'interrogation écrite et relative à l'asymptote oblique :

43. Q : Mais ça, vous l'aviez fait ? Parce que la recherche de l'équation d'une asymptote oblique… Ou bien on donne l'équation de la droite et on demande de vérifier, montrer, que cette droite est asymptote… Donc la recherche des coefficients, vous l'aviez fait en cours ça ?[1]

[1] La personne qui pose les questions est aussi professeur de mathématiques. En 43, elle parle en utilisant la position institutionnelle qui est la sienne, ce qui donne lieu à une sorte de quiproquo. Elle sait en effet que la recherche des coefficients de l'équation d'une asymptote oblique n'est pas, ou plutôt n'est plus, au programme de Terminale S. En effet, les programmes, publiés au BO n°4 hors série du 12 juin 1997, précisent en commentaires : « Pour l'étude des comportements asymptotiques en $+\infty$ (ou en $-\infty$), on exploitera la comparaison de la fonction plus simple g telle que $\lim_{+\infty}(f-g)=0$; en dehors du cas des asymptotes horizontales, la fonction g devra être clairement mise en évidence sous la forme $f(x)=g(x)+h(x)$, avec $\lim_{+\infty} h=0$ (ou $\lim_{-\infty} h=0$) ». Cette « claire

44. Sarah : Non.
45. Q : Comment tu pouvais te débrouiller alors, pour la recherche de l'asymptote oblique ?
46. Sarah : Ben, je ne sais pas…
47. Q : On te donnait l'équation, non ?
48. Sarah : Non, non, non. Ben, on pouvait le savoir !
49. Q : Oui, mais toi tu dis que vous l'avez pas vu !…
50. Sarah : Oui mais parce que je l'avais fait sur… Quand on avait fait… Après les limites et les dérivées, sur le livre, je m'étais fait une fiche pour les asymptotes et je me rappelle, y'avait un truc sur les asymptotes obliques et tout, comment chercher. Et puis j'ai oublié…

Ainsi, Sarah travaille. Elle ne se contente pas du cours donné par son professeur : elle étudie aussi à partir de son livre. Elle ne se contente pas, non plus, de le lire, mais elle use d'une technique d'apprentissage qui est généralement considérée, dans le milieu scolaire, comme facilitant la mémorisation : elle constitue des fiches. Elle se souvient que certaines tâches mathématiques évoquées en 43 n'ont pas été enseignées en classe. Elle se souvient aussi que, pour la recherche de cette équation d'asymptote oblique, « on pouvait le savoir », et qu'il existe même une technique pour le savoir : « y'avait un truc sur les asymptotes obliques et tout, comment chercher » déclare-t-elle. Malgré ce travail personnel non négligeable sur les asymptotes obliques, Sarah ne peut s'adresser qu'à elle-même ce constat fait d'impuissance teintée de reproche : « Et puis j'ai oublié… ». Mais cet oubli ne porte pas uniquement sur les asymptotes obliques, qu'on aurait peut-être pu considérer d'un apprentissage difficile pour Sarah. Il porte aussi sur d'autres notions mathématiques qu'elle avait étudiées, en les travaillant avec le même sérieux que les asymptotes obliques :

53. Q : Tu avais refait les exos ou tu les avais regardés ?
54. Sarah : Ah non, non : je les avais refaits intégralement. Je regarde pas…
55. Q : Tu avais pas lu simplement le corrigé ?
56. Sarah : Non, non, non. J'avais tout refait.
57. Q : C'est décourageant !
58. Sarah : Eh oui, c'est décourageant ! En plus c'était le soir même qu'on les ait faits, donc je les avais même pas re-regardés quoi. Je les avais directement faits. J'avais tout bien fait et tout, et puis j'arrive au test, et j'y suis pas arrivée… Voilà ! Mais bon, ça portait pas que sur ça, donc c'est pour ça !
59. Q : Dommage !

Ce passage atteste que Sarah a appris, à travers son expérience d'élève, qu'étudier les mathématiques ne saurait se réduire à une simple relecture du cours ou des corrigés d'exercices. Elle proteste en effet par deux fois, lorsque les questions posées laissent entendre qu'elle n'a peut-être pas refait les exercices mais s'est contentée de les lire. Et, comble de malheur pour Sarah, après l'interrogation écrite, l'indicateur qu'elle avait utilisé pour évaluer ses apprentissages n'apparaît pas du tout fiable. Elle dit en effet avoir refait correctement certains exercices, le soir même où ils ont été étudiés en classe et sans en regarder le corrigé ;

---

mise en évidence » de la fonction affine g, pour les élèves, est évoquée dans le propos tenu en 43 qui sous-entend que l'équation est « donnée », que la recherche des coefficients « ne doit pas » être faites en cours. C'est ce que confirme Sarah en 44, et qui prouve que son rapport au cours sur les asymptotes a été travaillé, mais peut-être pas de manière adéquate. Il faudrait en effet savoir ce qu'elle entend par asymptote. Pour elle, est-ce une droite ou une fonction asymptotique qui sera le plus souvent, en Terminale, une fonction affine ? S'attache-t-elle à la définition algébrique du phénomène asymptotique, ou à sa traduction graphique, etc. ? L'entretien ne permet pas d'analyser le rapport de Sarah aux asymptotes.

ce qui constituait pour elle un critère pertinent d'apprentissage. Or, des exercices du même type ont été posés lors du test, et « j'y suis pas arrivé » dit-elle.

Devant tant de bonne volonté mise dans l'étude, et pour d'aussi décevants résultats causés en partie par tant d'oublis dommageables, il n'y a place que pour la compassion, si l'on s'en tient à cette seule « logique du bon sens » : « C'est décourageant ! », « Dommage ! ». Ce sont sans doute de simples paroles de réconfort, analogues à celles-là, qu'auraient pu tenir bon nombre de professeurs de mathématiques devant le récit d'un élève tel que celui de Sarah. Car, ce n'est pas trop s'avancer que d'affirmer, qu'en règle générale, et hormis quelques mots convenus sur les mémoires visuelle et auditive, retenus à l'occasion de stages de « gestion mentale », le milieu enseignant ne possède que de faibles connaissances sur la question. C'est ce qui apparaît dans une petite étude menée sur des professeurs de mathématiques de l'académie d'Aix-Marseille que nous présentons dans le chapitre qui suit.

D'ores et déjà, le cas de Sarah, élève en échec lors de cette interrogation écrite, montre quelques traits de cette mémoire de l'étude des mathématiques : elle porte sur des notions ou des méthodes[2] qui ont pu être ou non mobilisées à propos du problème posé. En effet, Sarah est capable, même lorsqu'elle dit ne pas s'être souvenue des moyens mathématiques à utiliser, de désigner l'objet de son oubli. Ainsi, cette mémoire s'applique à des procédures ou des actions[3] touchant à des objets précis du savoir mathématique (limites, asymptotes, fonctions, sont les objets désignés par Sarah). Elle ne coïncide donc pas avec le sens communément attribué au terme de mémoire, définie comme une capacité intérieure à se souvenir d'événements passés.

[2] Nous utilisons ici les mots du vocabulaire courant pour désigner certains objets relatifs aux mathématiques. Ceux-ci seront précisés, et souvent abandonnés, lorsque nous aurons davantage avancé dans cette thèse.
[3] Même remarque que précédemment.

1. 2. La question de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques : un exemple du côté des professeurs

1. 2. 1. « L'Évaluation Externe » de l'IREM d'Aix-Marseille

Les professeurs qui se sont engagés dans le dispositif d'évaluation externe organisée par l'IREM d'Aix-Marseille durant l'année scolaire 1994-1995 ont eu à leur disposition, tout au long de l'année scolaire, des corpus d'exercices relatifs aux quatre thèmes du programme retenus pour l'évaluation. Ces corpus ont été élaborés conjointement, lors de journées de travail à l'IREM, par les professeurs volontaires et les animateurs IREM. Ce travail a consisté à sélectionner, à l'intérieur de manuels en usage dans les classes de seconde[4], un certain nombre d'exercices relatifs à chaque thème. Au travers la réalisation de ces corpus, on a cherché à ce qu'émerge un rapport institutionnel aux pratiques contenues dans ces thèmes qui soit commun aux classes concernées par l'évaluation. Ce rapport est attendu chez les élèves de seconde après enseignement et recherche d'exercices ; chaque professeur s'est engagé à faire étudier par ses élèves des exercices issus de ces corpus.

Une quarantaine de classes de l'Académie sont concernées cette année-là pour le niveau seconde (elles seront une centaine l'année suivante) ; elles sont numérotées par la suite de 201 à 240. Un sujet portant sur les thèmes et les corpus étudiés est produit par l'équipe de l'IREM, ainsi qu'un corrigé et un barème détaillé de correction. Les professeurs et leurs administrations d'établissement se sont engagés à ce que ce sujet soit passé le même jour, le 18 avril 1995, par toutes les classes concernées. Le sujet est constitué de deux problèmes, un d'algèbre - analyse et un de géométrie. Divers documents, que les professeurs doivent renseigner, accompagnent l'envoi des sujets. L'un d'entre eux demande de dire, après la correction, quelle est la question la mieux traitée dans la classe, quelle est celle qui est la moins bien traitée, et d'expliquer pourquoi.

1. 2. 2. Mémoire et représentation spontanée de la pratique enseignante

Il est remarquable de noter, à la lecture des réponses apportées par les professeurs à ces questions, qu'un même « argument », s'appuyant sur le même « phénomène » de mémoire, peut être évoqué dans des sens apparemment contradictoires, pour justifier ou expliquer des réussites ou des échecs d'élèves à des questions particulières du problème.

Pour une première catégorie de professeurs par exemple, un effet favorable à la réussite des élèves résulterait de la proximité, dans le temps, de l'enseignement et de l'évaluation de

[4] Nous ne nous intéressons ici qu'au niveau seconde, mais ce dispositif, initié par l'équipe didactique de l'IREM d'Aix-Marseille, concernait aussi les niveaux 4^{e}, 3^{e} et 1^{e} S. Pour plus d'informations sur « l'Évaluation Extene » telle qu'elle a existé jusqu'en 1995-1996, on peut se reporter à Reymonet C. et Tonnelle J (1996-1997)

certaines notions mathématiques. Ainsi, sur l'épreuve de seconde constituée du Pb1 (analyse) et du Pb2 (géométrie), on trouvera ci-dessous les raisons que certains professeurs ont explicitement données pour expliquer quel est le problème le mieux réussi :
- classe 215 : Pb1-1° partie ; « fonctions traitées récemment en cours »
- classe 223 : Pb1-1° partie ; « cet exercice correspond assez bien aux derniers chapitres traités en classe »
- classe 224 : Pb1-1° partie ; « dernier chapitre vu en classe avant l'évaluation »
- classe 227 : Pb2 ; « le cours venait d'être fait »
- classe 229 : Pb1-1° partie ; « partie du cours traitée assez récemment »
- classe 239 : Pb1, parties I et III ; « c'est la partie du cours sur laquelle on travaille en ce moment »

La classe 230 se singularise, car l'explication avancée par son professeur semble infirmer le fait que le Pb1-1° partie soit celui globalement le mieux réussi, puisque c'est cette partie qu'il signale comme la moins bien réussie. Cependant ce professeur évoque comme justification l'éloignement et l'étalement dans le temps, et donc aussi implicitement l'oubli allié à la technicité. Il écrit :
- classe 230 : Pb1-1° partie ; « cette partie (le problème sur les fonctions) n'avait été abordée qu'en TD lors de 5 séances très étalées sur l'année et n'avait fait l'objet d'aucune synthèse. Les élèves ne me semblaient pas encore au point sur le sujet »

Pour une deuxième catégorie de professeurs, qui rejoignent, par une forme de contraposée du même raisonnement, leurs collègues de la première catégorie, l'éloignement dans le temps de l'enseignement de la notion et de son évaluation constituerait un handicap, car pourraient alors jouer des phénomènes d'oublis pénalisant les élèves. C'est la raison qu'avancent certains professeurs pour expliquer quel est le problème le moins bien réussi :
- classe 209 : Pb1, partie 2 ; « partie du programme étudiée il y a quelques temps déjà donc presque oubliée pour beaucoup d'élèves »
- classe 240 : Pb1, II, 2 ; « oubli des procédures »
Et selon cette logique, « proximité = réussite et éloignement = échec », on retrouve les professeurs des classes 224, 227 et 229 qui, après avoir expliqué la réussite de cette façon, expliquent l'échec logiquement, et de façon cohérente, de la même manière :
- classe 224 : Pb1, partie 2 ; « cette partie a été vue en classe au premier trimestre, donc il s'agit de la plus antérieure par rapport à l'évaluation »
- classe 227 : Pb1 ; « le cours a été traité au début de l'année »
- classe 229 : Pb1, partie 2 ; « partie du cours déjà estompée dans les esprits »

Mais pour une troisième catégorie de professeurs, qui infirment le point de vue exposé par les première et deuxième catégories de leurs collègues, la proximité dans le temps entre les moments de l'enseignement et de l'évaluation, alliée à des problèmes de technicité, aurait un effet négatif sur la réussite des élèves. Ainsi pour justifier quelle est la question la moins bien réussie, ils avancent les arguments suivants :

- classe 201 : Pb2, « les dernières questions de l'exercice 2 (sur l'homothétie) ; apparemment, ces notions n'étaient pas encore acquises, peut-être par manque d'exercices »
- classe 203 : Pb2, « fin du problème, questions 5, 6, 7 et 8 ; l'homothétie a été traitée en fin de trimestre, donc pas bien assimilée »
- classe 218 : Pb2 ; « les élèves se débrouillent toujours moins bien en géométrie et d'autre part les élèves n'étaient pas assez rôdés à l'homothétie »

Enfin, pour une quatrième et dernière catégorie de professeurs, l'évaluation de connaissances enseignées à une époque dont l'éloignement dans le temps est assez grand, de l'ordre d'une année scolaire, semble favoriser la réussite des élèves. L'explication réside peut-être dans le sentiment qu'alors, le regard jeté une année en arrière, permet de mesurer le seuil important franchi à l'intérieur de la hiérarchisation du cursus éducatif : celui de la classe précédente pour laquelle le niveau inférieur est, bien entendu, supposé être atteint par les élèves actuellement dans la classe immédiatement supérieure. Ainsi en est-il pour le problème le mieux réussi :
- classe 201 : Pb2 ; « niveau troisième »
- classe 236 : Pb1 ; « interprétation du tableau de variation, factorisation et Pb2, figure, équation cartésienne ; connaissances de troisième consolidées en seconde et nombre d'exercices faits en classe important. »

Dans ce dernier cas, remarquons qu'à l'intérieur de la liste citée, et en se référant au programme officiel, seules la factorisation (et encore !) et la figure sont effectivement des « connaissances de troisième ». La même remarque s'applique au jugement porté par le professeur de la classe 201 sur le problème 2, qualifié comme relevant du niveau troisième. En effet, dès la deuxième question, qui porte sur le produit d'un vecteur par un réel, et jusqu'à la fin de ce problème, ce sont des connaissances spécifiques au programme de seconde qui sont engagées, et donc des connaissances ni enseignées ni apprises en troisième (équation cartésienne de droite, colinéarité et conséquences sur alignement et parallélisme, homothétie).

Au regard de ce petit échantillon, il apparaîtrait ainsi que, du point de vue des professeurs et selon leur expérience pratique enseignante, lorsqu'une notion a été enseignée récemment, la réussite des élèves sera supérieure à ce que l'on peut en espérer quand son enseignement est éloigné dans le temps. C'est ce qu'indiquent de façon convergente ceux qui évoquent la proximité pour expliquer la réussite (classes 215, 223, 224, 227, 229, 239) et l'éloignement pour expliquer l'échec (classes 209, 224, 227, 229, 230, 240). Cette explication fait intervenir un des rôles du temps qui consiste à estomper, modifier ou éteindre le souvenir.

Cependant, certains professeurs tempèrent ce jugement en insistant sur le fait qu'il faut laisser un peu de temps aux élèves, pour « acquérir » (classe 201), « assimiler » (classe 203) les notions, ou « faire des exercices » (classe 201), « rôder » les élèves (classe 218). C'est l'aspect du temps nécessaire pour acquérir une technique, des routines, des habitudes qui est alors évoqué.

Enfin, les effets nocifs de l'éloignement dans le temps ne semblent s'exercer que pour l'amplitude de l'année scolaire en cours, c'est-à-dire pour des notions dont la charge d'être officiellement présentées comme nouvelles incombe au professeur du niveau en cause. C'est ce que paraissent indiquer les professeurs qui relèvent comme favorables aux élèves les questions pour lesquelles la réponse fait appel à des souvenirs identifiés, souvent de façon erronée, comme se rapportant à la classe de niveau inférieur (classes 201 et 236). Cette réponse renvoie à la structure du système éducatif, segmenté en classes de niveau croissant ; le fait qu'un élève soit parvenu dans une classe donnée du cursus garantissant, officiellement du moins, qu'il « a le niveau » correspondant aux classes de rang inférieur. Cette réponse s'accorde à la structuration du temps résultant de l'assujettissement à une institution scolaire pour laquelle le savoir transposé apparaît avec la linéarité qui résulte de sa mise en texte, structuration décrite par les didacticiens des mathématiques (Chevallard 1985, Chevallard et Mercier 1987, Mercier 1992) et des sciences expérimentales (Johsua et Dupin 1993).

Au travers les réponses données par les professeurs, on devine en filigrane une connaissance professionnelle et pratique d'un certain type de mémoire rencontré lors de l'enseignement des mathématiques. Elle relève de l'histoire didactique vécue dans les classes et lors des leçons antérieures, et de l'étude menée à cette occasion.
Ces réponses laissent transparaître, ce que l'on pourrait appeler, en première approche, la représentation spontanée de la mémoire didactique des élèves qu'en ont ces professeurs. C'est une représentation de la dimension de leur rapport aux élèves relevant de ce qu'ils estiment pouvoir être mobilisé par ces élèves, et relatif à leur mémoire des mathématiques, dans les moments d'évaluation[5]. On pourrait synthétiser cette représentation ainsi :

- est la moins susceptible d'oubli, tout d'abord, la mémoire des notions et techniques qui relèvent des classes de niveau inférieur
- puis vient celle qui se rapporte à un enseignement récent, mais pas trop, car il faut avoir laissé aux élèves le temps d'acquérir les techniques relatives au nouveau savoir enseigné
- des phénomènes d'oubli sont prévisibles, notamment en ce qui concerne des savoirs dont l'enseignement est relativement éloigné à l'échelle de l'année scolaire qui est de la responsabilité du professeur, par exemple au-delà d'un trimestre
- cependant, le passage de l'élève dans la classe supérieure garantit qu'il se souviendra des notions et techniques enseignées dans la classe de niveau inférieur, et que le professeur sera en droit de lui demander de mobiliser

Il résulte de ce dernier point que le passage d'une classe à la classe de niveau supérieur est interprété, à travers le prisme du contrat didactique, comme garantissant, *grosso modo*, une certaine homogénéité de connaissances pour les élèves d'une même classe à un niveau donné du cursus scolaire. Cette clause du contrat se traduit par le présupposé d'une mémoire collective commune des élèves au sujet des connaissances relatives au niveau inférieur, et ce malgré des histoires didactiques personnelles différentes. Ce présupposé issu, comme il a été dit, du découpage du savoir et de son enseignement séquentiel le long du fil du temps

[5] Brousseau (1986a) note : « Dans leur activité d'enseignement, les professeurs sont donc obligés d'utiliser de façon plus ou moins explicite une sorte de théorie de la connaissance, d'épistémologie des mathématiques. Ces conceptions, à usage strictement professionnel, n'ont généralement pas de caractère scientifique (ni même consistant), même si localement elles sont la trace de théories plus ou moins récentes. Nous appelons "pensée mathématique scolaire" ces pseudo-théories. »

didactique, indique une nécessité indispensable au bon fonctionnement du contrat didactique : les connaissances antérieures stabilisées et disponibles en mémoire peuvent ainsi servir de milieu sur lequel le professeur s'appuiera pour favoriser l'émergence des connaissances nouvelles, dans la classe de niveau supérieur.

1. 3. Confrontation de ces exemples avec quelques éléments issus des théories de la mémoire

1. 3. 1. Un foisonnement d'approches pour la mémoire

Plusieurs domaines de recherches scientifiques sont directement engagés sur le thème de la mémoire. Citons, du côté de la biologie, la neurophysiologie et la neurochimie, dont l'étude porte sur les structures cérébrales ; du côté des sciences humaines, la psychanalyse, la psychologie cognitive et la psychologie sociale, la sociologie, l'anthropologie, l'histoire, … liste sans doute non exhaustive. Cependant, ces domaines sont souvent étanches les uns aux autres et Baddeley (1993) peut affirmer, par exemple :

> « La neurophysiologie et la neurochimie sont des domaines d'investigations intéressants et importants mais, pour le moment, ils n'exercent que des contraintes relativement faibles sur les théories et les modèles psychologiques de la mémoire humaine. »

À l'intérieur de chacun de ces domaines d'étude, les conceptions et les orientations de recherche ont évolué au cours de ces vingt dernières années. Par exemple en neurophysiologie, le débat a connu une période de clivage entre « locationnistes » et « non locationnistes » à propos de la question portant sur la partie du cerveau où se trouveraient les structures cérébrales spécifiques de la mémorisation. En psychologie, le modèle dualiste des mémoires « à court terme » et « à long terme »[6] est désormais considéré comme dépassé par certains auteurs, tels Baddeley et Hitch, qui ont proposé de leur substituer le concept de « mémoire de travail ». De même sont apparus en psychologie les termes de « mémoire implicite », « mémoire explicite », « mémoire sémantique », « mémoire lexicale » ; certains de ces termes renvoyant à la prise en compte de l'importance du contexte.
Cette prolifération terminologique reflète la diversité des théories de la mémoire. Il faut encore lui adjoindre la pluralité des modèles de la mémoire proposés, parmi lesquels se distinguent deux grands clivages : ceux qui utilisent le modèle informatique, les informations étant, comme dans un ordinateur, stockées en des lieux précis de la mémoire ; ceux qualifiés de connexionnistes pour lesquels l'information n'est pas localisable mais répartie dans un réseau neuronal.

Il faudrait aussi rajouter à ces multiples entrées disciplinaires, certains apports philosophiques versés comme contributions à la question de la mémoire[7]. L'une de ces contributions a eu son

---

[6] Ce modèle de la « mémoire à court terme » a été développé dans les années 1950-60 par des psychologues anglais ; les qualificatifs « court terme » et « long terme » sont aussi utilisés par Piaget et Inhelder (1968) chap.I § 6.

[7] Sur cet apport philosophique, Tadié J-Y. & Tadié M. (1999) dressent, dans la première partie de leur ouvrage, un inventaire qui va des présocratiques à Edelman, prix Nobel 1972 pour sa découverte de la constitution chimique de la molécule d'anticorps. Cet aspect ne sera pas plus exploré que ce qui nous paraît strictement nécessaire à ce travail.

heure de gloire au début du XX^e siècle, celle de Bergson dans *Matière et mémoire*. Nous l'évoquons rapidement car elle constitue, en quelque sorte, un contre modèle d'un de ceux auxquels nous aurons à recourir parfois, lors de la construction visée d'un modèle de la mémoire pour l'étude des mathématiques.

Bergson identifie deux types de mémoire : une mémoire habitude et une mémoire image. La première est assise sur la répétition ; elle procède d'une action qui reconstruit le souvenir. La seconde est faite de « tous les événements de notre vie quotidienne à mesure qu'ils se déroulent » (p. 86). Bergson défend l'idée d'une « mémoire pure », ou plutôt « d'un souvenir pur », opposée à la perception[8]. Pour représenter le passage d'un souvenir pur à la perception, il utilise le schéma d'un segment [AD], où entre les deux extrémités figurant l'un et l'autre, se situe en [BC] le « souvenir-image[qui], à son tour, participe du "souvenir pur" qu'il commence à matérialiser, et de la perception où il tend à s'incarner : envisagé de ce dernier point de vue, il se définirait une perception naissante ». Le lien entre les deux types de mémoire qu'il définit est, quant à lui, représenté par le schéma d'un cône. Il est en contact par le sommet, représentant le corps, avec un plan représentant l'expérience et en lequel le souvenir, « l'idée », s'actualise, ici et maintenant, par l'intermédiaire d'un mot ou d'une attitude corporelle ; la base du cône représente quant à elle les souvenirs dans leur totalité sous forme d'images. En nous détachant de l'état sensori-moteur, nous allons nous éparpiller vers la base du cône où sont déposés les souvenirs, vers « l'image », tandis qu'en nous concentrant sur les stimuli sensori-moteurs, sur la perception actuelle que nous avons de notre corps, nous nous rapprochons de « l'idée » : le « moi normal » se meut entre ces deux pôles pour assurer l'équilibre entre « image » et « idée » nécessaire à l'action présente. Selon Bergson[9], la tâche de la psychologie serait de s'attacher à l'étude du mouvement allant du sommet à la base du cône et réciproquement.

Les deux ouvrages fondamentaux d'Halbwachs sur la mémoire, *Les cadres sociaux de la mémoire* et son ouvrage posthume *La mémoire collective*, sont des réfutations, tout au long de centaines de pages, des thèses de Bergson. De nos jours, comme le souligne Candau (1998), « […] le consensus existe pour reconnaître que la mémoire est davantage une reconstruction continuellement actualisée du passé qu'une restitution fidèle de celui-ci […] L'idée selon laquelle les expériences passées seraient mémorisées, conservées et récupérées dans toute leur intégralité apparaît insoutenable. » Par ailleurs, dans l'avant-propos à la septième édition, Bergson revendique le choix de se tenir à une position équidistante entre matérialisme et idéalisme, ce choix l'ayant conduit dans l'ouvrage à évoquer, en de multiples reprises, « l'esprit ». Bergson apparaît, idéologiquement, comme un homme du « juste milieu » de son époque, à la charnière du XIX^e et du XX^e siècle, comme le soulignent Tadié et Tadié (1999) : entrevoyant le rôle des connexions neuronales, mais limité par la notion « d'esprit ».

1. 3. 2. Mise en rapport avec les exemples étudiés précédemment

[8] Bergson, 5^e édition, p. 147.
[9] Bergson, 5^e édition, pp.180-181.

Un apport fondamental dû à Vygotski (1934 ; 1985), réside en une de ses thèses bien connues qui soutient que : « Le développement de la base psychique nécessaire à l'apprentissage scolaire des disciplines fondamentales ne précède pas le début de l'apprentissage mais s'effectue en liaison interne indissoluble avec lui, au cours de sa progression ». Ainsi, discutant la thèse de Thorndike sur le rejet de l'idée de discipline formelle, il est amené, dans une synthèse sur le développement et l'apprentissage, en laquelle il présente les résultats de quatre de ses recherches, à affirmer :

> « 2) inversement l'apprentissage exerce sur le développement des fonctions psychiques supérieures[10] une influence qui s'étend bien au-delà des limites du contenu, de l'objet propres à une discipline donnée, et donc qui confirme à nouveau l'existence d'un effet de discipline formelle variant selon les matières scolaires mais, en règle générale, propres à toutes ; l'enfant qui est parvenu à prendre conscience des cas a maîtrisé par là même cette structure, qui est alors transférée dans d'autres domaines non directement liés aux cas ni même à la grammaire dans son ensemble ; 3) il y a interdépendance et liaison réciproque des fonctions psychiques particulières plus spécialement impliquées dans l'étude de telle ou telle matière ; ainsi l'attention volontaire et la mémoire logique, la pensée abstraite et l'imagination scientifique se développent, grâce à la base commune à toutes les fonctions psychiques de type supérieur, en un processus complexe unique ; cette base commune à toutes les fonctions psychiques supérieures, dont le développement constitue la principale néoformation de l'âge scolaire, est la prise de conscience et la maîtrise » p. 269.

Dans les deux exemples que nous avons précédemment décrits, tant du côté des professeurs que de celui des élèves, les souvenirs et les oublis portent sur des savoirs mathématiques, uniquement. Cela paraît trivial que de le noter, mais c'est sans doute en gardant présent à l'esprit que c'est autour de cette discipline scientifique que sont faites les observations, que l'on prévient les généralisations hâtives et les transferts abusifs. Bien des indices culturels semblent confirmer le point de vue de Vygotski : par exemple il existe, paraît-il, des enquêtes montrant que l'apprentissage d'un logiciel de traitement de textes est plus rapide et sûr auprès de personnes ayant poursuivi des études supérieures qu'auprès de secrétaires titulaires d'un CAP de sténodactylographie[11]. Mais dans le domaine étudié ici, celui de la mémoire scolaire, il paraît sage de méditer le propos de Lieury (1996) à la fin d'un de ses ouvrages consacré aux *Méthodes pour la mémoire*. Il y analyse, avec les outils issus des recherches en psychologie de la mémoire présentées dans l'ouvrage, la page d'un manuel d'histoire de 6^{e} et tire la conclusion suivante :

> « À partir de l'exemple simple en apparence d'une seule page de manuel, on constate qu'il ne peut y avoir de "méthode" unique qui donnerait des miracles. La mémoire étant complexe, il ne peut y avoir de méthode simpliste. Une bonne méthode exige une construction de textes ou manuels qui, par son ampleur, ne peut être réalisée que par une équipe pluridisciplinaire incluant des spécialistes du domaine, des psychologues, des professeurs habitués à enseigner un certain niveau d'étude, des iconographes, etc. » pp.184-185.

À notre connaissance, à ce jour le texte ou le manuel évoqués par Lieury, et qui tiendrait compte des spécificités mémorielles à mobiliser dans une discipline donnée, n'a pas encore

---

[10] Rappelons que, pour Vygotski, les fonctions psychiques supérieures sont constituées de l'attention, la mémoire, la volonté, la pensée verbale, etc.

[11] Sur cet exemple, il est intéressant de relever ce qu'en dit Vygotski (1933-1934 ; 1985) : « Apprendre à taper à la machine implique effectivement l'assimilation de certaines habitudes qui en tant que telles ne produisent aucun changement dans la configuration mentale humaine, étant donné qu'elles se servent de cycles de développement déjà accomplis et achevés. Et c'est précisément pour cette raison qu'un tel apprentissage n'a qu'une importance insignifiante pour le développement général. » p. 113.

été rédigé. Par ailleurs, à l'intérieur d'un chapitre consacré à « La mémoire des connaissances encyclopédiques », et après avoir exposé les différents types de mémoire, Lieury (1996) est amené à écrire :

> « Ainsi, c'est une illusion de penser qu'un domaine de connaissances correspond à un type de mémoire. Certaines matières ont sans doute des dominantes, comme la dactylographie qui requiert des programmes moteurs, les langues étrangères qui requièrent des composantes lexicales, notamment articulatoires, très importantes, les mathématiques qui requièrent sans doute une mémoire spéciale, logique. Mais dans de nombreux domaines, comme l'Histoire, la Géographie ou la Biologie, l'acquisition des connaissances correspond plutôt à un patchwork de différents stockages, lexical, imagé, sémantique, raison pour laquelle ce sont ces matières qui prédisent bien la réussite scolaire au collège. » pp. 174-175.

Dans les exemples que nous avons rapportés, professeurs et élèves évoquent la mémoire en utilisant, au détour de leurs phrases, des mots qui s'y rapportent d'ordinaire, par exemple les termes de souvenir ou d'oubli, justifiés par leur rapport au temps dans le cas des professeurs. Ni les élèves, ni les professeurs n'ont cependant de terme pour qualifier la mémoire dont ils parlent, que l'on possèderait ou non, et qui serait alors le propre de la personne. Pour les professeurs, outre le fait qu'il serait peut-être malvenu, s'adressant à une institution comme l'IREM, de justifier l'échec par « une absence de don » chez certains élèves, ou un niveau qui ne cesse de baisser, cette absence de références aux personnes est induite par la question qui porte sur la structure : « quelle est la question la mieux ou la moins bien réussie », étant sous-entendu qu'il s'agit de leur classe, leur a-t-on demandé. Seule Sarah, en tant qu'élève, attribue à sa personne un déficit de capacité à se souvenir comment faire dans certaines parties des mathématiques. Quelle serait donc cette mémoire pour les mathématiques et à qui appartiendrait-elle ?

Dans la précédente citation de Lieury, l'absence de définition de la mémoire logique que requerrait l'étude des mathématiques, les précautions prises par l'auteur, pourtant spécialiste reconnu de la mémoire[12], lorsqu'il traite des disciplines scolaires (les disciplines formelles de Vygotski), nous incitent à pénétrer avec prudence dans ce domaine, et à ne pas perdre de vue qu'il s'agit d'étudier des phénomènes mnésiques liés à l'étude scolaire des mathématiques, domaine d'étude qui a reçu dans les pays francophones le nom de didactique des mathématiques. Mais d'ores et déjà, l'étude de certaines autres disciplines (histoire, géographie, biologie) paraît, de l'aveu même de Lieury, convoquer l'ensemble des types de mémoire que les psychologues ont étudiés. Quant aux mathématiques, recourant de même aux textes, aux plans et images (tableaux, graphiques, figures, dispositions spatiales spécifiques pour certains calculs et algorithmes, etc), elles nous paraissent devoir elles aussi faire appel à tous ces types de mémoire, si l'on suit la position de Lieury.

Les recherches sur la mémoire, notamment les orientations neurologiques, ont permis d'identifier deux circuits cérébraux correspondant à deux types de mémoire. Celui de la mémoire épisodique, localisé dans l'hippocampe, et qui fait intervenir la situation d'origine de laquelle l'information provient, et celui de la mémoire procédurale, localisé dans les corps

[12] Lieury est ainsi l'auteur de l'article consacré à la mémoire dans *l'Encyclopædia Universalis*.

striés et le cervelet, et relatif aux apprentissages moteurs et perceptifs[13]. Si l'on se reporte au discours des élèves sur l'interrogation écrite, il semble possible d'y retrouver ces deux types de mémoire.

Prenons pour exemple le tour de parole 50 de Sarah qui conclut l'épisode relatif au problème suscité par l'asymptote oblique :

50. Sarah : Oui mais parce que je l'avais fait sur… Quand on avait fait… Après les limites et les dérivées, sur le livre, je m'étais fait une fiche pour les asymptotes et je me rappelle, y'avait un truc sur les asymptotes obliques et tout, comment chercher. Et puis j'ai oublié…

Sur cet exemple, la tâche consiste à repérer la fonction affine asymptotique à la fonction du problème, à partir de l'écriture de cette dernière (la « claire mise en évidence » dont parle le programme de Terminale S qui est le « truc » dont parle Sarah), tâche dont elle ne se souvient plus. Cette tâche relève donc de la mémoire procédurale, dans la mesure où elle engage des « procédures » qui débouchent ensuite sur un petit travail « moteur » d'écriture. Mais celui-ci est enclenché par des objets mathématiques de nature perceptive, comme repérer dans l'écriture l'information importante.

Par exemple, si la fonction f à étudier est définie dans l'énoncé par $f(x)=\frac{2x^2+x+2}{x+1}$ et qu'une question a amené à écrire $f(x)=2x-1+\frac{3}{x+1}$, l'élève devra se souvenir que le travail qui reste à sa charge n'est plus très important pour parvenir à la détermination de l'asymptote dont il a l'équation « sous les yeux »… Cette mémoire est donc située, tant à travers l'écriture d'objets mathématiques sur laquelle elle s'appuie, qu'à travers la ou les situations sociales d'origine au cours desquelles l'élève a étudié comment parvenir à ce repérage. Cette tâche relève alors aussi du premier type ; celui de la mémoire épisodique.

Le rappel évoqué par Sarah et relatif à l'apprentissage fait, lui aussi, intervenir la ou les situations d'origine (le livre, après les limites et les dérivées) ainsi que l'épisode (la « fabrication » d'une fiche) d'où est tirée l'information sur la procédure à mettre en œuvre pour répondre à la question ; il relève alors de la mémoire épisodique.

Il semble ainsi, en première approche, et dans la mesure où il s'agit de la mémoire du travail à exécuter dans le cadre particulier de la mise en scène créée pour le savoir mathématique par le texte du sujet de l'interrogation, que soit engagée une mémoire des procédures à suivre dans une situation donnée pour répondre à une question posée. Cette mémoire s'appuie alors sur la conjugaison des deux circuits différents de la mémoire : procédural et épisodique. Cette branche d'étude de la mémoire mobilise donc ainsi, elle aussi, pour le traitement de cet exemple mathématique, les deux types de mémoire qu'elle a pu identifier.

Continuant d'interroger les théories psychologiques de la mémoire, on peut tenter de rechercher chez les élèves une mémoire du sens ou du concept, telle qu'elle est définie dans le

[13] Tulving (1972) propose une théorie de la mémoire qui se distinguerait en une mémoire épisodique et une mémoire sémantique. La désignation « mémoire procédurale » provient du neurologue Squire.

cadre de ces théories. Lieury (1986), en effet, donne la définition suivante de la mémoire sémantique :

> « [C'] est l'ensemble des informations et opérations permettant de connaître la signification des mots par rapport aux choses et entre eux. […]…, la mémoire sémantique paraît, dans l'état actuel des connaissances, logique c'est-à-dire qu'on peut y définir des relations d'emboîtement, de classes, d'intersection, d'union, etc. » p. 141.

Cette définition permet donc de mieux saisir ce qui est identifié comme relevant de la mémoire logique : elle engage « la signification des mots » et « les choses ». On peut remarquer qu'elle est évoquée à partir de concepts mathématiques (emboîtements, classes, union et intersection), ce qui risque fort de nous engager dans un raisonnement circulaire qui ne définit ni ne démontre rien : la mémoire des mathématiques c'est la mémoire… mathématique, pourrait-on ainsi le résumer ! Cependant, afin d'illustrer cette « définition », Lieury donne un exemple. Il s'agit d'une expérience réalisée par Collins et Quillian (1970) pour analyser la structure de la mémoire sémantique, et plus précisément le « temps de catégorisation ». Le sujet de l'expérience doit dire si des mots qui apparaissent sur un écran peuvent ou non être rattachés à un nom de catégorie, prononcé par l'expérimentateur (par exemple le mot chien se rattache à la catégorie « animal »).

Plusieurs remarques sont à faire au sujet de ce type d'expériences à partir desquelles sont échafaudées des théories.
Tout d'abord, il est notable que les contenus mathématiques sur lesquels nous voulons faire porter l'étude de la mémoire nous semblent être, *a priori*, d'un tout autre niveau de complexité : l'étude de ce type d'association « chien - animal » relevait, aux grandes heures de la réforme des mathématiques modernes, du niveau des élèves au début de la classe de 6^e^, lorsqu'on commençait à définir les divers types de relations d'un ensemble vers un autre. Mais l'intention était, à cette époque, d'enseigner la notion mathématique de relation d'un ensemble vers un autre, à travers son graphe, en s'aidant d'exemples triviaux à ce niveau d'âge (10-12 ans), et non la capacité à reconnaître l'association chien - animal, ou d'autres similaires.
Ensuite, cette caractérisation de la mémoire sémantique laisse transparaître la dichotomie classique signifiant - signifié, l'un étant donné par le lexique (écrit ou dit) et l'autre par le « sens », la « signification », ou le « concept » (construits par le sujet et évalués à travers la réponse qu'il donne d'appartenance ou non à la catégorie). Or, la métaphore des mathématiques comme langage, avec à sa suite la terminologie rattachée, issue de la linguistique et recourant aux dialectiques « signifiant - signifié », « représentant - représenté », etc., aboutit très vite à une impasse dans laquelle se perdent la compréhension et l'analyse de l'activité mathématique, comme le montre Bosch (1994, pp 1-8). Tout au contraire, l'activité mathématique est d'abord une pratique écrite, et la langue qui s'y rapporte, et qui peut se déployer sous la forme de plusieurs registres (parlé, écrit, gestuel), n'en est qu'un commentaire second[14]. Le « sens » des mathématiques est donc à trouver

[14] En particulier, nous nous référons sur ce point à la reprise de la critique menée par Bosch (1994) pp. 1-8, de ce qui a été identifié par Derrida sous le terme de « phonologisme », qualifié d'« élément décisif de la

ailleurs que dans « la signification du mot mathématique par rapport aux choses mathématiques », en paraphrasant la définition donnée par Lieury.

Revenant sur cette expérience, Lieury (1996) est amené à préciser la définition du mot « sens » qu'est conduit à poser Quillian. :

> « Tout d'abord, le sens d'un mot est donné par son appartenance catégorielle : comprendre ce qu'est un canari, c'est d'abord savoir que c'est un oiseau, comprendre ce qu'est une tulipe, c'est savoir que c'est une fleur. La deuxième caractéristique de la compréhension d'un mot, c'est de décrire ses propriétés spécifiques (que d'autres chercheurs appellent attributs, propriétés, etc.). Ainsi, classer le mot "feuille" dans le concept d'arbre permet de trouver sa signification pour sa traduction. Un peu plus tard, Ross Quillian se préoccupa de savoir si son modèle correspondait à la véritable structure de notre mémoire et il s'associa à Allan Collins, psychologue, pour essayer de valider sur le plan psychologique son premier modèle. Ce fut le départ d'un grand domaine de recherche commun à la psychologie sous le nom de "mémoire sémantique" et à l'informatique, dans le domaine de l'"intelligence artificielle ". » pp. 154-155.

Ce dernier exemple nous permet de comprendre ce que sont ces « concepts » pris en compte pour la définition de cette mémoire sémantique : ceux attachés aux catégories[15] Si le recours à la catégorisation est peut-être utile pour l'appréhension des concepts d'objets (l'objet « tabouret » relève de la catégorie dont un représentant est le schéma constitué de quatre pieds et d'un siège, tandis que l'objet « chaise » se rapporte à la catégorie utilisant le même schéma, mais auquel on adjoint un dossier, par exemple), il semble assez délicat de l'étendre aux concepts scientifiques. Dira-t-on que le « concept » d'intensité renvoie aux catégories de temps, ou bien de charge, à moins que ce ne soit à celles d'énergie, de différence de potentiel ou de puissance ? De même le « concept » de somme renvoie-t-il à la catégorie de nombre (qui resterait par ailleurs à définir selon la nature des nombres en question), ou d'assemblage de deux collections (avec dans ce dernier cas le délicat problème de la représentation de ces collections lorsque leur cardinal n'est pas entier, ou le problème qui surgit lorsque leur intersection n'est pas vide), ou à celle de vecteur, ou de fonction, à moins que ce ne soit à celle de sous-espaces vectoriels supplémentaires, etc ? On pourrait ainsi multiplier les exemples qui montreraient que ces concepts scientifiques, parce qu'ils portent sur les relations - et donc sur ce qui peut se faire et par conséquent se penser - entre de nombreux autres « objets » scientifiques, se prêtent mal à la catégorisation[16]. Comment, dès lors, pouvoir parler de réseau et de mémoire sémantiques à leur propos dans le sens donné par Lieury ?

---

métaphysique occidentale ». Ce phonologisme consiste à penser que le *logos*, la raison ou le sens, ne nous serait tout d'abord accessible que par la *phoné*, la voix. L'écriture étant seconde, elle entraînerait une dégradation de la *phoné*, et donc une perte du sens. Pour Derrida, la linguistique moderne, notamment celle de Saussure, supporte ce phonologisme. Et pour Bosch, les théories qui tentent de décrire les mathématiques comme un langage l'importent, avec les présupposés linguistiques qui leur servent d'outils théoriques : elles manquent de ce fait leur objet ou lui attribuent, en négatif, des propriétés qu'il n'a pas, telle que celle de « la perte de sens ».

[15] Ceci n'a rien pour surprendre au demeurant, comme l'indique Quéré (1994) : « En effet, comme l'a rappelé Pierre Bourdieu, catégoriser c'est diviser et classer, et la catégorie est un "principe de division" et un "schème classificatoire" (Bourdieu, 1993). Si à cette identification de la catégorie à la classe, de la catégorisation à la classification, on ajoute une conception de la connaissance et de la pensée comme activités de distinction et de regroupement, de comparaison et d'abstraction, on comprend pourquoi l'enquête sur les catégories, sur les processus de catégorisation et sur l'organisation des cadres catégoriels occupe une place aussi centrale dans l'étude de la "cognition" (cf. Bloor, 1982) » p. 7.

[16] Vigotski (1934 ; 1985) argumente en présentant ses résultats, durant tout le chapitre 6 de *Pensée et langage* (pp. 207-318), sur la distinction à opérer entre « concepts scientifiques » et « concepts quotidiens ». Citons

Si nous suivons l'orientation donnée par Vygotski à la question de la mémoire pour « le développement des concepts scientifiques », il faut revenir à sa célèbre controverse avec Piaget. Pour réfuter l'explication piagétienne de l'absence de prise de conscience des concepts à l'âge scolaire[17], Vygotski (1934 ; 1985) est conduit à développer une analyse de l'unité fonctionnelle de la conscience, et de l'interdépendance des différentes formes de son activité, dont la mémoire, qui est une de ces fonctions[18] :

> « Le fait central à l'âge scolaire est le passage des fonctions inférieures de l'attention et de la mémoire aux fonctions supérieures de l'attention volontaire et de la mémoire logique.[…] Dire que la mémoire s'intellectualise à l'âge scolaire revient exactement à dire qu'apparaît la mémorisation volontaire […] On voit ainsi que dans la sphère de l'attention et de la mémoire non seulement l'écolier témoigne d'une capacité à prendre conscience et à faire intervenir sa volonté, mais aussi que le développement de cette capacité forme justement la substance principale de tout l'âge scolaire » pp. 237-238

L'étude scolaire des mathématiques suppose donc des formes de travail qui relèvent d'une mémorisation souvent « volontaire », « consciente » ; que la volonté en jeu soit celle des élèves, celle du professeur, ou qu'elle soit effet institutionnel. La mémoire logique qu'évoque Vygotski est fondée sur les « concepts scientifiques », qui se rapportent donc à la cognition issue de l'enseignement de telle ou telle science et dont les outils de la pratique sont spécifiques de cette science ; ce n'est donc pas une mémoire « abstraite » de laquelle est évacuée la pratique du contenu qui l'a constituée.
Sur ce dernier point, Vygotski et son équipe avaient mis en évidence, dès 1930, le rôle des signes en tant qu'outils permettant d'influer sur la pratique du contenu de la mémoire :

> « The very essence of human memory consists in the fact that human beings actively remember with the help of signs. It may be said that the basic characteristic of human behavior in general is that humans personnally influence their relations with the environment and through thatnenvironment personnally change their behavior, subjugating it to their control. It has been remarked that the very essence of civilization consists of purposely building monuments so as not to forget. In both the knot and the monument we have manifestations of tne most fundamental and characteristic feature distinguishing human from animal memory. » (Vygotski, 1930-1978, p. 51).[19]

---

seulement pour ce qui concerne un « concept scientifique », l'expression étant prise non dans le sens d'un concept propre à la science, mais dans le sens de son apprentissage : « Le développement d'un concept scientifique touchant à la vie sociale s'effectue dans les conditions d'un processus éducatif, qui représente une forme spécifique de collaboration systématique entre le pédagogue et l'enfant, au cours de laquelle les fonctions psychiques supérieures de l'enfant viennent à maturité avec l'aide et la participation de l'adulte. » pp. 209-210 ; ou encore : « […]*le développement des concepts scientifiques emprunte une voie opposée à celle que suit le développement du concept spontané chez l'enfant.* » p.283.

[17] D'après Vygotski, elle s'appuie chez Piaget sur « l'égocentrisme de la pensée de l'enfant, jusque vers sept – huit ans, et à l'inconscience que cet égocentrisme entraîne. » p. 62.

[18] Vygotski (1934, 1985), Chapitre 6, Paragraphe II. Il est assez remarquable de noter l'intérêt porté par Vygotski aux savoirs scolaires, notamment scientifiques, dès le plus jeune âge.

[19] Nous proposons la traduction suivante : « L'essence profonde de la mémoire humaine réside en ce que les êtres humains se rappellent activement à l'aide de signes. On peut dire que la caractéristique de base de la conduite humaine en général tient à ce que les humains influencent personnellement leurs relations avec l'environnement et à travers cet environnement changent leur conduite, en le plaçant sous leur contrôle. On a remarqué que l'essence profonde de la civilisation consiste à construire volontairement des monuments pour ne pas oublier. Aussi bien dans le nœud que le monument, nous avons des manifestations du trait le plus fondamental et caractéristique distinguant la mémoire humaine de celle de l'animal. »

Il s'agissait d'une expérience au cours de laquelle des personnes âgées de 5 à 27 ans, devaient répondre à des questions par un mot (par exemple : « De quelle couleur est ta chemise ? »), en respectant la consigne qui voulait que certains noms de couleur soient interdits, et qu'un nom de couleur ne puisse pas être dit deux fois. Dans un premier cas, l'expérience se déroulait sous cette forme et, dans un deuxième cas, pour la même tâche correspondant à la même consigne, on fournissait à la personne interrogée un jeu de neuf cartes en couleur, parmi lesquelles se trouvaient les couleurs interdites parmi d'autres. Vygotski mesure alors les écarts entre les erreurs pour ces deux tâches selon les tranches d'âge. Si, pour toutes ces tranches, le nombre d'erreurs est moins important lors de l'expérience avec les cartes, la baisse est plus prononcée pour les tranches d'âge 8-9 et 10-13. Elle est beaucoup plus faible pour les tranches extrêmes 5-6 et 22-27. Vygotski interprète ces résultats dans le sens d'un accompagnement du développement par des formes externes de médiation. Chez les enfants d'âge préscolaire, même si les cartes jouent un rôle de stimulus, elles n'acquièrent pas une fonction instrumentale, tandis que le stade adulte traduit l'aboutissement d'un développement au cours duquel s'est accomplie une « internalisation » du signe externe. Entre les deux, Vygotski analyse le stade intermédiaire des enfants d'âge scolaire :

> « The second stage of development is characterized by a charp difference in the indices in both of the main tasks. The introduction of cards as a system of auxiliary, external stimuli raises the effectiveness of the child's activity considerably. At this stage the exteral sign predominates. The auxiliary stimulus is a psychological instrument acting from the outside. » p. 45.[20]

Si ce « système auxiliaire » est particulièrement efficace pour des enfants d'un stade donné, et s'il y a eu une « internalisation » pour les adultes qui masque désormais cette efficacité, il n'en demeure pas moins que cet exemple montre le rôle important du signe externe utilisé comme outil pour la mémoire. Les disciplines scientifiques fournissent maints exemples d'outils externes favorisant la mémorisation : si l'on désire se souvenir de la direction et du sens de la force s'exerçant sur une particule électrique traversant un champ magnétique, « un bon outil externe » est constitué par la disposition de trois doigts de la main droite, si l'on désire se souvenir du calcul à effectuer pour trouver un nombre proportionnel à trois autres, « un bon outil externe » réside en l'écriture dans un certain ordre de ces trois nombres, et si l'on désire se souvenir de la situation géographique de l'archipel des Moluques par rapport à la Nouvelle-Guinée, un « bon outil externe » est constitué d'un atlas tenu et lu d'une certaine manière. Aussi, est-il nécessaire de tenir compte « des instruments psychologiques agissant du dehors » pour aborder la question de la mémoire dans les disciplines scientifiques et, en particulier, en mathématiques.

Cependant, il reste à définir comment et en quoi l'étude d'une science, et pour cette thèse l'étude des mathématiques, crée une certaine mémoire logique. Par ailleurs, si cette étude suppose, en suivant Vygotski, une « attention volontaire », une « mémoire volontaire », donc une « capacité à prendre conscience », nous retrouvons bien, en effet, ces éléments dans

[20] Nous proposons la traduction suivante : « Le deuxième stade de développement est caractérisé par une différence nette des résultats entre les deux principales tâches. L'introduction des cartes en tant que système auxiliaire de stimuli externes élève considérablement l'efficacité de l'activité de l'enfant. À ce stade, le signe externe prédomine. Le stimulus auxiliaire est un instrument psychologique agissant du dehors. »

l’observation du cas de Sarah qui s’applique volontairement à étudier, pour mémoriser le savoir mathématique, selon des dispositifs qu’elle se donne : refaire les exercices, constituer des fiches, etc. Pourquoi, alors, ses défaillances mémorielles lors de cette épreuve d’évaluation ? Sont -elles imputables à cette élève en tant qu’individu moins bien pourvu qu’un autre de cette capacité interne que serait la mémoire, ou à d’autres raisons qui nous échappent ?

Arrivé en ce point, il nous semble pouvoir trouver, dans ce qui caractérise l’approche de Vygotski, des éléments pour les questions rencontrées dans ce qui précède, relatives à la mémoire des mathématiques et de leur étude, et laissées sans réponses lors du parcours des approches traditionnelles de la mémoire.

Si, comme le pressent Lieury lorsqu’il évoque les disciplines scolaires, cette mémoire renvoie aux spécificités d’un savoir, c’est qu’elle n’est pas qu’une faculté personnelle, mais qu’elle est aussi externe au sujet, et propre au savoir. Si, comme le souligne Vygotski, « Le développement d’un concept scientifique […] s’effectue dans les conditions d’un processus éducatif, qui représente une forme spécifique de collaboration systématique entre le pédagogue et l’enfant », alors cette mémoire est aussi d’essence sociale : elle naît, grâce à la médiation enseignante, de l’interaction de l’élève et du savoir.

La mémoire apparaît donc comme un processus culturel de structuration de la pensée dont les ressorts sont externes et sociaux ; ce que ne peuvent prendre en compte des approches internalistes et substancialistes de la mémoire. C’est donc, sans oublier les personnes, du côté du système d’enseignement, de sa structure et de ses acteurs, et aussi du côté de l’objet de l’enseignement, ici les mathématiques, qu’il va falloir rechercher le sens de ce que l’on entend par mémoire pour l’étude des mathématiques.

1. 4. Quelques résultats tirés de l’étude de ces exemples

1. 4. 1. Il existe une dimension du contrat didactique qui porte sur la mémoire

Aussi bien pour Sarah, élève de Terminale S, que pour les professeurs qui ont participé à l’Évaluation Externe, il est de la responsabilité des élèves de mémoriser les savoirs récemment enseignés lorsqu’un délai suffisant pour leur apprentissage a été respecté. Se trouve ainsi renforcé le jugement qui consiste à penser que, lorsqu’un de ces éléments de savoir demandé en contrôle n’est pas disponible, c’est qu’il a été oublié et que la responsabilité de cet oubli incombe à la personne. Elle paraît seule impliquée dans le cas de Sarah, pour qui étude, apprentissage et mémorisation sont de l’ordre de la sphère privée. En effet, le discours qu’elle tient sur l’interrogation écrite n’avance aucune justification externe à sa personne : notamment, pas d’évocation de la difficulté du sujet qui aurait fait chuter un nombre significatif d’élèves. Par exemple, un point sur lequel Sarah aurait pu s’appuyer, pour dégager sa responsabilité, concerne la longueur du sujet, mentionnée par Aurélie avec l’approbation d’Alexandre ; ce sont par ailleurs deux bons élèves dont le jugement compte. L’argument, s’il est suggéré par le questionneur, n’est pas franchement repris par Sarah qui, certes, approuve mais fait reporter la responsabilité de l’échec sur elle-même.

Les professeurs de l’Évaluation Externe admettent, qu’avec le temps, des souvenirs du programme de l’année en cours s’estompent chez les élèves. Cependant, la connaissance de savoirs à référer au programme de classes antérieures, pour peu qu’ils aient été retravaillés à l’occasion de l’étude du programme de l’année en cours, est attendue des professeurs. Avoir été soumis, selon certaines conditions, à la structure éducative, et avoir été déclaré par elle apte à suivre le cursus du niveau supérieur (ceci est peut-être encore plus marqué lors d’un changement de type d’établissement, après procédure d’orientation à l’issue d’un cycle, comme c’est ici le cas entre la troisième et la seconde) semblent être, depuis la position de professeur, une garantie contre l’oubli de ce qui a été enseigné précédemment. Il y aurait ainsi, sur le processus de rappel à la mémoire, un effet pour lequel joue le fonctionnement de la structure éducative.

Élèves et professeurs font donc appel, en toute conscience, à la mémoire de ce qui a été enseigné pour justifier leurs comportements ; mais c’est depuis la position qui est la leur au sein de l’institution didactique qu’ils s’expriment. Par exemple pour évoquer l’échec lors d’une évaluation dans le cas de Sarah, ou formuler un jugement d’évaluation dans le cas des professeurs engagés dans l’Évaluation Externe. La mémoire apparaît ainsi comme relative au contrat qui fonde la relation enseignante. Sarah en a explicité quelques termes, parce que l’occasion lui en est fournie par la fréquentation d’un dispositif d’observation externe à sa classe, et dans lequel elle vient dire sa pratique de l’étude des mathématiques. La mémoire est aussi présente dans ce que disent les professeurs, où elle apparaît « en creux » dans le discours enseignant tenu sur l'évaluation. Cependant, cette mémoire nous est montrée comme élément d'un contrat tacite et général, au-delà de l'enseignement spécifique des mathématiques.

Il appartiendra donc à ce travail de rechercher s'il en existe une expression propre aux mathématiques, et de dire alors en quoi elle en est spécifique. C'est à cette condition que l'on pourra parler d'une mémoire didactique des mathématiques dont on pourra rechercher la dimension particulière au sein du contrat didactique. Le fil directeur de cette thèse sera l'établissement d'un modèle permettant de définir cette mémoire et son expression, les « lieux » en lesquels on la trouve, et d'envisager la possibilité de dispositifs didactiques en facilitant la maîtrise par les élèves.

1. 4. 2. La mémoire relevant de l'enseignement des mathématiques est celle d'une pratique

Revenant aux observations des deux binômes, le 18 mars 1999, un des éléments de la discussion a trait au sujet de l'interrogation écrite. Qu'en sait-on ? Il portait sur l'étude de fonctions exponentielles, mais lesquelles ?

- C'était pas très dur, quoi, mais très long. C'était plusieurs études de fonctions qui retombaient plus ou moins les unes sur les autres (Aurélie 17)
- La fonction, je m'en rappelle plus… La fonction c'était… Parce que y'en avait plusieurs de parties… Euh… Ah oui, c'était $-x_0(x\text{-}1)+e^{x0}$ je crois. Et donc là, j'ai eu un problème à la limite en $+\infty$. Parce que, bon, en plus y'avait une indication qui disait… (Sarah 17)
- Ah non, c'est pas ta fonction ! (Ludivine 18)
- Bon, enfin, y'avait une indication qui disait e^x, […] (Sarah 19)
- C'était e^{x2}, un truc comme ça. (Aurélie 23)
- Moins quelque chose. (Alexandre24)
- Oui, c'était $-x^2$; e^x-x^2. (Aurélie 25)
- D'abord, en fait elle était dessinée… En fait, elle était tracée sur une feuille de papier millimétrée, quoi, qu'on nous avait distribuée. Fallait l'étudier un peu par rapport au tracé qu'on nous donnait. (Aurélie 28)

On peut observer qu'il est difficile, lorsque ces élèves parlent de l'interrogation écrite, de retrouver, à travers leur propos, le texte de cette interrogation ou ne serait-ce que la définition analytique de la fonction à étudier. Leur interlocuteur serait bien en peine de traiter le sujet s'il se contentait des informations mathématiques que donnent ces élèves. Les désignations des objets, les signifiants, sont bien présentes dans la mémoire des quatre élèves, qu'ils soient parvenus ou non à traiter le sujet de l'interrogation. Les signifiés, comme indiqué précédemment, ne sont guère accessibles à l'observateur extérieur de cette conversation, qui n'a pas « vécu » l'engagement dans ce problème. Cette absence d'explicitation, de définition « en extension » des savoirs mathématiques sur lesquels opère le travail demandé à l'interrogation écrite, n'apparaît pourtant nullement comme pouvant compromettre la compréhension, le « sens », du discours tenu par les interlocuteurs. Celui-ci passe donc par un autre canal. Il faut encore noter que les souvenirs mentionnés par les élèves ne portent pas tant sur les noms des notions mathématiques évoquées (limites, dérivées, exponentielle, logarithme, asymptote, par exemple), donc sur les signifiants, qui ne sont pas problématiques et semblent aller de soi, mais plutôt sur ce que ce qui se fait avec ces notions mathématiques, sur leur usage. Ainsi, en pointant *en italique* les expressions significatives de ces actions telles qu'elles sont désignées par les élèves :

- Ben, il fallait *étudier le signe d'une fonction*. D'abord *étudier les variations de la fonction* et après *étudier le signe* en *cherchant* pour quelles valeurs $g(x)$ était égal à 0. Et après, fallait *se resservir de ça* pour une troisième partie où on nous demandait *d'exprimer en fonction de g(x)*, donc commencer à *mettre les variations* de $g(x)$… (Aurélie 19) - […] Fallait l'*étudier* un peu par rapport au tracé qu'on nous donnait. (Aurélie 28) - *Construire une tangente*. (Alexandre 29) - Hmm, *construire une tangente qui passe par l'origine* et après fallait *faire… l'étude de la dérivée* de la fonction. (Aurélie 30) - […] Après y'avait une deuxième partie où il fallait *chercher les valeurs de la tangente* passant par l'origine. (Aurélie 35) - […] il fallait *tracer la courbe* […] il fallait *trouver laquelle est au-dessus de laquelle*… (Aurélie 47) - Ben, j'ai *fait* tout ce qui était *tableaux de variations de fonctions*, tout ça. Et puis, … *Et les limites*…(Sarah 11 et 13) - Donc j'ai commencé *à factoriser*, et tout, et je me retrouve bien avec un produit de deux termes où y'avait $\frac{e^x}{x^2} - \frac{e^x}{x}$. Donc ça me faisait une forme indéterminée $+\infty$-∞. Donc je me suis dit c'est pas possible et tout. J'ai cherché *comment faire*. Au lieu de *factoriser*, je *faisais d'autres trucs* et tout… (Sarah 20) - Ah oui ! *Montrer que le signe de g'(x) est égal au signe de –u(x).* Alors là, blocage ! Je sais pas pourquoi ?[…] (Sarah 24) - Et puis après, y'avait *une recherche d'asymptote oblique* que je pouvais pas faire parce que j'avais pas pu faire le reste avant. Voilà quoi ! (Sarah 26) - Je me rappelais plus comment *on recherchait une asymptote oblique*, et puis… (Sarah 38)

Le souvenir du sujet qu'évoque ces élèves est donc constitué des tâches mathématiques qu'ils sont parvenus ou non à accomplir ; peu importe la spécificité des objets mathématiques engagés dans ces tâches (on ne se souvient plus très bien quelle est la fonction dont l'étude constitue les questions du problème). C'est donc le travail portant sur des savoirs mathématiques qui doit être pris comme l'objet sur lequel doivent porter les recherches sur la mémoire de l'étude des mathématiques. C'est lui qui semble constituer le canal par lequel passe le « sens » du discours tenu, qui assure sa compréhension et la poursuite du dialogue avec la personne qui pose les questions.

1. 4. 3. La nécessité du recours à la théorie didactique pour étudier la mémoire mobilisée dans l'étude des mathématiques

1. 4. 3. 1. Confrontation de quelques éléments de théories de la mémoire et de la théorie anthropologique du didactique

Ce que nous venons rapidement de dégager de l'étude de cet exemple, et concernant la pratique, ne constitue pas une découverte exceptionnelle que nous viendrions de faire. Elle est, après de nombreuses recherches, l'un des fondements sur lesquels s'appuie l'une des deux approches en didactique des mathématiques : la théorie anthropologique du didactique.

Il existe, en didactique des mathématiques, deux approches théoriques majeures qui ne s'excluent pas l'une l'autre, et pour lesquelles d'ailleurs leurs fondateurs et leurs continuateurs travaillent actuellement à « jeter des passerelles ».
L'une d'entre elles est l'approche ou théorie anthropologique du didactique, l'autre la théorie des situations. Leurs fondateurs en sont respectivement Y. Chevallard et G. Brousseau. Nous aurons l'occasion de revenir en détail sur chacune d'elles dans la suite de ce travail, mais il est d'ores et déjà possible de rapprocher certaines hypothèses fondatrices de ces théories avec ce que nous venons de voir concernant la mémoire, à partir de l'étude de ces exemples, et d'en tirer quelques conséquences.

Pour la théorie anthropologique, les mathématiques, les activités qui en relèvent, telles que leur étude, leur enseignement, leur production sont à replacer dans l'ensemble des activités humaines qui se déploient à l'intérieur d'institutions sociales (on se reporte ici à Chevallard, postface à l'édition de 1991 de « La transposition didactique », 1991a et b, 1992, 1996, 1997a et b, 1999). Aussi, « À la métaphore des mathématiques comme langage, nous proposons ainsi de substituer celle des *mathématiques comme travail*, activité parmi d'autres qui se réalise par le moyen d'instruments ostensifs spécifiques et sous des "contraintes de signification" déterminées », peuvent écrire Bosch & Chevallard (1999). Nous n'expliciterons pas, pour l'instant, les termes tels que ceux « d'instruments ostensifs » ou de « contraintes de signification ». Mais l'adoption de ce présupposé consistant à considérer les mathématiques comme un travail s'accorde avec la remarque faite précédemment sur la nature des souvenirs et des oublis évoqués par les élèves : ces phénomènes mnésiques concernaient des activités clairement désignées par les élèves qui ont dû s'y livrer. Les oublis peuvent ainsi être identifiés par leurs auteurs eux-mêmes, qui peuvent en parler, car il s'agit non d'oublis relatifs à la désignation ou au repérage à l'intérieur de souvenirs portant sur des objets, des personnes, des faits, des images, des lettres, des mots, des idées … mais à des pratiques dont sont oubliés les moyens de leur accomplissement.

Considérer alors les mathématiques, et leur étude, comme un travail qui s'accomplit à l'aide d'instruments, permet de situer la mémoire spécifique aux mathématiques dans le champ de la mémoire d'activités réalisées à l'aide d'outils à l'utilisation réglée par certaines contraintes. Les problèmes que nous avions pu observer dans les exemples antérieurement montrés, issus de la circularité de la définition de la mémoire logique donnée par Lieury, ainsi que de la difficulté à identifier les signifiés, tombent alors.
Cette mémoire qui était définie par Lieury à partir de notions mathématiques, telles les relations, les classes, la réunion ou l'intersection, correspond à la désignation de certaines pratiques mathématiques. Mais chacun sait que les mathématiques ne se réduisent pas à ces quelques exemples, que leurs pratiques sont autrement multiples et variées.
Quant aux signifiés, introuvables dans les propos des élèves, s'ils sont contenus dans les pratiques, ils ne sont alors qu'évoqués par les désignations, ou « signifiants », énoncés dans la conversation des élèves. On mesure l'impasse à l'intérieur de laquelle peut nous conduire la métaphore - par ailleurs trop souvent implicite et dans laquelle nous risquions de nous engager à travers la recherche de cette mémoire sémantique telle que définie par Lieury, par

exemple - des mathématiques comme un langage, avec ses signifiants et signifiés, ou comme une écriture avec ses représentants et ses représentés. Les signifiés ou les représentés nous apparaissaient comme des objets introuvables, sortes d'idéalités inaccessibles que l'on a tôt fait de considérer comme étant de l'ordre des processus internes au sujet, processus confinés dans une boîte noire au contenu mystérieusement caché. La contradiction est levée dans le travail de Bosch (1994) qui considère le représentant, le signe algébrique, comme un modèle d'un système, « le représenté », constitué de l'ensemble des pratiques mathématiques qui peuvent être accomplies, ou dans lesquelles est engagé « le représentant ». Ce point de vue transforme totalement la question du sens, et donc celle de la mémoire sémantique. C'est ce qu'explique Bosch (1994) :

> « Cuando uno mira (en el sentido proprio del término) el modelo algebraico, sólo ve símbolos - escrituras. Del mismo modo, si la mirada se desplaza hacia el sistema modelizado, lo que ve *son otra vez símbolos* - cifras en lugar de escrituras algebraicas, por ejemplo. La conceptualización desarrollada para el caso de los símbolos algebraicos como instrumentos de modelización se puede entonces reconduir hacia lo que el álebra permite modeliza - hacia lo representado. En efecto, el sistema modelizado existe para nosotros mediante ciertos símbolos que se utilizan de manera reglada (valor instrumental) y que "nos dicen" alogo (semioticidad). Así pues, el sentido que creíamos encontrar en lo representado *se vuelve a escapar.* » p. 4.[21]

Ainsi, lorsqu'on considère les mathématiques comme un travail, il est déraisonnable de croire que celui-ci s'accomplit grâce à des « représentants ». Il s'accomplit, comme tout travail, grâce à des outils, qui sont les signes algébriques sur l'exemple pris par Bosch (1994), et qui modélisent un système dont ils conservent les propriétés. Ce travail est mené dans un modèle qui rend compte de ce que serait l'activité dans tout système correspondant au modèle. Le « sens » apparaît alors aussi par l'intermédiaire du travail mené dans le modèle, et non pas exclusivement en référence au système modélisé, ou à la classe des systèmes modélisés. Ce déplacement de « la question du sens » induit un déplacement corrélatif de la question de la mémoire sémantique. Se rapportera-t-elle aux signes qui modélisent, au système modélisé, au travail du modèle qui inclut alors le sens donné aux signes grâce auxquels s'accomplit le travail, au résultat obtenu dans le modèle ou à sa correspondance dans le système ? Il nous semble, ici encore, que la question de la mémoire sémantique qui paraissait pourtant si simple à saisir sur l'exemple de l'association de chien et feuille à animaux et arbres, se heurte à une redoutable complexité qui n'avait peut-être pas été soupçonnée par les concepteurs du terme. Désormais, elle nous apparaît au minimum comme relevant d'une fonctionnalité quasi impraticable.

[21] Nous proposons la traduction suivante : « Quand on regarde (au sens propre du terme) le modèle algébrique, on voit seulement les symboles - les écritures. De la même manière, si le regard se déplace vers le système modélisé, ce que l'on voit *c'est encore une fois des symboles* - des chiffres au lieu des écritures algébriques, par exemple. La conceptualisation développée pour le cas des symboles algébriques comme instruments de modélisation peut alors se reconduire vers ce que l'algèbre permet de modéliser - vers le représenté. En effet, le système modélisé existe pour nous moyennant certains symboles qui s'utilisent de manière réglée (valeur instrumentale) et qui "nous disent" quelque chose (sémioticité). Ainsi donc, le sens que nous croyons rencontrer dans le représenté *s'échappe à nouveau.* »

On saisit alors que la métaphore relative aux mathématiques comme langage[22], associée à une définition de la mémoire sémantique qui s'appuie, elle-aussi sur la distinction signifiant - signifié, est tout autant impuissante à rendre compte de la mémoire relative à l'enseignement des mathématiques que de ce qui est en jeu dans l'activité mathématique. Manquant la définition de son objet, elle manque par conséquent la désignation des souvenirs relatifs à l'objet, et partant la mémoire de l'objet et de sa pratique.
Présentant la problématique anthropologique à l'intérieur de laquelle elle place son travail de thèse, M. Bosch (1994) est amenée, pour s'en démarquer, à revenir sur cette métaphore des mathématiques comme langage :

> « El cálculo algebraico sería entonces un lenguaje particular, con sus leyes de formación de expresiones (su sintaxis), cuya única función consistiría en expresar una realidad trascendente e irreductible a este mismo lenguaje. Tenemos aquí el punto de partida de las problematicas del lenguaje como *representación o expresión de un mundo otro* –el mundo del "pensamiento" o del "sentito". Estas problemáticas estan en consonancia con el idealismo cultural corriente : detrás del símbolo (o de la palabra, o del grafismo), se buscará el "concepto", la idealidad matemática. »[23] p. 2

L'orientation qui est alors choisie, en évitant de penser les mathématiques comme un langage, prend ses distances avec les termes de « représentant » et « représenté » tels qu'usités dans les théories linguistiques. Ce point de rupture d'avec des théories plus ou moins idéalistes des mathématiques, véhiculées par la doxa et certains cercles qui réfléchissent sur les mathématiques et leur enseignement, ouvre la voie à un tout autre type d'étude des mathématiques prises elles-mêmes comme objet d'étude, et permet de fonder sur des bases solides l'étude de l'étude des mathématiques. En tout état de cause, en nous démarquant de ces approches et en nous plaçant du point de vue de l'approche anthropologique en didactique, c'est vers une définition de la mémoire sémantique différente de celle des psychologues de la mémoire que nous nous dirigeons, si tant est que ce terme de « sémantique » soit à conserver.

En effet, l'adoption de ce point de vue, qui porte sur le travail mathématique mené, induit un certain nombre de conséquences sur les modalités de ces recherches. Il ne peut s'agir en effet, tant pour ce qui concerne le travail mathématique proprement dit (et tel qu'il se mène dans les classes de mathématiques), que du point de vue d'un travail de recherche sur la mémoire des mathématiques, de faire apprendre, par exemple, des listes de mots mathématiques (mémoire lexicale), de figures géométriques (mémoire visuelle et mémoire imagée), voire même d'idées

[22] Métaphore utilisée par beaucoup et en particulier par le neurobiologiste J-P. Changeux qui ne craint pas d'y recourir, et d'affaiblir ainsi la pertinence de son propos pour réfuter une certaine vision platonicienne des mathématiques défendue par le mathématicien A. Connes : « Tu conviens que les mathématiques constituent un langage, et qu'il existe plusieurs langages élémentaires… Peut-être les mathématiques constituent-elles la synthèse épurée de tous ces langages, une sorte de langage universel… Personne n'imagine que le chinois ou le russe ont existé avant l'homme dans l'univers. Alors, pourquoi cette hypothèse avec les mathématiques ? » in *Matière à pensée* p. 39.
[23] Nous proposons la traduction suivante : « Le calcul algébrique serait donc un langage particulier, avec ses lois de formation des expressions (sa syntaxe), dont l'unique fonction consisterait à exprimer une réalité transcendante et irréductible à ce langage même. Nous avons ici le point de départ des problématiques du langage comme *représentation ou expression d'un autre monde* –le monde de "la pensée" ou du "sens". Ces problématiques entrent en consonance avec l'idéalisme culturel courant : derrière le symbole (ou le mot, ou le graphisme), on recherchera le "concept", l'idéalité mathématique. »

où concepts mathématiques[24] (mémoire sémantique), cette dernière catégorie de concept restant par ailleurs à définir (qu'est-ce que le « concept d'exponentielle », par exemple ?), puis d'évaluer lors de rappels, le nombre, la nature et la qualité des souvenirs restitués. Un tel travail de recherche, tel qu'il se mène couramment dans certains travaux sur la mémoire, manquerait ici son objet d'étude. En effet, les élèves des classes ordinaires de mathématiques savent, en général, désigner par l'utilisation d'un lexique convenable les mathématiques qu'ils étudient ; tout comme les élèves questionnés dans ces exemples savent désigner les mathématiques sur lesquelles porte le sujet de l'interrogation : exponentielle, dérivée, limite, courbe, variations, signe, asymptote… Et il serait tout à fait injuste et erroné de penser que, dans les exemples cités, ces élèves qui sont réputés être les meilleurs en mathématiques à ce niveau du cursus scolaire, n'ont pas d'idées sur ce que ces mots recouvrent, sur leur « sens ».

1. 4. 3. 2. Confrontation de quelques éléments de théories de la mémoire et de la théorie des situations didactiques

Comme son nom l'indique, la « théorie des situations » s'attache à l'analyse, la théorisation et la production de situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Reprenant dans sa thèse d'État, un cours sur l'ingénierie didactique donné à l'École d'été de didactique des mathématiques de 1982, Brousseau (1986a) donne la définition suivante d'une situation didactique :

> « Une situation didactique est un ensemble de rapports établis explicitement et/ou implicitement entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu (comprenant éventuellement des instruments ou des objets) et un système éducatif (le professeur) aux fins de faire approprier à ses élèves un savoir constitué ou en voie de constitution. » p 399

Un des objets de la thèse d'État de G. Brousseau (1986a) est la modélisation des situations didactiques. Celle-ci est réalisée à l'aide de la théorie des jeux :

> « Modéliser une situation d'enseignement consiste à produire un jeu spécifique du savoir visé, entre les sous-systèmes : le système éducatif, le système élève, le milieu… etc. Il ne s'agit pas de décrire précisément ces sous-systèmes autrement que par les relations qu'ils entretiennent dans le jeu. » p 326

Et, la modélisation exposée par Brousseau (1990) fait intervenir les connaissances :

> « Les *connaissances* du joueur apparaissent, dans les stratégies et dans les changements de stratégies, comme des moyens de gagner des parties ou d'en améliorer l'issue. […] Une *situation* est une association "interaction Jeu - Joueur, Connaissance" $S(I_t(X,J),C)$. La relation de X avec la connaissance C à l'instant t est donc appréhendée par l'intermédiaire d'une fonction de C dans le jeu J. » pp. 314-315.

Mercier (1996), quant à lui, donne une définition qui nous semble plus explicite d'une situation didactique :

---

[24] Nous définirons plus précisément, dans la suite de ce travail, les objets mathématiques. Nous les désignons pour l'instant à l'aide de qualificatifs courants, tels qu'on peut les trouver dans le langage ou la littérature non spécialisée.

« Les mathématiques que les élèves forment dans une institution didactique y sont considérées comme l'effet d'une *situation didactique*. C'est-à-dire, que ces mathématiques trouvent leur origine dans la présentation, par l'enseignant, d'une suite de tâches faisant problème, pour que les enseignés y trouvent matière à connaître des mathématiques. Chacun des objets mathématiques produits peut être décrit comme le compte-rendu de la stratégie la plus économique pour réaliser une tâche, du point de vue de la société des élèves. Selon Brousseau, la connaissance socialement stable associée à une situation didactique peut donc être prévue par l'étude du coût des différentes stratégies permettant de réussir la suite des tâches demandées. Je rappelle ici que le coût d'une stratégie s'analyse en un coût à l'apprentissage et un coût à l'emploi […] Lorsqu'il propose une tâche, l'enseignant pose en effet une injonction d'agir et l'on peut observer que si la situation satisfait aux conditions que montre l'analyse a priori du coût des stratégies possibles et si les élèves de la classe développent une stratégie d'action (s'ils apprennent effectivement), la connaissance collective que les élèves produisent est la connaissance prévue. » pp. 1-2.

Cette théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques, sous forme de « situations » qui se distinguent en deux grandes classes, celle des situations a-didactiques et celle des situations didactiques, nous permet de revisiter le concept de mémoire épisodique et de revenir, par une autre entrée, sur « la question du sens » et de la mémoire sémantique. D'après Lieury (1996), cette mémoire épisodique, qui ne serait qu'une partie de la mémoire sémantique, est présentée ainsi :

« Le canadien Endel Tulving (1972) a fait l'hypothèse que chaque information, mot, visage…, était enregistré en mémoire comme un épisode spécifique de la situation d'origine. Par exemple, si je lis le mot *bateau* dans une brochure de voyage, le mot bateau sera à nouveau enregistré, bien que je le connaisse déjà, mais il sera enregistré dans son contexte spécifique, par exemple avec d'autres mots de la brochure, les mots *voyage*, *vacances*, etc. Ainsi, chaque fois que je lis un mot, que je l'entends, il se forme un épisode nouveau et original en mémoire. C'est la théorie de la mémoire épisodique. » p. 72.

Or, dans tout processus d'enseignement, d'apprentissage, d'étude des mathématiques, nombreux sont les épisodes, ou les occurrences, au cours desquels un ou des élèves ont la possibilité de rencontrer une même notion. Ces épisodes sont, si l'on suit la théorie des situations, autant d'occasions pour l'élève de construire des connaissances ou des savoirs sur la notion. Ces deux derniers termes sont clairement définis en théorie des situations par Brousseau et Centeno (1991) :

« Les connaissances sont les moyens transmissibles (par imitation, initiation, communication, etc.) mais non nécessairement explicitables, de contrôler une situation et d'y obtenir un certain résultat conformément à une attente ou à une exigence sociale. La connaissance – ou la reconnaissance – n'est pas analysée mais exigée comme une performance relevant de la responsabilité de l'acteur.
Le savoir est le produit culturel d'une institution qui a pour objet de repérer, d'analyser et d'organiser les connaissances afin de faciliter leur communication, leur usage sous forme de connaissance ou de savoir, et la production de nouveaux savoirs. La manipulation sociale des savoirs dans les relations sociales exige des connaissances personnelles de la part de l'acteur, mais le produit de cette activité est une explicitation de certaines connaissances devenues publiques, puis institutionnelles. La référence culturelle et l'analyse de l'usage qui sera fait de ces connaissances les constituent en savoirs culturels. […] La même notion fonctionnera comme connaissance dans une situation d'action et comme savoir dans le discours de l'institution. »

Ainsi, selon le type de situation, peuvent émerger des connaissances privées ou des savoirs publics ; l'une et l'autre étant respectivement attribuées à la personne ou à l'institution. Aussi, si nous avions à conserver le terme de mémoire épisodique pour l'analyse de la mémoire à mobiliser dans l'étude des mathématiques, il faudrait alors affiner le concept. Outre le fait, déjà mentionné, que cette mémoire est aussi relative aux actions accomplies sur l'objet présent dans la situation construite pour son enseignement - donc qu'il s'agit aussi d'une mémoire procédurale, et que l'utilité de les distinguer n'est pas ici pertinente -, il serait de surcroît nécessaire de la considérer comme clivée en deux. D'une part, une mémoire épisodique privée qui porte sur des connaissances propres au sujet de l'institution, et d'autre part, une mémoire épisodique publique qui porte sur des savoirs reconnus comme tels par l'institution qui a organisé pour eux un certain type de situations. L'élève, en tant que personne, devrait, de ce point de vue, faire appel à des souvenirs qui portent sur les deux types de mémoires épisodiques, mais ne devrait montrer publiquement, à l'intérieur de l'institution, que ceux qui portent sur le second type. Et en bonne logique, l'institution ne devrait faire appel, inversement, qu'à ce second type de mémoire.

Mais peut-on raisonnablement envisager le souvenir de toutes les occurrences au cours desquelles un élève, ou plus simplement une personne qui s'applique à l'activité mathématique, rencontre une notion mathématique ? Le temps didactique, celui qui résulte de la mise dans un programme d'étude des mathématiques que l'on enseigne, défile à une vitesse très rapide lorsqu'on le réfère, par comparaison, à d'autres temps institutionnels (nous aurons l'occasion de revenir sur ce point) par le nombre d'occurrences à rencontrer. L'élève se souvient-il ou oublie-t-il ces rencontres, et si oui lesquelles ?
Le rôle de l'enseignant est aussi, selon la théorie des situations, de transformer des connaissances issues de certaines situations en savoirs, lors de la fréquentation d'autres types de situations. Comment s'opère l'oubli et le souvenir des unes et des autres ?
De tout cela, la théorie de la mémoire épisodique ne dit rien, si ce n'est, comme le souligne Lieury, que ces épisodes vont enrichir le sens donné à l'objet rencontré.

DEUXIÈME PARTIE

UN CADRE THEORIQUE POUR LA MÉMOIRE DIDACTIQUE, L'ANTHROPOLOGIE DES SAVOIRS

Présentation de la deuxième partie

Après avoir mis en doute - aussi bien grâce à l'analyse d'un échantillon de données empiriques, qu'à partir des théories didactiques permettant d'analyser l'étude des mathématiques - la pertinence apportée par certaines des théories de la mémoire pour rendre compte de la mémoire dans l'étude des mathématiques, il est maintenant nécessaire, afin de pouvoir poursuivre notre projet, de définir un cadre théorique explicatif des phénomènes observés. Cette partie de la thèse est consacrée à cette élaboration.
À l'intérieur du corps du texte, nous avons alors recours à de nombreuses citations d'auteurs, ainsi qu'à des comptes-rendus d'observations empiriques. Ce style peut paraître alourdir le propos tenu et sa lecture, mais notre objectif n'étant nullement de vouloir faire œuvre littéraire, il nous a paru nécessaire de conserver citations et extraits d'observations. Ils montrent en effet, d'une part et de manière explicite, quelles sont les sources utilisées et dans quelle mesure certains éléments théoriques cités sont repris, et d'autre part, comment le cadre théorique construit résulte de la dialectique d'un corpus de données empiriques et d'éléments pris dans les domaines de savoir utilisés. La méthode qui aurait consisté à donner formellement ce cadre, sans plus d'explications, s'apparente à une axiomatique présentée *a posteriori*, excluant alors la confrontation expérimentale d'avec la réalité dont les axiomes sont issus, et dont ils constituent pourtant une certaine cristallisation ; elle ne nous paraît pas satisfaisante pour l'exposé de ce type de travail.

Nous replaçons tout d'abord l'étude des mathématiques, et donc de la mémoire qui lui est attachée, dans le cadre institutionnel de sa pratique : l'École, la classe et les dispositifs qui lui sont annexés. Il est alors nécessaire de préciser, pour en tenir compte, certaines des contraintes qui pèsent sur leurs sujets, élèves et professeurs, ainsi que certains phénomènes institutionnels relatifs à la cognition. Ils sont appréhendés, tout au long de cette partie, en nous plaçant au sein d'une approche anthropologique des savoirs. Nous construisons, à partir d'elle, un modèle didactique de la mémoire se déclinant selon trois instances, et dont nous montrons l'existence et la fonctionnalité pour les pratiques relevant aussi bien de l'apprentissage, que de l'enseignement et enfin du savoir mathématique.
Nous fournissons, au passage, une explication de l'exemple *princeps* (le cas de Sarah) qui nous a servi de fil directeur jusqu'alors.

Cette partie se conclut par une reprise rapide de trois travaux de didactique des mathématiques, exposés dans des thèses, et à l'intérieur desquels se retrouve la problématique de la mémoire. Ils nous fournissent l'occasion d'une nouvelle interprétation, à partir de l'utilisation du modèle que nous avons élaboré. Ils permettent aussi d'en tester la pertinence sur des analyses et des observations extérieures aux nôtres.

2. 1. La question de la mémoire confrontée avec le problème de l'étude scolaire des mathématiques

2. 1. 1. Place de la mémoire dans les processus cognitifs

Comme nous l'évoquions en introduction, celui qui s'intéresse aux processus d'enseignement, d'apprentissage, de développement, touchant ainsi aux processus cognitifs, rencontre bien souvent, tôt ou tard, la question de la mémoire. Mais il serait faux de penser qu'il en fut toujours ainsi, comme le note Tiberghien (1994) :

> « Pendant des siècles, philosophes, puis psychologues et neurophysiologistes ont opposé mémoire et intelligence. En fait, la mémoire fut très tôt réduite à une simple prothèse de la rhétorique, à un ensemble disparate de techniques, à une "mnémotechnique". Il a fallu attendre le développement des sciences cognitives, de l'informatique, et de l'intelligence artificielle, pour que la mémoire retrouve une place théorique importante en psychologie. »

Aussi Florès (1972) pouvait-il conclure son ouvrage consacré à la mémoire en célébrant sa « réintégration » dans les processus cognitifs :

> « Enfin l'intégration délibérée de la mémoire au sein des processus cognitifs lui rend sa dignité, qui est celle de la connaissance du passé, et non de la simple répétition de l'acquis. Elle contribue à la sortir de la tour d'ivoire dans laquelle elle semblait isolée des plus hautes démarches de l'esprit. » p. 127.

Si l'on considère que l'étude des disciplines, telle qu'elle est proposée à travers la fréquentation des systèmes éducatifs, et à laquelle s'adonnent des centaines de millions d'élèves dans l'ensemble des pays développés, fait partie des « plus hautes démarches de l'esprit » au sein des « processus cognitifs » dans lesquels s'engagent les hommes,[25] alors il est légitime de se consacrer à l'étude de la mémoire liée aux phénomènes d'apprentissage scolaire.

---

[25] Ces formulations permettent, comme on le voit, de contourner le mot "intelligence" qui suscite souvent la méfiance. Remarquons que certains, et non des moindres, notamment Piaget, n'hésitent pas à en donner une définition : « L'intelligence constitue l'état d'équilibre vers lequel tendent toutes les adaptations successives d'ordre sensori-moteur et cognitif, ainsi que tous les échanges assimilateurs et accommodateurs entre l'organisme et le milieu ». Piaget précise ses fonctions qui « consistent à comprendre et à inventer autrement dit à construire des structures en structurant le réel » (citations extraites de Lerbet 1973). Piaget et Inhelder (1968) concluent leur ouvrage consacré à la mémoire de la manière suivante : « Au total, cette discussion finale sur l'unité fonctionnelle des diverses formes de souvenirs, si comparable à celle de l'intelligence en ses divers stades, montre une fois de plus la solidarité fondamentale et même la communauté de nature de la mémoire et de l'intelligence, puisqu'il s'agit en fait des mêmes stades et que l'évolution du "code" de la mémoire est directement fonction de la construction des structures opératoires. Tout cela allait d'ailleurs de soi mais il valait la peine de le confirmer par une analyse génétique un peu détaillée, quoique en chaque secteur encore beaucoup trop sommaire. » p. 482

En ce qui concerne l'étude des mathématiques, une rapide analyse s'appuyant sur le modèle du système didactique, montre qu'on rencontre la question de la mémoire, du rappel et de l'oubli, en chacun de ses trois pôles ou sous-systèmes :
- le pôle du savoir, en tant que mémoire d'expériences, de problématiques et de pratiques collectives comme réponses à des questions[26] cristallisées sous forme de théories pour ce qui concerne le savoir savant d'une part ; ou important la mémoire des choix, des débats, des rapports de force, des idéologies qui ont agité la noosphère[27] pour ce qui concerne le savoir à enseigner d'autre part, et ceci bien avant sa venue dans la classe
- le pôle de l'enseignant[28] qui, continuant la transposition didactique dans la préparation de son cours, utilisera sa propre épistémologie des savoirs, c'est-à-dire la mémoire des rapports qu'il nourrit avec les savoirs et la place relative qu'il attribue à ce qu'il va enseigner dans l'ensemble de ce que les élèves auront à étudier, qui utilisera de même la mémoire qu'il a des difficultés rencontrées dans les apprentissages précédents par les élèves etc..., et qui, lorsqu'il enseignera en classe, va utiliser la mémoire des savoirs ou connaissances qu'il pense pouvoir attendre des élèves en tant que membres du groupe - classe
- le pôle du ou des élèves dont la mémoire des connaissances et savoirs anciens sera directement sollicitée par le professeur lors du cours en classe, dont la mémoire de ce qui vient d'être enseigné sera nécessaire lors de l'engagement dans les activités qui lui sont demandées (un exercice, un contrôle) ; il est raisonnable d'estimer que le déroulement du texte du savoir le long du fil du temps didactique laisse une trace mnémonique, l'éventualité inverse condamnerait par avance à l'échec toute intention didactique ![29]

2. 1. 2. Limites de l'approche psychologique de la mémoire pour la didactique des mathématiques

Or la question de la mémoire est un domaine de l'étude des systèmes d'enseignement et d'apprentissage des savoirs qui a été relativement peu exploré. La raison réside peut-être dans la multiplicité d'approches qui cernent son étude, comme nous avons eu l'occasion de le montrer, et dans les changements d'orientation à l'intérieur d'une approche donnée au cours de ces vingt dernières années. La littérature fournit, par ailleurs, différentes définitions de la mémoire, selon le champ scientifique à l'intérieur duquel on se place, chacune de ces

---

[26] Sur ce point, on peut se reporter à Chevallard (1996) : « J'appelle œuvre toute production humaine *O* permettant d'apporter réponse à un ou des types de questions *Q*, questions "théoriques" ou "pratiques", qui sont les *raisons d'être* de l'œuvre – et cela sans considération de la " taille" de l'œuvre […]. »
[27] La noosphère est le terme parodique par lequel Chevallard (1985) désigne le « *sas* par lequel s'opère l'interaction entre ce système [d'enseignement] et l'environnement sociétal ».
[28] C'est l'objet du travail de J. Centeno, dont la thèse posthume (1995) constitue l'œuvre majeure.
[29] On peut, de façon métaphorique, rapprocher cette rapide description de l'analyse que donne, de façon très détaillée, Halbwachs (1939 ; 1997) dans « La mémoire collective chez les musiciens » où « la partition joue donc ici exactement le rôle de substitut matériel du cerveau ». C'est ce savoir qui crée le musicien, « […] c'est ce langage qui crée la musique. Sans lui il n'y aurait pas de société de musiciens, […] », mais « Pour apprendre à exécuter, ou à déchiffrer, ou, même lorsqu'ils entendent seulement, à reconnaître et distinguer les sons, leur valeur et leurs intervalles, les musiciens ont besoin d'évoquer une quantité de souvenirs. » Or, « Soit qu'on déchiffre, soit qu'on exécute, il ne suffit pas de comprendre les signes : un artiste les interprète à sa manière, en s'inspirant de ses dispositions affectives du moment, ou de tout le temps. » Dès lors « Où le trouver [« le sentiment musical »], si ce n'est au cœur du groupe ? »

définitions se décomposant souvent elles-mêmes, comme l'on sait, en différents sous-types. Aussi, si Florès (1972) indiquait la direction qui allait être prise par les recherches sur la mémoire, celle des processus cognitifs, son contenu daté (les années 1970) et local (la psychologie) souffre d'une certaine obsolescence, et paraît insuffisant lorsqu'il ne s'agit plus d'étudier le « sujet épistémique », mais des élèves chargés par une institution - l'École qui relaie ainsi une volonté sociale - d'étudier un savoir donné, les mathématiques.

Sur ce point, nous pouvons reprendre les critiques adressées à Piaget par Vergnaud (1981), même si Vergnaud reconnaissait à l'époque que l'approche de Piaget demeurait « décisive » :

> « 1. Jean Piaget s'est désintéressé de l'acquisition des connaissances scolaires. Il a plutôt cherché à caractériser le développement des instruments généraux de pensée, qui lui apparaissent relativement indépendants des connaissances scolaires.
> 2. Jean Piaget s'est intéressé davantage aux structures pouvant caractériser un stade donné de développement qu'à l'évolution adaptative des connaissances dans une situation ou un ensemble de situations où elles sont fonctionnelles.
> 3. Jean Piaget a séparé d'une manière exagérée la connaissance mathématique et la connaissance de la réalité physique. Je pense notamment à ce qu'il a écrit à plusieurs reprises sur l'abstraction simple et l'abstraction réfléchissante, la première portant surtout selon lui sur les propriétés des objets et étant constitutive de la physique, la seconde portant sur l'action du sujet sur les objets et étant spécifiquement mathématique.
> 4. Jean Piaget a privilégié les opérations et les structures logiques et contribué ainsi à minimiser les contenus de connaissance, que ces contenus relèvent de la physique ou des mathématiques. »

Pour sa part, Mercier (1996) explique pourquoi l'entreprise qui consiste à étudier « en laboratoire » le « sujet épistémique » est vaine pour comprendre l'apprentissage scolaire :

> « Le professeur organise le passage, d'une situation où les élèves pouvaient économiser leur pensée (ils menaient par exemple une action par essais et erreurs) à une situation où l'économie de l'action supposera une pensée plus développée, en jouant sur une *variable didactique de la situation.* […]. [Les élèves peuvent apprendre] d'autant plus rapidement qu'ils font confiance à la situation parce qu'ils savent, d'expérience, le bénéfice que leur procureront les savoirs nouveaux : le succès des situations didactiques tient pour une part essentielle au *contrat didactique*, qui permet aux élèves d'interpréter l'intentionnalité dont les situations sont porteuses pour identifier les mathématiques qui leur sont enseignées. C'est pourquoi les études de laboratoire ne rendent pas compte des apprentissages scolaires : la cause de ces apprentissages est la situation, intentionnellement proposée, dans laquelle ils économisent l'effort demandé. »

Les approches expérimentalistes, de laboratoire, parce qu'elles veulent rechercher l'expression d'un cognitif pur dégagé de la contrainte d'une expression en terme de savoir, donc de production sociale, chez un sujet épistémique générique, représentant l'espèce dans sa définition génétique, dégagé des effets de contexte, ne sauraient donc saisir toutes les dimensions liées à ce qui relève du social dans l'étude des mathématiques.
Ce « social » est d'ailleurs contenu dans les deux substantifs accolés que nous avons utilisés : étude et mathématiques. Il participe de la construction de « l'être humain générique » sur lequel nous voulons faire porter ce travail : l'élève en mathématiques. Si la reconnaissance du caractère social des œuvres mathématiques est généralement partagée, le terme d'étude renvoie quant à lui à la personne tout autant qu'au groupe. Car, en nos sociétés, cette étude est le plus souvent socialement organisée - même si la nécessité d'une dimension personnelle continue d'être reconnue - à travers l'École bien sûr, mais aussi par le moyen de dispositifs qui lui sont annexés : études dirigées, cours particuliers ou collectifs de rattrapage ou de

soutien, aide aux devoirs, etc. Il est donc nécessaire de se pencher sur ce caractère « doublement social » de l'étude des mathématiques afin de comprendre à quel type de contraintes il répond.

2. 1. 3. La spécificité des « savoirs hautement techniques »

Cela peut paraître, à première vue, un truisme que de rappeler que l'apprentissage des mathématiques s'opère, dans les sociétés modernes, à l'intérieur de structures sociales qui ont été spécifiquement conçues à cet effet : le système éducatif, l'École. Obligatoire, publique, gratuite et laïque pour ce qui concerne la France par exemple, pourrait-on rajouter ; ces quatre adjectifs indiquant, au passage, la puissance de la volonté sociale nécessaire à la création et au maintien d'une telle institution. Cependant, l'évidence tombe lorsqu'on se souvient qu'il n'en fut pas toujours ainsi à l'échelle historique, ou que certains apprentissages échappent à l'institution scolaire, soit parce que de nature auto-didactique (c'est-à-dire que l'intention de s'enseigner est portée par soi-même, et non par une institution à laquelle il y a obligation de s'assujettir et dont la fonction sociale est d'enseigner à ses sujets), soit parce que ces apprentissages sont pris en charge par d'autres institutions sociales telle la famille par exemple (apprendre à parler, être propre, ainsi que toute une série de comportements sociaux, de rites, relatifs à l'entrée en rapport avec autrui, etc). Certains apprentissages paraissent moins visibles, bien qu'étant eux aussi assumés à l'intérieur de groupes sociaux plus ou moins informels. Ainsi, tel joueur de football sud-américain aura-t-il appris ce sport « dans la rue », au contact d'autres enfants, tel adolescent aura-t-il « appris l'informatique » à travers sa participation au groupe fluctuant des copains de son âge avec qui, hors temps scolaire, il échangera discussions, logiciels, revues, etc.

Johsua (1998) fournit un modèle explicatif, en terme de « savoirs », de ces différents « lieux » sociaux d'apprentissage :

> [Certains savoirs] « ne requièrent pas (ou peu) de moments repérables *d'étude* distincts et systématiques. C'est le règne de *l'imprégnation*, *du frayage*, des "apprentissages silencieux", pilotés par "… les innombrables leçons, souvent tacites et quasi imperceptibles, de l'existence quotidienne, insinuations, reproches, silences, évitements" (Bourdieu, 1994). […] J'appellerai ainsi en contrepoint des "savoirs techniques" l'ensemble des cibles d'apprentissage repérables qui nécessitent une *étude* systématique en vue de leur maîtrise. […] Enfin, je distingue finalement parmi les "savoirs techniques" ceux dont les *conditions d'étude sont disposées dans l'environnement* et ceux, beaucoup moins nombreux à chaque étape historique, qui nécessitent pour ce faire des dispositifs intentionnels, séparés en général de l'environnement courant, et dont l'exemple est celui des écoles. Je conviens de nommer ces cibles redevables d'institutions spécialisées des "savoirs hautement techniques". »

À l'évidence, personne ne pouvant sérieusement soutenir que les mathématiques, ne nécessitent pas « des moments repérables d'étude distincts et systématiques », ou que leurs « conditions d'étude sont disposées » naturellement « dans l'environnement » social, c'est, selon cette catégorisation, dans le cadre des « savoirs hautement techniques » qu'il faut les ranger. Les institutions spécialisées pour ce type de savoirs, les écoles, fournissent alors « une *aide à l'étude* [… qui] va de pair avec un apprêt de ces savoirs, une transposition didactique » (Johsua 1998).

2. 1. 4. « Savoirs hautement techniques » et approches psychologique et sociologique de la mémoire

La catégorisation ici exposée permet, nous semble-t-il, de comprendre une partie des critiques adressées, depuis la didactique, à la psychologie cognitive sous sa forme piagétienne et à une sociologie de la connaissance seulement centrée sur les grandes catégories sociales de la pensée et les grandes institutions. À la psychologie, le reproche de ne pas distinguer les différents types de savoirs, et partant, ni leurs différents modes spécifiques d'enseignement et d'apprentissage (d'étude), ni les différentes institutions à l'intérieur desquelles « le sujet » s'adonne à l'étude. À la sociologie, le reproche de n'étudier que les extrêmes du classement opérés précédemment : d'une part des institutions « disposées dans l'environnement » et à l'intérieur desquelles l'apprentissage s'opère sous la forme d'habitus incorporés, ou d'autre part de n'étudier que les relations de l'institution « École » avec d'autres institutions sociales. Ainsi en appellera-t-on, par exemple, à une « pédagogie rationnelle » qui compenserait les inégalités sociales devant l'École, mais sans essayer de la définir autrement que par la négation de ce que l'on ne veut plus voir ; ce qui conduit les sociologues auteurs des *Héritiers* (1964)[30] à écrire :

> « En l'état actuel de la société et des traditions pédagogiques, la transmission des techniques et des habitudes de pensées exigées par l'École revient primordialement au milieu familial. Toute démocratisation réelle suppose donc qu'on les enseigne là où les plus défavorisés peuvent les acquérir, c'est-à-dire à l'École ; que l'on élargisse le domaine de ce qui peut être rationnellement et techniquement acquis par un apprentissage méthodique aux dépens de ce qui est abandonné irréductiblement au hasard des talents individuels, c'est-à-dire en fait, à la logique des privilèges sociaux ; que l'on monnaye sous forme d'apprentissages méthodiques les dons totaux et infrangibles de l'idéologie charismatique. […] Une pédagogie réellement rationnelle devrait se fonder sur l'analyse des coûts relatifs des différentes formes d'enseignement (cours, travaux pratiques, séminaires, groupes de travail) et des divers types d'action pédagogique du professeur (depuis le simple conseil technique jusqu'à la direction effective des travaux d'étudiants) ; elle devrait prendre en compte le contenu de l'enseignement ou les fins professionnelles de la formation […] »

Aussi, n'ayant pu faire l'analyse des formes scolaires de l'apprentissage d'un « savoir hautement technique », on ne peut définir, de manière fonctionnelle, ce que serait cette « pédagogie rationnelle » ; à moins de considérer qu'on a là une définition possible de trois directions d'études qu'il faudra attendre des sciences de l'éducation.

2. 1. 5. Préalable à la construction d'un modèle de la mémoire didactique

La multiplicité des champs théoriques et « l'instabilité » des orientations et des résultats obtenus rendent *a priori* périlleuse et fragile toute volonté d'étudier le rôle de la mémoire dans les apprentissages scolaires. Volonté qui suppose au préalable, à moins de verser dans un

[30] Cité par Accordo A. et Corcuff P. (1986) p. 46

empirisme stérile, tout à la fois le choix d'une approche, de plusieurs, ou de toutes (ce qui constitue aussi un choix), ainsi que des résultats sur lesquels s'appuyer à l'intérieur du champ théorique choisi.

Du point de vue qui sera le nôtre dans ce travail, celui de la didactique des mathématiques, les travaux sont peu nombreux et essentiellement relatifs à la mémoire didactique de l'enseignant, même si certains se sont attachés à analyser des situations[31], ou à créer des dispositifs[32], pour faire dévolution à l'élève d'une partie de la mémoire portée par le système enseignant, et faciliter ainsi l'apprentissage. À la difficulté signalée plus haut de la pluralité des approches et de la fragilité des résultats, s'en ajoute une autre relative à la « jeunesse » de la didactique des mathématiques : une vingtaine d'années environ. Cependant, le travail qui sera tenté ici repose sur un pari : celui que l'arrivée dans l'âge adulte de ce domaine des sciences de l'éducation, s'accompagne d'une maturité théorique suffisante pour pouvoir verser sa contribution, au moyen de connaissances nouvelles, à l'étude de la mémoire dans les apprentissages spécifiques du savoir mathématique.

Deux « entrées » traditionnelles en sciences de l'éducation, celle de la psychologie et celle de la sociologie, pourraient *a priori* être retenues pour cerner le problème théorique ici posé. Plusieurs objections peuvent être adressées à ce choix :
- Ce choix est, comme tout choix, réducteur. Mais il est imposé par la nécessité de construire un modèle. Un des critères sur lesquels s'appuyer pour l'évaluer est, en dernière instance, sa capacité à fournir des connaissances sur l'objet étudié
- Ce choix importe, voire « dérobe », des concepts et des problématiques externes au domaine que l'on veut étudier. Mais les deux disciplines retenues, la psychologie et la sociologie, ne se sont pas privées d'en faire tout autant avec d'autres disciplines académiques : mathématiques, linguistique, … sans oublier « l'ancêtre commun » duquel elles descendent, et auquel elles ont régulièrement recours, la philosophie. Aucune construction scientifique n'échappe au jugement de Bachelard (1938) : « L'esprit scientifique doit se former en se réformant » p. 23.
- Ce choix est arbitraire. Mais l'expérience pratique des modèles de l'enseignement et de l'apprentissage nous montre qu'ils importent régulièrement des concepts venus de ces disciplines. Or l'expérience pratique est souvent le point de départ de théorisations qui occupent plus ou moins de temps à l'échelle de l'histoire de l'humanité : que l'on songe simplement qu'il a fallu environ 30 000 ans d'expérience pratique aux hommes pour « théoriser » les nombres entiers dits « naturels »[33]. Aussi, nous référant de nouveau à Bachelard, nous pouvons faire nôtre cette sentence : « À notre avis, il faut accepter, pour l'épistémologie, le postulat suivant : l'objet ne saurait être désigné comme un "objectif" immédiat ; autrement dit, une marche vers l'objet n'est pas initialement objective » p. 239.

[31] C'est le travail de M.-J. Perrin-Glorian à partir de sa thèse d'État (1992) dans laquelle elle introduit le concept de « situations de rappel » p. 395.
[32] C'est l'objet de la thèse de G. Sensevy (1994)
[33] Des os entaillés datant du Paléolithique (plus précisément d'environ 30000 ans) attestent de préoccupations liées à la nécessité de conserver la mémoire de collections dénombrées (d'après D. Guedj, 1996), et l'axiomatisation des nombres entiers naturels a été réalisée par Peano en 1889.

2. 1. 5. 1. L'apport anthropologique comme réponse aux déficits des approches psychologiques et sociologiques

Passeron (1991) utilise un schéma qui va d'un point A en un point B, pour matérialiser :

> « […] par un déplacement de A vers B le trajet d'un élève ou d'un public A transformant conformément à un programme d'apprentissage sa compétence cognitive ainsi que la mémoire spécifique associée à cette compétence afin de maîtriser plus complètement l'état d'un savoir B […] p. 350.

Il situe la didactique notée B_1, et partie du savoir B, comme devant avoir commerce avec les savoirs A, se rapportant aux « *sujets (élèves ou publics)* » et que nous pourrions rapidement qualifier de sciences humaines, et notamment, dans ces savoirs A, avec A_1 (sciences cognitives) et A_2 (sciences sociales)[34].
Ceci le conduit à donner une définition de ce qui est « didactique » :

> « Disons "didactique", pour isoler des autres savoirs de B un savoir particulier B_1, lorsque, parmi toutes les structurations possibles d'un savoir scientifique, on vise à déterminer la structure dont se déduirait la gradation la plus efficace d'un enseignement capable de produire en acte chez A ce qu'est virtuellement en B la compétence définissant la discipline concernée. » p. 352.

et à préciser :

> « On voit qu'une didactique de discipline ne peut, pour déterminer l'ordre qui fait sa raison d'être, ignorer, outre les savoirs de B (B_2, B_3, etc.), les connaissances de type A_1 et A_2 : il n'y a pas de didactique en soi, des mathématiques par exemple, valable pour tous publics y compris les extra-terrestres (même s'ils avaient la même mathématique que nous). Didactique est donc une recherche qui soumet un savoir donné à un traitement particulier déterminé par une fin particulière, à savoir la transmission de ce savoir dans des conditions historiques, sociales et psychologiques qui sont toujours particulières. » pp. 352-353.

Si la définition de ce qui est didactique, que donne Passeron (1991), se rapporte déjà à un objectif visé, la transmission d'un savoir dans des conditions historiques, psychologiques et sociales données, nous utilisons quant à nous le terme dans le sens qui est communément admis dans la communauté des chercheurs en didactique : l'étude de ce qui est didactique au sens de Passeron. Cette précision étant faite, c'est dans cet espace relatif aux sciences de l'homme et aux sciences en tant que productions culturelles et sociales - et c'est particulièrement le cas des mathématiques -, ainsi qu'à leurs interactions, que nous définirons notre travail. Faisant de nouveau appel à Passeron (1991), il est bon de rappeler que ce positionnement n'invalide en rien la possibilité de faire alors œuvre scientifique, car l'histoire des sciences peut confirmer « *[...] qu'une science à mi-chemin entre deux démarches scientifiques n'est pas une science à mi-chemin de la science.* » Ce positionnement peut être précisé en adoptant une définition anglo-saxonne de l'anthropologie, due à A. Kroeber (1948) et citée par Passeron (1991), qui la qualifie de « science des groupements humains, de leur culture et de leur histoire, indépendamment du degré de développement de ces groupes ».

---

[34] « On voit qu'une didactique de discipline ne peut, pour déterminer l'ordre qui fait sa raison d'être, ignorer, outre les autres savoirs de B (B_2, B_3, etc.), les connaissances de type A_1 et A_2 : il n'y a pas de didactique en soi, des mathématiques par exemple, valable pour tous publics y compris les extra-terrestres (même s'ils avaient la même mathématique que nous) ». p. 354.

Précisons les raisons de ce positionnement. Nous pourrions dire, de manière brutale, que nous nous situons dans le cadre défini pour la didactique par Passeron, spécialiste des sciences humaines, et en rester là en faisant valoir l'argument d'autorité. Cependant, nous voudrions montrer que ce choix est motivé par les développements que nous avons conduits à partir de l'étude des exemples précédents, en confrontant les données empiriques qui les constituent, et relevées sur le terrain, avec ce que pourrait nous en apprendre leur interaction avec les deux disciplines qu'évoque Passeron sous les désignations A_1 et A_2 : les sciences cognitives et les sciences sociales.
En effet, arrivés au point en lequel nous a mené cette confrontation, l'étude précédente des exemples sur lesquels nous nous appuyions, a été l'occasion de rencontrer les déficits des deux approches usuellement retenues pour tenter de cerner l'objet de notre étude.
Du côté de la psychologie, un foisonnement impraticable d'approches de la mémoire, le choix de la considérer spécifique à un sujet de laboratoire, et relative à la reconnaissance d'objets qui ne sont pas objets de savoir : finalement une mémoire vue comme propriété d'un sujet cognitif pur en lequel nous ne parvenons pas à reconnaître un élève étudiant les mathématiques.
Du côté de la sociologie, une tendance à se limiter à l'étude de la fonction sociale de l'institution scolaire, dans son rapport avec les autres structures sociales et leur stratification, et à étudier alors de manière différentielle des habitus constitués, ce positionnement la condamnant à circonscrire son champ à l'extérieur des portes des classes, comme pour d'autres institutions, et sans y pénétrer pour analyser la constitution des habitus. Or c'est précisément cet objet, tout au moins une de ses dimensions qui relève de la mémoire, qui fonde notre travail.

Le spectacle de table rase devant lequel nous nous trouvons désormais, après avoir rejeté les théories psychologiques et sociologiques comme pouvant prétendre à rendre compte, à elles seules et de façon complète et consistante, de la question de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques, nous oblige à procéder à un ajustement théorique. Celui-ci est donc opéré en nous situant dans un troisième champ, à l'articulation des deux précédents : celui de l'anthropologie, qui considère que l'homme est un animal culturel et social et qu'il est « obligé d'apprendre pour être ». Adopter ce choix théorique, revient à se placer dans la posture suivante assez bien décrite par Candau (1998) :

> « Alors que le psychologue et le sociologue s'attachent l'un à élucider la nature et le comportement des individus, l'autre ceux des groupes et sociétés, l'anthropologue travaille essentiellement à l'articulation de ces deux approches. Guetteur embusqué au point de passage entre l'individu et le groupe, il s'efforce de comprendre à partir de données empiriques comment des individus parviennent à partager des pratiques, des représentations, des croyances, des souvenirs, en un mot du sens, produisant ainsi, dans la société considérée, ce que l'on appelle de la culture. » p. 3.

Ce point relatif au positionnement épistémologique de notre travail ayant été précisé, nous pouvons alors reprendre le cheminement du raisonnement sur les « savoirs hautement techniques ». Dans le prolongement de la classification exposée précédemment, Johsua (1999) avance quelques éléments constitutifs de cette spécification de l'étude propre à l'École :

> « L'efficacité de l'École tient probablement à ce que les conditions de l'étude transforment, pendant un temps, des outils pratiques en objets d'étude. Ce n'est sans doute pas un mécanisme mental si banal. S'approprier à la fois l'existence de ces problèmes et les outils qui permettent de les appréhender, voilà une des marques de l'étude. […] Mais, en général, l'appréhension des diverses étapes de cette étude est supportée par un *système de justifications* des outils mis en œuvre, une *raison* de la manière de faire. […] Ces raisons peuvent être liées à une démonstration mathématique, ou à la référence à un modèle particulier d'écriture ou d'écrivain, ou encore à un précepte "moral". L'important, c'est qu'elles doivent être exhibées. Il n'en est pas de même quand, pour une raison ou une autre, les "conditions de l'étude" ont un caractère moins institutionnel. Dans ce cas, les apprentissages sont dominés par la production, et la manifestation des actes a pour critère d'évaluation leur adéquation avec ce qui est attendu. Ici, *on apprend pour faire*. Une grande partie de l'étude scolaire consiste au contraire à *faire pour apprendre*. » pp. 140-141.

Adoptant cette analyse, il s'ensuit que l'on peut distinguer différents types de groupes sociaux en lesquels il est possible d'apprendre différents types de savoir : les groupes qui sont porteurs d'une potentialité d'enseignement et ceux qui sont construits dans l'intention d'enseigner. Adopter ce point de vue revient donc à poser qu'il existe un lien dialectique indissociable entre processus social, ou de socialisation, et processus cognitif et à retrouver ainsi la cohérence apportée par une approche anthropologique. Pour désigner ces « groupes sociaux », nous utiliserons désormais le terme d'institutions, dans le sens qui lui est donné par Douglas (1986) :

> « […] l'on entendra institution au sens de groupement social légitimé. L'institution en question peut être une famille, un jeu ou une cérémonie ; l'autorité légitimante venir d'une personne, par exemple un père, un docteur, un juge, un arbitre ou un maître d'hôtel, ou bien de façon plus diffuse, se baser sur un consensus ou sur un principe fondateur général. Ce qu'on exclut ici sous le nom d'institution, ce sont des arrangements pratiques purement utilitaires ou provisoires et reconnus comme tels. […] Une convention est institutionnalisée quand, à la question de savoir pourquoi on agit ainsi, et même si la première réponse est formulée en termes de convenance mutuelle, l'on peut répondre *in fine* en se référant au mouvement des planètes dans le ciel ou au comportement naturel des plantes, des animaux ou des hommes » p. 42.

Discutant la portée de cette définition et de ses conséquences, qu'il estime encore trop liées au rejet par Durkheim de la thèse de l'origine logique des catégories, Ogien (1994) note :

> « Et c'est ce que, de façon involontaire, Douglas met en lumière : malgré les efforts qu'elle déploie pour établir que la force de contrainte de l'institution est de nature essentiellement cognitive, et donc nécessairement fluctuante, elle ne peut renoncer à doter l'institution d'une intentionnalité propre qui continue à déterminer les procédures mêmes qui sont censées la constituer. Les avancées de Douglas ne sont pas minces : elle ruine la thèse fonctionnaliste selon laquelle la contrainte sociale procède de la mécanique de l'intériorisation des normes, en imposant l'idée selon laquelle elle se manifeste dans l'activité conceptuelle des individus qui ajustent leur action à cet ensemble d'exigences logiques que résume la notion d'institution. Mais cette redéfinition de la contrainte ne brise cependant pas la circularité d'une explication qui fait reposer nos manières de juger sur des principes de classement arbitraires, donc socialement déterminés. »

Nous n'aurons pas besoin, quant à nous, de prendre parti à l'intérieur de cette querelle afin de juger si, oui ou non, toute institution est dotée d'une intentionnalité, puisque précisément c'est bien sur l'institution scolaire, socialement dotée de l'intentionnalité d'instruire, d'éduquer et de former des élèves que porte notre travail.

2. 1. 5. 2. Des institutions pour l'étude des « savoirs hautement techniques » : étude d'un exemple

Cette définition de l'institution en terme de « groupement social légitimé » à l'intérieur duquel « les individus ajustent leur action à cet ensemble d'exigences logiques » permet d'entrevoir l'entrée dans l'étude de « micro-groupes », telles des classes ou simplement quelques élèves. On pourra alors considérer comme « institution », par exemple, la forme particulière d'étude à laquelle s'adonnent deux élèves de Terminale S, que nous retrouvons ici encore, et qu'elles exposent en ces termes dans l'extrait suivant de protocole recueilli le 25/02/99 :

94. Q : C'est-à-dire que vous commencez par relire le cours.
95. Sarah : Ah oui, oui, oui là c'est sûr. On fait des fiches quoi, moi je fais des fiches et après j'essaie de faire des exos sans rien quoi.
[…]
115. Sarah : Si parce que les exos, moi, je refais ceux qu'on a faits mais sans regarder la correction de ce qu'on a fait, quoi. Après je fais des fiches et puis en complémentaire, soit des annabacs, soit des exercices corrigés…
[…]
118. Q : Et dans le Transmath, il me semble qu'il y a des exos typiques avec le corrigé. Vous les regardez ça de temps en temps ?
119. Ludivine : Oui, oui, oui. Des fiches jaunes ?
120. Q : Oui, voilà y'a des fiches…
121. Ludivine : Oui, ça je le fais.
122. Q : Ça, vous vous en êtes servi pour quoi ?
123. Ludivine : Pour les limites…
124. Sarah : Oui, un peu les limites et les primitives aussi, les tangentes…
[…]
126. Ludivine : Dérivées et primitives…
[…]
135. Q : Et donc, si je résume, quand vous étudiez votre cours, enfin quand vous avez des exos etc., que vous voulez apprendre les maths, vous commencez par lire le cours, éventuellement faire des fiches, ensuite faire les exos sans regarder le cours. Toi, tu disais j'essaie de les refaire, ceux qui sont corrigés, sans regarder la correction. Ça, c'est pour préparer une interro ?
[…]
140. Q : En règle générale, vous faites comme ça ? Vous faites des fiches avant de commencer à faire les exos ?
141. Sarah : Ah oui, oui, oui. Oui, parce que c'est plus facile de retenir un cours quand on fait une fiche. Parce que c'est nous qui le faisons donc, heu, c'est nous qui sélectionnons …
142. Ludivine : Puis on met le principal.
143. Sarah : Oui, et puis avant de faire un exercice, il faut savoir le cours parce que sinon, c'est…
144. Q : D'accord. Et donc, sur ces fiches, vous y inscrivez quoi essentiellement ?
145. Sarah : Tout mais vraiment concentré quoi.
146. Q : Les démonstrations ?…
147. Ludivine : Les étapes quoi, l'organisation, les fiches particulières.
148. Q : Et les démonstrations, vous les mettez ?
149. Sarah et Ludivine : Non, non, non.
150. Ludivine : Non, je les lis. Je me reporte toujours à mon cours que j'ai fini.
151. Sarah : Oui, les démonstrations, on les travaille sur le cours, mais on les transcrit pas.
152. Ludivine : vu qu'au bac, on n'a pas besoin de tout démontrer, heu, les théorèmes…
153. Sarah : [rire]
154. Ludivine : Non mais c'est vrai…
155. Q : Et les exemples, vous les retranscrivez ?
156. Ludivine : Non, on les regarde.
157. Sarah : Oui, on les regarde.
158. Q : Donc, y'a définitions, théorèmes, propriétés…
159. Ludivine : Oui, oui, c'est ça.
160. Q : Courbe…
161. Ludivine : Oui et puis méthodes aussi. Des exercices types.

162. Q : Ah oui. D'accord. Et ça, c'est en exemple ou dans le cahier d'exos ?
163. Ludivine : Non, c'est sous forme de fiches.
164. Q : Non, mais dans le cours, comment tu les repères les exos types ?
165. Sarah : En les mélangeant, euh… Après le cours qui porte sur ça. Par exemple pour les asymptotes et les tangentes, après les dérivées, on avait fait des fiches…
166. Q : Mais ça c'est P qui vous avait dit c'est des exos types ou…
167. Sarah et Ludivine : Non…
168. Q : Vous aviez repéré que…
169. Ludivine : Ben, c'est sur le livre justement.
170. Q : Ah oui, d'accord, dans le Transmath.
171. Sarah et Ludivine : Oui.

On pourrait ainsi nommer « l'institution des fiches », la description que ces deux élèves donnent d'une partie de leur travail d'étude. En effet, elle est d'une part légitimée par « un consensus ou un principe fondateur général » partagé par ces deux élèves. D'autre part, lorsqu'elles sont interrogées sur les raisons de ce système d'étude, elles donnent des réponses qui renvoient ces raisons à « leur adéquation avec la nature de l'univers », avec ce qu'elles pensent être une bonne technique d'étude des mathématiques, qu'elles ont peut-être expérimentée les années précédentes ou dans d'autres disciplines. Cet « allant de soi » transparaît à travers quelques-unes des expressions utilisées :

94. Q : C'est-à-dire que vous commencez par relire le cours. 95. Sarah : *Ah oui, oui, oui là c'est sûr*. On fait des fiches quoi, moi je fais des fiches et après j'essaie de faire des exos sans rien quoi. 140. Q : En règle générale, vous faites comme ça ? Vous faites des fiches avant de commencer à faire les exos ? 141. Sarah : *Ah oui, oui, oui. Oui, parce que c'est plus facile de retenir un cours* quand on fait une fiche. Parce que c'est nous qui le faisons donc, heu, c'est nous qui sélectionnons … 142. Ludivine : Puis on met le principal. 143. Sarah : Oui, et puis avant de faire un exercice, il *faut savoir* le cours *parce que sinon*, c'est…

Comme le souligne Corcuff (1995) en exposant le travail de M. Douglas :

> « Si les individus construisent collectivement les institutions et les classifications qui leur sont associées, celles-ci leur donnent donc en retour des principes *d'identification* qui vont leur permettre de se penser et de penser le monde. » p 91.

Ainsi, trois semaines environ après l'entretien dans lequel elle exposait « l'institution des fiches », Sarah peut-elle se replacer au sein de cette institution afin « de se penser et de penser » cette partie de son « monde » pour analyser son échec à l'interrogation écrite :

50. Sarah : […] Après les limites et les dérivées, sur le livre, je m'étais fait une fiche pour les asymptotes et je me rappelle, y'avait un truc sur les asymptotes obliques et tout, comment chercher. Et puis j'ai oublié…

On pourrait estimer qu'il est banal et facile de prendre pour exemple la constitution de fiches pour étudier la mémoire de l'étude de « savoirs hautement techniques », dans la mesure où le dispositif induit la catégorisation, le classement, le double codage lexical et sémantique, et donc qu'il aide à mémoriser. On pourrait aussi penser en première approche que « l'institution des fiches » est une pratique ayant droit de cité, ou tout au moins réputée relativement efficace, chez les élèves de ce niveau. Or, outre l'exemple de Sarah, pour qui la constitution de fiches semble ne pas avoir apporté les bénéfices escomptés (puisqu'elle déclare que l'interrogation s'est mal passée), ce point de vue consistant à penser que les fiches jouent un rôle d'aide à l'apprentissage n'apparaît pas, dans le cas que nous avions étudié d'une même classe de Terminale S, avec le même professeur, dans le même établissement, deux ans auparavant. Différents critères de l'étude, tels que les formulaient les élèves eux-mêmes, avaient été relevés à l'issue de la passation d'un premier questionnaire individuel par tous les élèves de cette classe. Dans un deuxième questionnaire avec distracteur sémantique, bâti avec les 22 critères relevés, le critère « Faire des fiches et des plans » arrivait en avant dernière position ; le premier « critère » étant « Apprendre en comprenant », qui est un critère bien peu explicite et qui ne nous apprend rien, ni sur l'apprentissage, ni sur la compréhension ! En fait, l'étude des « gestes de l'étude » des élèves, à l'intérieur de laquelle nous devrions rencontrer la question de la mémoire, n'a pas encore été réellement engagée.

2. 2. Mémoire et institution

2. 2. 1. L'institution permet « d'économiser l'énergie cognitive »

L'institution des fiches apparaît dans les propos de ces deux élèves, lors des entretiens des 25/02/99 et 18/03/99 situés *ante* et *post* interrogation écrite, comme un système permettant d'économiser de « l'énergie cognitive » (Douglas 1986 p. 67) :

140. Q (*ante*) : En règle générale, vous faites comme ça ? Vous faites des fiches avant de commencer à faire les exos ? 141. Sarah (*ante*) : Ah oui, oui, oui. Oui, parce que c'est *plus facile de retenir* un cours quand on fait une fiche. Parce que c'est nous qui le faisons donc, heu, c'est nous qui *sélectionnons* … 50. Sarah (*post*) : […] sur le livre, je m'étais fait une fiche pour les asymptotes et je me rappelle, *y'avait un truc* sur les asymptotes obliques et tout, comment chercher.

Cette économie est connue et identifiée par les élèves :

141. Sarah (*ante*) : […] c'est nous qui *sélectionnons*. 142. Ludivine (*ante*) : Puis on met *le principal*.

Sous-entendant ainsi qu'il existe un subalterne, et qu'il peut être oublié. Car, comme le souligne Douglas (1986) :

> « Il faut que certaines choses soient continuellement oubliées pour qu'un système cognitif quel qu'il soit puisse fonctionner. On ne peut prêter attention à tout. » p. 67.

On retrouve ici, par ailleurs, un des points d'ancrage de la théorie des situations didactiques qui considère que les connaissances apparaissent comme des stratégies optimales, comme « la stratégie la plus économique pour réaliser une tâche, du point de vue de la société des élèves » (Mercier 1996).

2. 2. 2. L'institution interdit certaines pensées et contribue à la définition d'une identité

Reprenant le travail de Merton sur la mémoire de la communauté scientifique, Douglas (1986) note :

> « Merton montre comment un ordre social distinct engendre son système de valeurs, suscite les passions de ses membres et crée une myopie qui semble ensuite inévitable. […]Notons que Merton aborde ce problème par la bande. Il ne demande pas en effet : "Que pensent les gens des contraintes qu'impose l'ordre social à leur pensée ?", mais : "En quoi sont-ils empêchés de penser ? Quelles sont les pensées impossibles ?" Il montre quelles pensées sont rejetées par le système, et c'est une nouvelle piste dans laquelle nous aurions intérêt à nous engager. » pp. 66-67.

Abordant, nous aussi, « ce problème par la bande », il nous est permis d'identifier quelques-unes des « pensées impossibles » qui sont induites par l'assujettissement de ces deux élèves à cette « institution des fiches ». Elles sont énoncées par les élèves dans l'entretien *ante* du 25/02/99 comme réponses aux questions posées :

> 148. Q : Et *les démonstrations*, vous les mettez ? 149. Sarah et Ludivine : Non, non, non. 150. Ludivine : Non, je les lis. Je me reporte toujours à mon cours que j'ai fini. 151. Sarah : Oui, les démonstrations, on les travaille sur le cours, mais on les transcrit pas. 155. Q : Et *les exemples*, vous les retranscrivez ? 156. Ludivine : Non, on les regarde. 157. Sarah : Oui, on les regarde. 158 .Q : Donc, y'a définitions, théorèmes, propriétés… 159. Ludivine : Oui, oui, c'est ça. 160. Q : Courbe… 161. Ludivine : Oui et puis méthodes aussi. Des exercices types.

Ainsi, le travail mené dans « l'institution des fiches » à travers les pratiques dans lesquelles s'engagent ces deux élèves, écarte la pensée des démonstrations et des exemples. Il contient bien un certain travail des « méthodes », des « exercices types », mais celui-ci doit être pondéré : « méthodes » et « exercices types » sont sélectionnés par une autre institution, celle des auteurs du manuel de la classe. C'est ce qui est expliqué ainsi dans l'entretien *ante* du 25/02/99 :

> 166. Q : Mais ça c'est P qui vous avait dit c'est des exos types ou… 167. Sarah et Ludivine : Non… 168. Q : Vous aviez repéré que… 169. Ludivine : Ben, c'est sur le livre justement.

La mémoire des fiches ne contient donc pas forcément la mémoire des exercices et des « méthodes » considérés comme importants par le professeur de la classe. L'élaboration des fiches ne permet donc pas, non plus, à ces deux élèves de s'engager dans un travail réflexif sur le travail qu'elles ont mené en classe (168. Q : Vous aviez repéré que… 169. Ludivine : Ben, c'est sur le livre justement) et à travers lequel elles ont été engagées à explorer les exercices que leur professeur a jugés bon de leur faire étudier.

On voit par là que bien des « pensées » mathématiques, et non des moindres, sont « rejetées par le système » des fiches tel qu'il est pratiqué par ces élèves : démonstrations, exemples, pratique des exercices faits en classe et de leur « évaluation » par les élèves (est-ce un exercice type, un exercice banal, un exercice « limite » qu'on a peu de chance de retrouver en interrogation écrite en classe, etc.).[35]
Ainsi, des processus cognitifs relatifs à l'étude des mathématiques et propres à ces deux élèves sont fixés, ne serait-ce que pour partie, par le type d'institution sociale qu'elles se sont construites. Cet exemple « des fiches » permet d'illustrer le propos suivant de M. Douglas :

> « Les institutions dirigent de façon systématique la mémoire individuelle et canalisent nos perceptions vers des formes compatibles avec le type de relations qu'elles autorisent. » p. 84

et d'expliquer que :

> « La grande réussite de la pensée institutionnelle est de rendre nos institutions complètement invisibles. Mais, quand tous les grands penseurs d'une époque s'accordent sur l'originalité de leur temps, et sur l'existence d'un gouffre immense entre nous et notre passé, on peut avoir un premier aperçu de cette classification partagée. Toutes les relations sociales pouvant être analysées comme des transactions marchandes, l'omniprésence de ce marché nous procure la conviction que nous sommes sortis du vieux contrôle

[35] De ce point de vue, on comprend que « faire des fiches et des plans » ait été jugé peu utile pour étudier les mathématiques par les « aînés » de ces élèves, deux ans auparavant.

institutionnel des sociétés non marchandes et que nous jouissons désormais d'une liberté neuve et dangereuse » p. 90.

C'est en effet, dans l'entretien *post* interrogation écrite du 18/03/99, l'expérience douloureuse que vit Sarah qui, faute de pouvoir identifier comme responsables l'institution des fiches et le type de « pensée mathématique » qu'elle induit, en vient à attribuer à sa propre personne, considérée peut-être comme jouissant trop « d'une liberté neuve et dangereuse », l'entièreté de son échec à l'interrogation écrite :

> 33. Q : Tu es déçue, donc, de l'interro ? 34. Sarah : Ouais, ouais. *Déçue de moi*. 35. Q : Tu l'attribues à quoi ? 36. Sarah : Je l'attribue à quoi ? Ben…À *mon* travail quoi, *mes* révisions… 37. Q : Ben si tu l'avais vachement révisé… 38. Sarah : Ouais, mais j'avais peut-être *pas révisé dans le bon sens*, mais j'avais révisé tout ce qui était… Ben, tous les exercices qu'on avait faits, les limites, tout ça. Mais *j'avais pas re-regardé* comme suivre jusqu'au bout une étude de fonction, pour les asymptotes. *Je me rappelais plus* comment on recherchait une asymptote oblique, et puis… Ah non, *c'est de ma faute hein* ? […] 51. Q : […] si on met de côté l'asymptote oblique, ça n'entraînait pas, quand même, la suite du problème ? C'était pas… 52. Sarah : Non, mais… Oui bon, alors *c'étaient pas les révisions*. Alors *c'était moi* quoi, parce que *je suis pas assez futée pour le faire* quoi. *Je sais pas*.[36]

Interpellée à deux reprises en sujet, une première fois en assez bon sujet de l'institution des fiches et une deuxième fois en mauvais sujet de l'institution qui lui est « externe », la classe de Sarah, c'est à une pénible constitution de son identité d'élève que Sarah est confrontée. L'assujettissement à l'institution des fiches auquel elle s'astreint ne permet pas de la constituer en bon sujet de l'institution de sa classe de mathématiques ; les formes de l'étude des mathématiques qu'elle et sa camarade ont choisies n'assurant pas un apprentissage satisfaisant, ce qui n'est hélas objectivé que lors de l'évaluation.

Une « pédagogie rationnelle », pour reprendre la formule des auteurs des « Héritiers », s'appuierait sans nul doute sur une objectivation des formes de l'étude idoines pour l'apprentissage des mathématiques tel qu'il est attendu à ce niveau. Or le problème majeur réside dans l'absence de cette objectivation, masquée par la transparence des institutions de l'étude auxquelles s'assujettissent les élèves, bons ou mauvais, renvoyant aux lieux communs « explicatifs » les échecs qui ne sauraient être qu'individuels, retenant au final le caractère spécifique de l'individu : « c'est moi, je suis pas assez futée », ou au contraire « c'est une tête ! » pour caractériser le fort en thème. L'étude des institutions pour l'étude, de la constitution de la mémoire des pratiques des mathématiques enseignées, peut permettre de contribuer à « lever un coin du voile ». La transparence, l'invisibilité pour leurs sujets des institutions à l'intérieur desquelles ils se trouvent, constituent ainsi tout à la fois le problème et la solution de ces questions mémorielles rencontrées dans l'étude des mathématiques. Le

---

[36] Les propos pathétiques que tient Sarah nous renvoient, pour l'espace qui est celui de l'étude à l'intérieur de sa vie de lycéenne, aux thèses d'Althusser (1976) sur l'idéologie : « L'idéologie représente le rapport imaginaire des individus à leurs conditions réelles d'existence », les conditions réelles « d'existence » de Sarah étant ici celles de ses pratiques d'étude des mathématiques. Thèse de laquelle découle, sous l'aspect d'un déterminisme structuraliste pessimiste, le corollaire « L'idéologie interpelle les individus en sujets », ainsi que sa conséquence inéluctable « L'individu *est interpellé en sujet (libre) pour qu'il se soumette librement aux ordres du Sujet, donc pour qu'il accepte (librement) son assujettissement*, donc pour qu'il "accomplisse tout seul" les gestes et actes de son assujettissement. » pp. 114-133.

choix d'un positionnement anthropologique réalise alors un déplacement de l'attribution de mémoire. En effet, en recherchant une théorie institutionnelle de la mémoire, nous n'avons plus à considérer comme première l'étude de la mémoire en tant que propriété de l'individu, mais nous pouvons étudier en premier lieu dans l'institution même, dans son fonctionnement dynamique, ce qui autorise ou interdit, favorise ou empêche, l'expression des pensées, le formatage du cognitif, la construction d'une dimension mnésique et de sa nature chez les personnes qui y sont assujetties. C'est dans le cadre d'une théorie institutionnelle de la mémoire que nous pourrons alors parler de mémoire didactique, en tant qu'expression spécifique de cette mémoire pour les institutions didactiques, historiquement, socialement et psychologiquement définies, pour reprendre les mots de Passeron (1991).

2. 2. 3 Anthropologie de la mémoire

2. 2. 3. 1. Une première classification

Candau (1996) définit l'objet de l'anthropologie de la mémoire :

> « L'anthropologue, au titre de sa discipline, ne s'intéresse pas à la faculté de mémoire proprement dite ni aux performances ou aux défaillances mnémoniques de tel ou tel individu, ni même à l'existence éventuelle d'une mémoire sexuellement différenciée, mais aux modalités culturelles de cette faculté, c'est-à-dire aux formes diverses que peuvent prendre les représentations individuelles et collectives du passé. » p. 6

Dans un ouvrage postérieur, Candau (1998) donne une typologie en trois classes des manifestations de cette faculté de mémoire :

> « 1/ Une mémoire de bas niveau, que je suggère d'appeler la protomémoire. … [Elle] "ne peut être détachée de l'activité en cours et de ses circonstances". L'anthropologue doit la privilégier : en effet, cette protomémoire dont, généralement, les individus ne peuvent pas parler, constitue le savoir et l'expérience les plus résistants et les mieux partagés par les membres d'une société. […]
> 2/ La mémoire proprement dite ou de haut niveau, qui est essentiellement une mémoire de rappel ou de reconnaissance : convocation délibérée ou évocation involontaire de souvenirs autobiographiques ou appartenant à la mémoire encyclopédique (savoirs, croyances, sensations, sentiments, etc.). […]
> 3/ La métamémoire, qui est, d'une part, la représentation que chaque individu se fait de sa propre mémoire, la connaissance qu'il en a et, d'autre part, ce qu'il en dit, dimensions qui renvoient au "mode d'affiliation d'un individu à son passé". […] La métamémoire est une mémoire revendiquée, ostensive. » pp. 11-14.

La définition de la protomémoire renvoie aux définitions données par Bourdieu de l'habitus[37] et de la connaissance par corps. Pour le domaine de l'étude des mathématiques, cette protomémoire va se manifester au niveau des pratiques mathématiques effectives des élèves. Une conséquence de la mise en texte du savoir est la création d'un temps de ces pratiques, l'essentiel d'entre elles étant de ce fait datées. Nous proposons d'appeler cette protomémoire, spécifique des mathématiques, « mémoire pratique des mathématiques », ou simplement, lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, « mémoire pratique ». Cette désignation est justifiée par le fait que c'est en effet elle, qui est immédiatement sollicitée par un individu, quel qu'il soit (élève, professeur, parent aidant son enfant, etc.), lorsqu'il s'engage dans l'accomplissement pratique d'une tâche identifiée comme relevant d'un savoir mathématique.

2. 2. 3. 2. Les institutions contraignent les mémoires pratiques de leurs sujets

[37] « Les conditionnements associés à une classe particulière de conditions d'existence produisent des *habitus*, systèmes de *dispositions* durables et transposables, structures structurées prédisposées à fonctionner comme structures structurantes, c'est-à-dire en tant que principes générateurs et organisateurs de pratiques et de représentations qui peuvent être objectivement adaptées à leur but sans supposer la visée consciente de fins et la maîtrise expresse des opérations nécessaires pour les atteindre, objectivement "réglées" et "régulières" sans être en rien le produit de l'obéissance à des règles, et, étant tout cela, collectivement orchestrées sans être le produit de l'action organisatrice d'un chef d'orchestre. » Bourdieu (1980) pp. 88-89.

Il fut une époque dans les lycées français, entre 1981 et 1990, où, confronté par exemple à la résolution de l'équation x^2-2x-3=0, un élève de seconde se devait d'écrire quelque chose comme :
(x-1)^2-1-3=0
(x-1)^2-(2)^2=0
(x-1-2)(x-1+2)=0
donc 3 et -1 sont les solutions.
Mais où le même élève, devenu l'année suivante élève de 1^e S, se devait d'écrire dans un premier temps :
$\Delta=(-2)^2-4\times1\times(-3)=16$
(ou encore, respectivement $\Delta'=(-1)^2-1\times(-3)=4$)

donc $\frac{2-\sqrt{16}}{2}$ = -1 et $\frac{2+\sqrt{16}}{2}$ = 3 sont les solutions.

(respectivement : $\frac{1-\sqrt{4}}{1}$ = -1 et $\frac{1+\sqrt{4}}{1}$ = 3 sont solutions)

Puis, toujours élève de 1^e S mais cette fois dans un second temps, alors que le cours avait avancé, cette technique était considérée comme malhabile puisque il est évident que « $b=c+a$ », et donc que les solutions sont –1 et $-\frac{-3}{1}$ = 3

Cet exemple est dépourvu de jugement de valeur : on aurait pu tout aussi bien prendre pour exemple la détermination d'une équation de droite connaissant deux de ses points, à travers les programmes en vigueur en 1998 en troisième et en seconde, classes dans lesquelles les techniques enseignées, elles aussi, diffèrent pour la même tâche. Il ne fait que signer, en définitive, la rencontre bien banale entre, d'une part la transposition didactique qui dispose différents objets mathématiques, ici des techniques différentes à enseigner, le long du fil du temps didactique, et d'autre part l'assujettissement attendu des élèves à deux institutions différentes selon leur progression normale dans le cursus scolaire et leur passage d'un niveau à un autre.

Au regard de l'institution « classe de 1^e S » telle qu'elle existe depuis 1981, on pourrait dire que l'on ne se souvient plus, ou même que l'on ne doit plus se souvenir, de la méthode étudiée en seconde, et qui consiste à écrire la forme canonique du trinôme, pour résoudre une équation du second degré. Mais cette manière de dire présuppose que l'on prête une mémoire à une institution, ce qui est quelque peu abusif. Évidemment, les institutions ni ne se souviennent, ni n'oublient, et ne sont dotées d'aucune faculté mémorielle.
Comme nous l'avons spécifié en 2. 2. 2., il est plus juste de dire qu'elles contraignent les individus à se comporter, à agir, à s'engager dans des pratiques qui peuvent être vues, lorsqu'elles sont examinées à travers le rapport d'un individu de cette institution à une pratique qui s'y déroule, comme étant un rapport individuel engageant un souvenir ou un oubli

spécifiques à cette personne lorsqu'on la regarde du point de vue d'une autre institution.

2. 2. 3. 3. Contraintes et degrés de liberté dans l'expression de la mémoire pratique

On pourrait donc considérer que parler ainsi, c'est-à-dire attribuer de la mémoire à une institution, est à mettre au compte d'un style un peu provocateur mais, qu'en dernière instance, l'individu dispose, fort heureusement, de son libre-arbitre. Il agira donc comme bon lui semble. Ce jugement, qui semble relever du bon sens et du plus élémentaire respect de la liberté individuelle, est cependant à questionner car, comme le note Bourdieu (1980) :

> « Échappant à l'alternative des forces inscrites dans l'état antérieur du système, à l'*extérieur* des corps, et des forces *intérieures*, motivations surgies, dans l'instant, de la décision libre, les dispositions intérieures, *intériorisation de l'extériorité*, permettent aux forces extérieures de s'exercer, mais selon la logique spécifique des organismes dans lesquels elles sont incorporées, c'est-à-dire de manière durable, systématique et non mécanique : système acquis de schèmes générateurs, l'habitus rend possible la production libre de toutes les pensées, toutes les perceptions et toutes les actions inscrites dans les limites inhérentes aux conditions particulières de sa production, et de celles-là seulement. À travers lui, la structure dont il est le produit gouverne la pratique, non selon les voies d'un déterminisme mécanique, mais au travers des contraintes et limites originairement assignées à ses inventions. » p. 92.

Comment donc un élève qui, confronté lors de moments différents du processus d'étude des mathématiques à des techniques différentes, engageant des habitus distincts, pour la même tâche pratique, procèdera-t-il lorsque l'étude sera terminée ? Selon quelle(s) modalité(s) « l'intériorisation de l'extériorité » s'actualisera-t-elle dans la « production libre de toutes les pensées » ? Le cadre d'une réponse peut être envisagé en considérant qu'il ne faut pas oublier, en première approche, que cette pratique se déroule au sein d'une institution, et que la forme qu'elle prendra dépendra du type d'institution considérée. Certes, mais en est-il encore de même si l'individu se livre à cette pratique de manière autonome, privée, par exemple lors d'une étude personnelle ? Peut-on supposer qu'il réalise alors la mise à distance de toute institution ? Une réponse classique en sociologie est de dire que cela ne se peut, que l'individu n'est jamais « vraiment seul », et que l'intériorisation sociale qui l'a constitué s'exprime à travers sa pratique, même isolée. Sans doute, mais quelle pratique choisira-t-il, dans la mesure où un certain degré de liberté lui est, d'après la théorie, concédé ?
Un nouveau cadre de réponse nous est fourni par Bourdieu (1992) dans un passage où il critique la « Rational Action Theory » :

> « La théorie de l'action rationnelle ne reconnaît que les "réponses rationnelles" d'un agent sans histoire à la fois indéterminé et interchangeable. Cette anthropologie imaginaire cherche à fonder l'action, qu'elle soit économique ou non, sur le choix intentionnel d'un acteur libre de tout conditionnement économique et social. Elle ignore l'histoire individuelle et collective des agents à travers laquelle les structures de préférences qui les habitent se constituent, dans une dialectique temporelle complexe avec les structures objectives qui les produisent et qu'elles tendent à reproduire. […] Les actions humaines ne sont pas des réactions instantanées à des stimuli et la moindre "réaction" d'une personne à une autre personne est grosse de toute l'histoire de ces deux personnes et de leur relation. » pp. 98-99.

Si l'on regarde maintenant du côté des élèves « aux prises » avec les mathématiques et leur étude, c'est bien dans le cadre de leurs « histoires individuelles et collectives » à travers « les structures objectives » de l'étude qui les produisent et qu'ils tendent à reproduire qu'il faut replacer leurs actions relatives aux mathématiques. C'est ce que Mercier (1995) nomme « la biographie didactique d'un élève » :

> « Nous pourrions considérer que leurs choix sont l'expression de leurs habitus d'élève. Chacun peut dans ce cadre jouer de ses assujettissements, selon un style personnel, défini par sa *disposition* particulière : *sa manière d'être ce qu'il est* – un élève. *Ainsi, chaque élève donne un sens à son assujettissement, et un devenir à sa position. Il se construit comme élève, et il devient cet élève particulier*. C'est cela que nous interprétons lorsque nous analysons *in situ* un fragment biographique […] »

Si l'on retrouve alors l'attribution individuelle et personnelle de la mémoire, celle-ci est donc à replacer dans le cadre de la trajectoire personnelle de la personne au sein de l'institution didactique à laquelle elle fut assujettie. C'est en étudiant la dynamique temporelle de la dialectique de l'assujettissement à l'institution, et propre à la personne, et de l'institution ou des institutions qui lui sont annexées, que nous aurons alors accès à la mémoire personnelle relative au mathématiques, ce que nous avons nommé la mémoire pratique des mathématiques.

2. 3. Les pratiques mathématiques des élèves « objectivent » les derniers niveaux de leurs mémoires pratiques

La pratique des mathématiques, telle qu'elle est réellement objectivée, pour chaque élève singulier, à travers les techniques, ou leurs ébauches, mises en œuvre pour l'accomplissement d'une tâche mathématique particulière, donne alors accès à une partie de sa biographie didactique. « S'exprime » alors, s'actualise, l'objectivation pratique d'une partie de sa mémoire pratique. Mais, si nous reprenons l'exemple précédent de la résolution de l'équation du second degré, le problème se complexifie dès que l'on observe que nous pouvons distinguer un très grand nombre de niveaux pour l'expression de cette mémoire pratique.
Par exemple, dans le cas d'un élève de 1^{e} S qui écrit en résolvant une équation du second degré : $\frac{2-\sqrt{16}}{2}=\frac{-2}{2}=1$

il y a bien sûr le niveau relatif à la « mémoire en acte » de la résolution générale d'une équation du second degré dans **R**, qui veut que l'on écrive, « à un certain moment », $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

C'est celui que nous sommes tentés de voir tout d'abord, et ce sont sans doute ce souvenir et sa traduction scripturale qui seront évalués, par exemple par le professeur de la classe. Mais, pour mener à bien cette résolution, il est nécessaire d'avoir aussi recours à la mémoire du calcul, trivial ici, de la racine carrée de 16, ce qui renvoie au souvenir de mathématiques enseignées au niveau de la 4^{e} et de la 3^{e}. Cette descente dans la mémoire pratique peut alors se poursuivre : passer de 2-4 à –2 relève de la mémoire de l'étude au niveau de la 5^{e}, tandis que savoir que $\frac{-2}{2}$=-1 engage les souvenirs mêlés d'études du niveau 4^{e} pour la détermination du signe et CM2-6^{e} pour la valeur absolue, etc. La plongée régressive dans la mémoire pratique peut sans doute se poursuivre très loin, jusqu'aux environs des premières pratiques mathématiques que cet élève a rencontrées lors de son entrée dans le système éducatif. Il est nécessaire en effet qu'il se souvienne aussi que 4-2=2, mais pour cela qu'il sache l'écrire, c'est-à-dire tenir correctement son stylo et obtenir d'un geste convenable de la main le tracé d'un 2, d'un 4, etc. Il est de plus évident que ces apprentissages, décrits de manière linéaire dans cette exposition, ont été retravaillés, reconstruits, réorganisés au fil de l'étude. Travail pharaonique, et à vrai dire *a priori* de bien peu d'intérêt, que celui qui consisterait à explorer toute ces « couches » de mémoire pratique ainsi que leur enchevêtrement !

2. 3. 1. Le travail de la mémoire pratique comme dialectique entre institution et assujettissement de la personne

2. 3. 1. 1. Position du problème

La question se pose alors de la détermination de la « couche » à observer pour atteindre à une connaissance intéressante de la mémoire pratique d'un élève, relativement à un savoir donné. De même, la question se pose de savoir quelle couche de mémoire pratique va être donnée à voir dans la pratique des mathématiques à un instant donné du temps de l'institution. La réponse est à rechercher, comme nous l'avons déjà dit, du côté de l'institution didactique : c'est elle qui va choisir la technique attendue à travers la tâche qu'elle propose, et donc qui va solliciter l'engagement de telle ou telle couche de cette mémoire pratique. Du fait de la mise en texte du savoir résultant de sa transposition, et la conséquence que cela induit sur la progressivité de l'étude, nous pouvons prévoir que c'est toujours aux derniers niveaux de travail de la mémoire pratique que l'institution didactique fait appel.
Il y a en effet, comme le montre la théorie de la transposition didactique[38], nécessité pour le temps didactique d'avancer, et nécessité pour les élèves de combler, par l'étude personnelle, le décalage qui se crée alors entre les objets de savoir nouvellement présentés par le professeur et leur apprentissage par les élèves ; cette clause du contrat didactique se traduit par le décalage réel entre temps de l'enseignement et temps de l'apprentissage, même si la fiction d'une unicité de ces deux temporalités apparaît nécessaire pour que la relation didactique puisse continuer. À travers le travail d'étude qui vise à combler ce décalage, un véritable travail individuel de cette mémoire pratique est mené à travers l'apprentissage de nouveaux objets de savoir, condition nécessaire pour que ces objets de savoir soient effectivement reconnus comme transactionnels entre passé et futur de la relation didactique. L'étude d'un manuel scolaire[39] fournit un exemple qui permettra de mieux voir cela.

2. 3. 1. 2. Un exemple : les attentes institutionnelles sur la mémoire pratique

Suivant les instructions contenues dans le programme officiel pour la classe de 1^eS, les auteurs ouvrent le chapitre intitulé « Dérivation » par trois activités intitulées respectivement « Sécantes et tangentes à une courbe », « Approximation affine d'une fonction » et « Vitesse instantanée ». Nous nous intéressons aux deux premières, à leur articulation au cours qui suit, et aux exercices qui s'y rapportent.
Ce manuel présente l'intérêt d'indiquer les numéros des exercices, ainsi que les activités, « l'utilisation » (qui s'appelle aussi fiche « fiche méthode » dans d'autres manuels) et le T.P. qui correspondent à la partie du cours exposé. Ce dernier est subdivisé en trois paragraphes : « 1. Dérivation en *a*, avec *a* réel », « 2. Fonction dérivée » et « 3. Fonctions dérivées et opérations ». Dans le premier paragraphe, les deux sous-paragraphes sont : « 1. Nombre dérivé en *a* » et « 2. Approximation d'une fonction par une fonction affine ». Ils renvoient aux deux premières activités.
Si l'on observe ces deux activités, on constate que celles-ci permettent d'assurer officiellement

---

[38] « L'objet d'enseignement réalise donc un "équilibre" contractuel *entre passé et avenir* : il est un *objet transactionnel* entre passé et avenir » p. 67 (Chevallard, 1985). La structuration du temps didactique résultant de la mise en texte du savoir est exposée dans les chapitres 6, 7 et 8 de « La transposition didactique ».
[39] Il s'agit du manuel de 1^eS de la collection « Déclic » édité chez Hachette en 1995.

la rencontre avec les deux expressions du nombre dérivé mentionnées dans le programme. Ainsi, dans la première, celui-ci apparaît comme limite des coefficients directeurs des sécantes à la courbe C_f en A d'abscisse a, et il est défini comme étant le coefficient directeur de la tangente. Tandis que dans la seconde activité, il est le coefficient de h dans le développement limité à l'ordre 1 d'une fonction f au voisinage de a ; ce développement permettant de définir une approximation affine de f au voisinage de a.

La première activité se subdivise en deux parties : tout d'abord une étude « générale » de l'équation de la tangente dans laquelle est défini $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ comme « coefficient directeur m_a de la tangente T à la courbe C au point A d'abscisse a », puis une « Application » rédigée de la manière suivante :

> Soit la fonction $f:x\to x^2$.
> 1° Déterminer le coefficient directeur m_a de la tangente T à la courbe C au point A d'abscisse a.
> 2° Déterminer les coefficients directeurs des tangentes T_1, T_2 et T_3 à la courbe C aux points d'abscisses 1, -3 et 0.
> 3° représenter la fonction f et tracer les tangentes T_1, T_2 et T_3.

Il est donc raisonnable de penser que, pour répondre à la première question, il est attendu des élèves qu'ils écrivent :

$$m_a=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2ah}{h}=2a$$

puis qu'ils remplacent a par 1, -3 et 0 pour obtenir les coefficients directeurs des autres tangentes demandés à la deuxième question.

Dans le cours qui suit dans le paragraphe « 1. Dérivation en a, avec a réel », après avoir donné la définition du nombre dérivé comme limite, si elle existe, du taux d'accroissement de f en a, on trouve l'illustration de cette définition par l'exemple suivant :

> Soit la fonction $f:x\to x^3$ définie sur **R** et a un réel. Si $h\neq 0$, on a :
> $$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{(a+h)^3-a^3}{h}=\frac{a^3+3a^2h+3ah^2+h^3-a^3}{h}=\frac{3a^2h+3ah^2+h^3}{h}.$$
> En simplifiant par h, on obtient, pour $h\neq 0$, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=3a^2+3ah+h^2$.
> Comme $\lim_{h\to 0}(3a^2+3ah+h^2)=3a^2$, f est donc dérivable en a et $\boldsymbol{f'(a)=3a^2}$.

Suit alors un deuxième résultat qui énonce que si une fonction est dérivable en a, alors le coefficient directeur de la tangente en A d'abscisse a est le nombre dérivé, et qui donne l'expression générale de l'équation de la tangente.

Face à ce résultat qui conclut la première partie de ce premier paragraphe, figure une liste d'exercices, du n°1 au n°14, pour lesquels le mode d'emploi du livre indique, en sa page 3 : « les exercices d'entraînement sont classés en rubrique suivant la progression du cours ». Lorsqu'on se reporte à la place de ces exercices à la suite du chapitre, on constate en effet qu'ils sont situés dans le paragraphe intitulé « 2. Dérivabilité en un réel » et rangés dans deux sous paragraphes « 1. Point de vue graphique » pour les exercices de 1 à 4 et « 2. Dérivabilité en a et tangente » pour les exercices de 5 à 14 ; ce qui correspond à la progression exposée. Parmi ces dix derniers exercices, sept sont relatifs exclusivement à l'étude de la dérivabilité d'une fonction en un point, tandis que trois autres sont relatifs aux tangentes. Parmi eux, l'exercice n°12 demande de déterminer une équation de la tangente en 0 à la courbe de $f : x \to x^3 - 3x + 1$.

On peut donc légitimement s'attendre à ce que, confronté à cet exercice à ce moment de l'avancée dans la progression du cours, un élève utilise la seule technique dont il dispose, qui lui a été montrée et qu'il a déjà dû utiliser dans l'application de l'activité 1. Ce qui le conduira à écrire :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3 - 3h + 1 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} (h^2 - 3) = -3,$$

puis à déterminer l'équation demandée.

Ainsi, en ce point de l'étude du cours, un élève devra-t-il se souvenir que lorsqu'il lui est demandé de déterminer une équation de tangente en A d'abscisse a, il doit tout d'abord déterminer le nombre dérivé $f'(a)$ en calculant $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Les quatre exercices associés au paragraphe suivant du cours, qui donne la définition de la fonction dérivée, mais pas encore les dérivées des fonctions usuelles, ni les opérations sur les dérivées, renforce l'attente de cette technique puisqu'ils se rapportent, pour deux d'entre eux, à l'étude des tangentes à la parabole et à l'hyperbole (exercices n° 21 et 22).

Mais le temps didactique avance, ce qu'indique la progression du manuel. Aussi le cours est-il désormais consacré aux calculs des fonctions dérivées. À sa suite, la rubrique « Utilisations » peut alors donner un exemple illustrant la méthode désormais attendue, et relative à « Tangente et approximation » :

> On considère la fonction f définie sur]-1 ; +∞[par : $f(x) = \dfrac{2x^2}{x+1}$ et C_f sa représentation graphique.
>
> 1° Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f au point A d'abscisse $a=3$.
>
> 2° En déduire une valeur approchée du nombre $N = \dfrac{3{,}002^2}{2{,}001}$ (sans calculatrice).

Après avoir rappelé, dans un encadré intitulé « méthode », les expressions générales de l'équation de la tangente et de l'approximation affine, l'ouvrage donne la réponse dont nous extrayons les passages suivants :

> 1° la fonction f est une fonction rationnelle, dérivable sur]-1 ; +∞[.
>
> Par dérivée de quotient on obtient : $f'(x) = \dfrac{4x(x+1) - 1(2x^2)}{(x+1)^2} = \dfrac{4x^2 + 4x - 2x^2}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2}$.
>
> D'où : $f'(3) = \dfrac{2 \times 3^2 + 4 \times 3}{(3+1)^2} = \dfrac{30}{16} = \dfrac{15}{8}$ […]
>
> 2° On peut écrire le nombre N : $N = \dfrac{3{,}002^2}{2{,}001} = […] = \dfrac{2(3 + 0{,}002)^2}{(3 + 0{,}002) + 1}$. On reconnaît la forme $f(a+h)$, avec $h=0{,}002$. D'où une valeur de $N \approx f(3) + f'(3).0{,}002 \approx \dfrac{9}{2} + \dfrac{15}{8} \times 0{,}002$ […]

Il est donc maintenant entendu, dans les exercices qui porteront sur les tangentes et les approximations affines, que la détermination du nombre dérivé doit être obtenue en donnant une valeur à la fonction dérivée préalablement établie, et sans recourir désormais au calcul de $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$; sauf cas exceptionnel d'une fonction non dérivable en a, mais nous n'en avons trouvé aucune dans la suite des exercices et problèmes proposés

S'il ne peut lui être enjoint d'oublier personnellement le calcul précédent du nombre dérivé à partir du calcul de la limite du taux d'accroissement, l'institution attend cependant désormais de lui que, dans le cas par exemple de la recherche du nombre dérivé, il ne montre plus cette technique antérieurement attendue de l'institution. D'ailleurs, s'il était tenté de le faire, il y a bien des chances qu'alors soit le professeur lui ferait une remarque en indiquant qu'elle n'est plus de mise désormais, par exemple parce que ce calcul induit une perte de temps, ou que, soit, de lui-même, il s'aperçoive des difficultés auxquelles un calcul de ce type peut mener selon l'expression de la fonction… L'institution didactique considère donc que l'on peut désormais oublier cette technique pour le calcul du nombre dérivé. D'ailleurs, un élève qui l'aurait lui-même effectivement oubliée ne serait pas regardé, pour les pratiques de sa détermination où le calcul de la dérivée est possible et qu'il saurait mener à bien, comme un « mauvais sujet » de cette institution.

2. 3. 1. 3. Conclusion

À travers la particularité de ce manuel qui mentionne, au fur et à mesure de l'avancée dans le chapitre, quel est le travail des exercices qui est à chaque étape possible, l'étude de cet exemple permet de souligner le phénomène temporel qui se joue dans l'ordinaire des classes de mathématiques, lorsque c'est le professeur qui choisit les exercices que les élèves auront à rechercher, au fur et à mesure qu'il fait avancer le temps didactique. Cet exemple nous donne la possibilité d'entrevoir, de manière concise, un travail d'étude possible d'un cours sur la dérivation mené par un élève à ce niveau du cursus.
De l'étude de cet exemple, nous pouvons noter que la problématicité du calcul du nombre dérivé par la limite du taux d'accroissement, et la perte de temps qu'il occasionne, auraient pu constituer, si leur rencontre par les élèves avait été pensée dans l'organisation de ce chapitre, le moteur de l'avancée temporelle dans l'étude de la dérivation. Mais, comme l'indique *La Transposition didactique*, cette dialectique de l'ancien et du nouveau procède, dans le cadre d'une institution didactique, de la mise en texte du savoir, et non des problèmes rencontrés par la collectivité d'étude. Le travail d'étude mené par les élèves consiste, en grande partie, à travers l'engagement dans la recherche des exercices, à travailler les techniques nouvelles qui viennent d'être enseignées, afin de réduire l'écart que l'enseignement vient de creuser entre les pratiques qu'ils connaissaient et celles qui viennent d'être montrées. Ce faisant, il existe alors, de manière virtuelle et aléatoire, une possibilité de rencontre d'une partie de la problématicité à laquelle le savoir qui a été enseigné répond. Mais, en tout état de cause, que

cette problématicité ait été ou pas rencontrée lors du travail d'étude, ce travail occasionne pour celui qui s'y adonne une réorganisation de certains savoirs antérieurement appris ; c'est le phénomène d'après-coup décrit dans le chapitre 8 de *La Transposition didactique*.
Bien que cela ne soit pas l'objet de notre travail, on peut pressentir que cet après-coup induit des phénomènes d'ordre mnésique chez la personne ayant fait la rencontre qui l'a déclenché. Tout simplement parce que les interrelations, ou encore les rapports personnels que la personne entretient, de manière privée, avec certains éléments du savoir, changent. Ainsi, par exemple, il n'est plus très important, pour l'élève de 1eS qui est parvenu à la fin de ce chapitre sur la dérivation, de se souvenir ou pas de la relation donnant le taux d'accroissement pour déterminer une équation de tangente, trouver une approximation affine, étudier une fonction, résoudre des problèmes d'extremums, toutes tâches dont l'institution attendra chez lui la connaissance à la fin de l'enseignement de ce chapitre. Pour les accomplir, et donner à voir à l'institution les techniques mises alors en œuvre, il n'est pas nécessaire de devoir montrer que l'on connaît, ou que l'on ignore, l'équivalence entre :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ et } \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ou même, le calcul d'une limite.

Au cours des différentes phases de l'étude scolaire courante, de nombreuses occasions sont généralement données aux élèves pour rendre publique leur dimension personnelle du rapport au savoir : correction par un élève d'un exercice au tableau, remise d'un travail au professeur, débat dans la classe, discussion avec le professeur ou un camarade du travail personnel mené en classe, etc. Ces diverses dimensions du contrat didactique engagent l'expression publique de la dimension personnelle du rapport à ces pratiques, et elles constituent alors autant d'occasions pour l'expression publique de certaines dimensions de la mémoire du travail personnel d'étude portant sur des pratiques mathématiques, travail souvent accompli en un lieu et un temps différents de ceux de l'institution.
Ce sont alors les derniers niveaux travaillés de cette mémoire pratique propre à l'élève qui vont être engagés et qui vont s'exprimer. Cette objectivation peut créer des surprises chez l'observateur, notamment parce qu'elle peut révéler la distance qui sépare le moment de son expression et les derniers épisodes de ce travail de mémoire pratique pour l'élève, comme le montrera l'exemple suivant. Il nous donne accès à cette d'objectivation de la mémoire pratique grâce à un moment d'évaluation, et nous permet de rencontrer des expressions de mémoires pratiques très différentes selon les individus, bien que se rapportant au même sujet mathématique.

2. 3. 2. Un exemple d'objectivation de diverses formes de mémoire pratique individuelle

Il s'agit maintenant de l'observation de copies d'élèves de seconde que des professeurs des classes concernées ont renvoyées à l'IREM d'Aix-Marseille, après correction, à l'issue de l'évaluation externe qui s'est tenu le 18 avril 1995. La première question du problème de géométrie était la suivante :

« Dans le plan rapporté au repère orthonormé (O ; $\vec{i},\vec{j}$) placez les quatre points $A(4;1)$, $B(\frac{5}{2}; 4)$,

$C(-\frac{7}{2};1)$ et $D(-2 ; -2)$

1. Démontrez que *ABCD* est un rectangle. »

- Réponse d'un premier élève

Elle tient en quelques traces écrites :

1/ ABCD parallélogramme AB//CD
AC coupe BD en leur milieu

Sans doute, l'élève se souvient-il qu'un rectangle étant un parallélogramme particulier, il peut commencer par démontrer que ABCD est un parallélogramme. S'expriment alors quelques vagues souvenirs sur le parallélogramme : deux des côtés opposés parallèles, les diagonales sécantes en leur milieu. Ces souvenirs relèvent d'un travail de la mémoire pratique qui remonte à des connaissances du niveau 5^{e}-4^{e}, ce qui ne veut d'ailleurs pas dire que le dernier travail de la mémoire pratique de cet élève, à ce sujet, puisse être daté de ce moment de son cursus scolaire. La technique, enseignée en 3^{e}, et qui consiste à prouver que les diagonales se coupent en leur milieu en déterminant les coordonnées de ce milieu, n'est pas engagée par cet élève. L'objectivation de sa mémoire pratique relative à cette question sur le rectangle peut donc être vue, depuis l'institution des classes de seconde, comme un travail qui s'est arrêté il y a environ trois ans. Ceci ne signifie pas qu'il a, depuis, cessé d'étudier la géométrie car il parvient, par exemple, à déterminer des équations cartésiennes de deux droites à l'aide du déterminant (qui n'est officiellement pas au programme, mais qui a été enseigné par son professeur) et obtient finalement 7 sur 20 à ce problème.

- Réponse d'un deuxième élève

La réponse fournie est, dans ce deuxième cas, plus consistante et correspond à la mise en œuvre de techniques, dont la deuxième est enseignée en seconde. Elles peuvent être ici raisonnablement attendues, ne serait-ce que par le rédacteur du corrigé type fourni par l'IREM, qui est aussi la personne ayant conçu le problème, et qui suggère de démontrer que deux vecteurs, par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$, sont égaux et que deux autres, par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, sont orthogonaux. La réponse de l'élève est retranscrite telle quelle ci-dessous :

1. Par hypothése : si ABCD est un rectangle les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont paralléle donc colineaires.

Démonstration

<u>Calcule du $\overrightarrow{AB}$</u>

$A\left|\begin{array}{l}4\\1\end{array}\right.$ et $B\left|\begin{array}{l}\frac{5}{2}\\4\end{array}\right.$

$\overrightarrow{AB}=\left|\begin{array}{ll}\frac{5}{2} & -4\\4 & -1\end{array}\right.$

$\overrightarrow{AB}=\left|\begin{array}{l}-1,5\\3\end{array}\right.$

<u>Calcule de $\overrightarrow{CD}$</u>

$C\left|\begin{array}{l}\frac{-7}{2}\\1\end{array}\right.$ et $D\left|\begin{array}{l}-2\\-2\end{array}\right.$

$\overrightarrow{CD}\left|\begin{array}{ll}-2- & (\frac{-7}{2})\\-2- & 1\end{array}\right.$

$\overrightarrow{CD}=\left|\begin{array}{l}1,5\\-3\end{array}\right.$

Pour savoir si c'est deux vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colineaire

On utilise les determinant de leur coordonné

si ils sont egale à 0 ils sont colineaires

Det $\left|\begin{array}{ll}-1,5 & 1,5\\3 & -3\end{array}\right|=0$

(-1,5×-3)-(1,5×3)=

4,5-4,5=0

les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colineaire

Donc ABCD est un rectangle

1/ Suite

Je démontre que $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont orthogonaux

$C\left|\begin{array}{l}-\frac{7}{2}\\1\end{array}\right.$ et $B\left|\begin{array}{l}\frac{5}{2}\\4\end{array}\right.$

$\overrightarrow{CB}=\left|\begin{array}{l}\frac{5}{2}-(-\frac{7}{2})\\4-1\end{array}\right.$

$\overrightarrow{CB}=\left|\begin{array}{l}6\\3\end{array}\right.$

[…]

Cet élève qui n'obtient, lui aussi, que 7 sur 20 en géométrie, utilise, pour démontrer que ABCD est un parallélogramme, une technique apprise en seconde pour démontrer la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, et ceci dans une démonstration fausse puisque que, ne démontrant que la colinéarité de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, il n'a que démontré que ABCD est un trapèze. Il parvient, dans la suite de sa copie, à montrer l'orthogonalité de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB}$, puis conclut

qu'alors ABCD est un rectangle. Sans doute un certain travail de sa mémoire pratique relatif à l'utilisation du déterminant pour montrer la colinéarité, travail « récent » dans la mesure où il a été mené en cette année de seconde, est attesté par la réponse qu'il donne. Mais, dans la réorganisation de ses souvenirs, n'apparaît pas un usage maîtrisé de cette nouvelle connaissance, ici associée à d'autres, plus anciennes, et relatives à la caractérisation d'un rectangle. Ses souvenirs, donc son travail de mémoire pratique, ne sont pas satisfaisants pour répondre à la question qui nécessite une articulation de différents niveaux.

- Réponse d'un troisième élève

1. $\overrightarrow{AB}(\frac{5}{2}-4\ ;\ 4-1)$

$\overrightarrow{AB}(-\frac{3}{2}\ ;\ 3)$

$\overrightarrow{DC}(-\frac{7}{2}+2\ ;\ 1+2)$

$\overrightarrow{DC}\ (-\frac{3}{2}\ ;\ 3)$ <u>donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme</u>

$a_{(AB)}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{1-4}{4-\frac{5}{2}}=-3\times\dfrac{2}{3}$=-2

$a_{(BC)}=\dfrac{4-1}{\frac{5}{2}+\frac{7}{2}}=\dfrac{3}{\frac{12}{2}}=3\times\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{2}$

$a_{(AB)}\times a_{(BC)}=-2\times\frac{1}{2}=-1$

donc (AB) et (BC) sont ⊥

donc ABCD est un rectangle

Cet élève obtient 17,5 sur 20 au problème de géométrie et 18,5 à l'épreuve dans sa globalité. La mémoire pratique explicitement activée renvoie à la reconstruction de souvenirs relatifs à plusieurs niveaux :

- souvenir de la caractérisation d'un rectangle comme parallélogramme ayant au moins deux côtés perpendiculaires, connaissances enseignées au niveau 5^e-4^e

- souvenir de la caractérisation vectorielle d'un parallélogramme, niveau 4^e-3^e
- souvenir du calcul des coordonnées de deux vecteurs, niveau 3^e
- souvenirs du calcul du coefficient directeur d'une droite et de son utilisation pour montrer que deux droites sont perpendiculaires, niveau 3^e

La technique associée à la démonstration de l'orthogonalité de deux vecteurs, qui peut être attendue en seconde, n'est pas utilisée. C'est au contraire une technique de 3^e qui la remplace. On peut s'interroger sur ce choix, mais plusieurs réponses peuvent être données. La première consiste à dire que l'élève ne connaît pas cette technique, ce qui est peu probable si l'on considère que sa note correspond à son niveau. Ou alors, il a estimé plus sûr d'utiliser une technique ancienne, donc bien rôdée ; ou bien il ne voit pas quel intérêt il a à utiliser ici la technique de seconde ; ou bien, en définitive, maîtrisant tout aussi bien l'une ou l'autre de ces techniques, il a choisi, en toute liberté, la technique de 3^e. La suite de sa copie montre, en tout cas, qu'il sait faire appel à bon escient aux niveaux de mémoire pratique nécessaires pour répondre, notamment lorsque seules des techniques enseignées en seconde sont efficaces.

- Réponse d'un quatrième élève

1. Pour démontrer que ABCD est un rectangle il faut démontrer que (BC) est parallèle à (AD), que (BA) est parallèle à (CD) et que et qu'il y ait des angles droits.
Pour cela on va prendre les vecteurs qui dirigent ces droites.

$\overrightarrow{BC}$ dirige (BC)

$\overrightarrow{BC}\left|\begin{matrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{matrix}\right.$ $\quad$ $\overrightarrow{BC}\left|\begin{matrix} -\frac{7}{2} - \frac{5}{2} \\ 1 - 4 \end{matrix}\right.$ $\quad$ $\overrightarrow{BC}\left|\begin{matrix} -6 \\ -3 \end{matrix}\right.$

$\overrightarrow{AD}$ dirige (AD)

$\overrightarrow{AD}\left|\begin{matrix} -2 - 4 \\ -2 - 1 \end{matrix}\right.$ $\quad$ $\overrightarrow{AD}\left|\begin{matrix} -6 \\ -3 \end{matrix}\right.$

Il n'y a pas besoin de faire le déterminant car $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ont les mêmes coordonnées donc $\overrightarrow{BC}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AD}$ et même $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$
Donc (BC)//(AD)

$\overrightarrow{BA}$ dirige (BA)

$\overrightarrow{BA}\left|\begin{matrix} 4 - \frac{5}{2} \\ 1 - 4 \end{matrix}\right.$ $\quad$ $\overrightarrow{BA}\left|\begin{matrix} \frac{3}{2} \\ -3 \end{matrix}\right.$

$\overrightarrow{CD}$ dirige (CD)

$\overrightarrow{CD}\left|\begin{matrix} -2 - (-\frac{7}{2}) \\ -2 - 1 \end{matrix}\right.$ $\quad$ $\overrightarrow{CD}\left|\begin{matrix} \frac{3}{2} \\ -3 \end{matrix}\right.$

$\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont les mêmes coordonnées donc $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et égaux et (BA)//(CD)
Dans ABCD les côtés sont parallèles 2 à2 donc c'est un parallélogramme.
On prend $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{BC}\begin{vmatrix}-6\\-3\end{vmatrix}$ $\overrightarrow{CD}\begin{vmatrix}\frac{3}{2}\\-3\end{vmatrix}$

Si $(-6\times\frac{3}{2})+(-3\times-3)=0$

alors $\overrightarrow{BC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{CD}$
-9+9=0
$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux
(BC) et (CD) sont perpendiculaires
comme (BA)//(CD)
(BA)⊥(BC)
et aussi à (AD)
Donc ABCD est un rectangle avec les côtés parallèles 2 à 2 et 4 angles droits.

Cet élève obtient 16 sur 20 à l'épreuve globale. La réponse qu'il fournit pour cette première question montre un important travail de reconstruction opéré par la mémoire pratique. En effet, s'il sait qu'il suffit de montrer que ABCD est un parallélogramme dont deux côtés sont perpendiculaires (niveau 5^e^-4^e^), c'est dans un vocabulaire de seconde et avec des techniques de ce niveau qu'il rédige sa démonstration. Il annonce tout d'abord le plan de démonstration qu'il va suivre :

« Pour démontrer que ABCD est un rectangle il faut démontrer que (BC) est parallèle à (AD), que (BA) est parallèle à (CD) et que et qu'il y ait des angles droits. Pour cela on va prendre les vecteurs qui dirigent ces droites »

Sans doute s'apprête-t-il à calculer les déterminants de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ d'une part, de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CD}$ d'autre part, comme il l'avoue lui-même lorsqu'il s'aperçoit, après la détermination des coordonnées de ces vecteurs, qu'« Il n'y a pas besoin de faire le déterminant », ce qu'il écrit après avoir remarqué que $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$. Toutefois son projet initial et annoncé, qui agit alors comme un cadre[40] contraignant, est poursuivi, puisque la remarque qu'il fait concernant l'égalité vectorielle n'est pas utilisée pour conclure immédiatement que ABCD est un parallélogramme. Au contraire, continuant de cheminer dans le cadre[41] qu'il s'est fixé, cet élève utilise l'égalité pour entraîner la colinéarité qui entraîne à son tour le parallélisme de deux côtés ; opération renouvelée pour démontrer le parallélisme des deux autres côtés. Ainsi, la poursuite de son projet initial entraîne « l'oubli », constaté par son professeur qui note laconiquement « Bien mais trop long » en face de la rédaction de sa réponse.

[40] Le terme de « cadre » est ici utilisé intentionnellement, et dans le sens que lui donne Halbwachs (1925, 1994) : « Par cadre de la mémoire nous entendons, non pas seulement l'ensemble des notions qu'à chaque moment nous pouvons apercevoir, parce qu'elles se trouvent plus ou moins dans le champ de notre conscience, mais toutes celles où l'on parvient en partant de celles-ci, par une opération de l'esprit analogue au simple raisonnement. » p. 129.

[41] Namer (1994), en comparant le terme de « cadre social » chez Durkheim et chez Halbwachs, note que pour ce dernier : « Les cadres sociaux de la mémoire seront faits de notions, c'est-à-dire essentiellement d'une réalité liant les pôles opposés du concept et du sensible. » p. 327. C'est bien dans ce sens que le terme de « cadre » est utilisé ici pour décrire la réponse donnée par cet élève, liant les pôles du « concept » de démonstration, qu'il a préalablement exposé dans le plan du raisonnement qu'il va suivre, et du « sensible », à travers les pratiques ostensives qu'il met en œuvre.

2. 3. 3. Conclusions tirées de l'étude de cet exemple

L'étude de ces quatre exemples montre différentes voies suivies pour l'objectivation de la mémoire pratique, et permet ainsi d'accéder à des épisodes de son travail tel qu'il a été mené par ces quatre élèves.

Un travail personnel achevé, non repris donc non réorganisé sur un objet de savoir précis (la caractérisation d'un rectangle), et depuis très longtemps (plusieurs années) au regard du temps didactique dans le cas des deux premiers élèves. La trace écrite de leur activité montre en effet, pour reprendre l'expression d'Halbwachs, qu'ils sont incapables de se « replacer au point de vue » de certains groupes dont ils ont été temporairement des membres, dans les classes qu'ils ont fréquentées, et en lesquels ils étaient conviés à s'engager dans un travail d'étude ; soit que ce travail d'étude n'ait jamais été personnellement mené au sein de ces groupes[42], soit que la capacité de s'y replacer soit hors d'atteinte.

Une réorganisation des souvenirs attestant d'un travail d'étude dans le cas des deux derniers élèves, et qui ouvre l'espace d'une certaine liberté, ou « capacité génératrice » pour reprendre une expression de Bourdieu (1992) :

> « […] j'ai dit "habitus" aussi et surtout *pour ne pas dire* "habitude"-, c'est-à-dire la capacité génératrice, pour ne pas dire créatrice, qui est inscrite dans le système des dispositions comme *art* – au sens fort de maîtrise pratique -, et en particulier *ars inveniendi*. » p. 97.

Ces réorganisations, à travers leurs multiples variantes interindividuelles occasionnées par les questions rencontrées par les élèves, et qui constituent autant de cadres pour elles, s'actualisent dans des formes diverses, comme l'attestent les réponses différentes de ces deux élèves. Les questions posées par autrui ou par soi-même constituent des occasions de travail de mémoire pratique, ce qui induit par conséquent, comme le notait Halbwachs (1925, 1994), que :

> « […] le passé, en réalité, ne reparaît pas tel quel, que tout semble indiquer qu'il ne se conserve pas, mais qu'on le reconstruit en partant du présent » p. VIII.

Cependant, cette liberté créatrice est encadrée, sauf à tomber dans une sorte de « délire créateur » débridé qui, passé au tamis de la logique, ne saurait résister mais attesterait, en définitive, d'une incapacité à saisir l'intelligence de la pratique des mathématiques. Elle est encadrée par le type de réorganisation des souvenirs que l'élève a précédemment réalisée, lors d'anciennes occasions ; c'est le cas du troisième élève qui va rappeler le souvenir de la démonstration de l'orthogonalité de deux droites. Elle peut aussi être encadrée par le type de

[42] « Le plus souvent, si je me souviens, c'est que les autres m'incitent à me souvenir, que leur mémoire vient au secours de la mienne, que la mienne s'appuie sur la leur. Dans ces cas au moins, le rappel des souvenirs n'a rien de mystérieux. Il n'y a pas à chercher où ils sont, où ils se conservent, dans mon cerveau, ou dans quelque réduit de mon esprit où j'aurais seul accès, puisqu'ils me sont rappelés du dehors, et que les groupes dont je fais partie m'offrent à chaque instant les moyens de les reconstruire, à condition que je me tourne vers eux et que j'adopte au moins temporairement leurs façons de penser. » (Halbwachs 1925, 1994) p. VI.

réponse, et donc de question, qui provoque la réorganisation des souvenirs ; c'est le cas du quatrième élève qui, dans le cadre qu'il établit pour la réponse à la question qui lui est posée, « oublie » des souvenirs anciens attachés à la caractérisation vectorielle du parallélogramme.
La phrase de Bourdieu (1992), précédemment citée, prend alors tout son sens si on l'interprète, sous l'éclairage de ces quatre exemples, à travers les termes de Bourdieu (1980) définissant « la production libre de pensées » par les élèves mais « dans les limites inhérentes aux conditions de sa production », limites fixées par le savoir et le travail de mémoire pratique de ce savoir :

> « […] système acquis de schèmes générateurs, l'habitus rend possible la production libre de toutes les pensées, toutes les perceptions et toutes les actions inscrites dans les limites inhérentes aux conditions particulières de sa production, et de celles-là seulement. À travers lui, la structure dont il est le produit gouverne la pratique, non selon les voies d'un déterminisme mécanique, mais au travers des contraintes et limites originairement assignées à ses inventions. » p. 92.

Une question se pose alors : quelles sont les limites vers lesquelles fait tendre le « travail de production », c'est-à-dire ici le travail d'étude ou encore le travail de la mémoire pratique ? Par exemple, se peut-il que l'oubli provoqué par la réorganisation à travers l'étude soit, sinon définitif, tout au moins durable pour un élève singulier, et si oui à quelles conditions ? Dans le prolongement de ces questions, on peut se demander quelle est la fonction de cet oubli et s'il est bon, mauvais, indifférent ou nécessaire pour l'apprentissage. La suite de cette thèse, et notamment les troisième et quatrième parties, tenteront de fournir des réponses à ces questions. La quatrième partie tentera aussi de montrer, lorsqu'on prend au pied de la lettre l'expression « travail de production », en quoi la production mathématique, ou encore la production de mathématiques nouvelles par les mathématiciens, engage elle aussi dans un travail de la mémoire, de rappel et d'oubli, dont nous aurons l'occasion de définir l'objet sur lequel il porte.

2. 4. Le savoir comme mémoire : le cas des mathématiques

Dans la classification donnée par Candau (1998), et que nous avons suivie, la mémoire, d'abord pratique, pouvait se manifester sous deux autres formes : une mémoire proprement dite ou de haut niveau, « […] mémoire de rappel ou de reconnaissance : convocation délibérée ou évocation involontaire de souvenirs autobiographiques ou appartenant à la mémoire encyclopédique[…] », et enfin une métamémoire « représentation que chaque individu se fait de sa propre mémoire […] et ce qu'il en dit ». Pour Candau :

> « […] à l'échelle des groupes, seule l'éventualité de la possession d'une mémoire de rappel et d'une métamémoire peut être envisagée. C'est bien cette éventualité-là qui est sous-jacente dans l'expression "mémoire collective". Cependant, il est impossible d'admettre que cette expression désigne une *faculté*, car la seule faculté de mémoire qui est réellement attestée est la mémoire individuelle : là encore, un groupe ne se souvient pas selon une modalité culturellement déterminée et socialement organisée, seule une proportion plus ou moins grande des membres de ce groupe en est capable. » p. 15.

Les types tout à fait différents de rédaction de réponses à la même question, produits par les quatre élèves de l'exemple précédent, constituent une vérification empirique locale de cette dernière assertion, ce dont tout enseignant fait d'ailleurs quotidiennement l'expérience pratique, dans l'enseignement en classe ou la confrontation avec les copies de ses élèves. Dans le prolongement de ces réflexions, se pose la question de la possibilité d'une mémoire collective et de la pertinence du concept pour analyser les activités mémorielles et leurs manifestations dans l'étude des mathématiques.

2. 4. 1. Mémoire collective et mémoire sociale dans l'œuvre d'Halbwachs

Namer (1987) discute, tout au long de la première partie de son ouvrage, de la signification des termes « mémoire sociale » et « mémoire collective » dans l'œuvre d'Halbwachs. Il montre que plusieurs acceptions ont été données par Halbwachs lui-même pour chacun de ces termes, l'une contredisant parfois l'autre. Il en vient à conclure, après analyse du chapitre de *La mémoire collective* consacré à « Mémoire collective et mémoire historique » :

> « De ce texte nous retenons un des changements de *la Mémoire* par rapport aux *Cadres*, c'est que la mémoire n'est collective que si elle est dominante ou au moins importante par le nombre dans la société globale nationale. En bref, la mémoire des textes de Saint-Simon, même si elle était portée par un groupe d'érudits, ne serait pas une mémoire collective ; mémoire dans la société, et non mémoire de la société, elle serait une mémoire sociale. » pp. 28-29.

Que dire alors de la mémoire relative à des « savoirs hautement techniques » ? Si elle dépend du nombre de personnes dans la société qui ont eu un jour « commerce » avec les mathématiques, alors on peut accepter le qualificatif « collective ». Mais qu'est-ce que cela signifie, au juste, que s'être un jour adonné à des pratiques mathématiques ? De quelles pratiques s'agit-il ? Si l'on s'en tient aux mathématiques de l'école primaire, assurément celles-ci sont l'objet de souvenirs partagés par l'écrasante majorité de la population. Mais au fur et à mesure que l'on monte dans la hiérarchie scolaire, cette proportion s'amenuise au point que Dieudonné (1987) chiffrait leur nombre à « environ 150 mathématiciens créateurs actifs dans un pays de la dimension de la France ». À ce stade, la mémoire des mathématiques perdrait à coup sûr son statut de « collective » !

Plus sérieusement, Namer (1987) dresse, à la fin de la première partie de son ouvrage, une typologie diachronique de la mémoire collective telle que mise en évidence par l'analyse de l'œuvre d'Halbwachs :

> « On aurait ainsi à l'origine une mémoire collective qui suivant un premier schéma serait en référence avec le vécu passé d'un groupe. Une seconde étape serait la mémoire sociale ; écho dégradé de la première, elle se diffuserait dans l'espace et dans le temps sous la forme de courants de pensée ; leur étude est essentiellement esquissée dans *la Mémoire collective* et touche à la mémoire culturelle. […] Une troisième étape de cette mémoire sociale où se dégrade et tend à disparaître la référence à une expérience vécue dans un groupe, c'est l'étape à la fois des mœurs, de l'histoire orale et de la tradition […] et du statut de "reliquat isolé du passé" […]. La dernière étape de l'itinéraire de la mémoire collective serait la pratique de l'histoire, reconstruction dont Halbwachs nous dit dans *la Mémoire collective* que, à l'exception de l'histoire vécue contemporaine, elle n'a plus de rapports du tout avec la mémoire collective. » p. 65-66.

Ce schéma s'applique assez bien, par exemple, à la pratique qui a consisté à faire apprendre à des générations entières, pendant des dizaines d'années au début du XX^{e} siècle, la géographie de la France sous la forme de liste de départements avec préfectures et sous-préfectures. Il y a tout d'abord une mémoire collective, celle des élèves qui fréquentent l'école où ils l'apprennent, puis une mémoire sociale de ces anciens élèves une fois sortis de l'école qui s'exprime par un courant de pensée (« Connaître la liste des départements, c'est très important pour connaître son pays ! » pourra dire un de ces anciens élèves), puis « un reliquat isolé du passé » (« De mon temps, on apprenait la liste des départements ») et enfin l'histoire qui pourra attester, grâce au travail d'historiens, que l'école enseignait la liste des départements au début du siècle. Ce schéma peut s'appliquer sans doute à des ordres ou types d'enseignement des mathématiques : quadrivium où étaient enseignées arithmétique et géométrie, au Moyen-Âge, ou enseignement des mathématiques à partir d'Éléments jusqu'au XIX^{e} siècle. Il semble, d'une part, inopérant dans un pays où les réformes de l'enseignement des mathématiques se succèdent tous les dix ans, environ, depuis la Réforme des mathématiques modernes et, d'autre part, il est de peu d'intérêt pour étudier comment la fréquentation et la pratique d'une institution telle qu'une classe de mathématiques provoque, crée, et utilise des phénomènes mnémoniques.

2. 4. 2. Les mathématiques entre mémoire collective et mémoire sociale : une mémoire institutionnelle

La nouvelle édition critique de 1997 de *La mémoire collective*, établie par G. Namer, contient un texte sur la mémoire des géomètres, absent des deux précédentes éditions de 1950 et 1968[43]. À partir de l'évocation d'Arnauld et Pascal, Halbwachs y traite de la mémoire du

[43] Dans ce texte, publié en 1997, les expressions entre parenthèses correspondent à d'autres formulations utilisées ou raturées dans le manuscrit. L'édition de 1968 de *La mémoire collective* mentionne son existence, en note au

« groupe des géomètres ». Il nous semble possible d'étendre son propos aux mathématiques en général[44] :

> « En d'autres termes, mis en présence de l'espace, le groupe des géomètres adopte instantanément une attitude bien définie. C'est pourquoi, il ne serait pas absurde de parler de la mémoire collective des géomètres et d'admettre même qu'il n'en est aucune (qui porte) où l'on enferme des souvenirs plus stables et plus anciens, précisément parce que l'image de l'espace qui leur est toujours présente (à leur groupe n'a pas changé depuis que leur groupe existe (en a défini)) ne change pas quant à ses propriétés et qu'ils découvrent tout de suite aujourd'hui ce que les premiers géomètres y ont signalé. […] Du moment où l'on se tourne vers la géométrie on s'engage dans des voies (ouvertes depuis) tracées par ceux qui nous ont précédés dans cette étude. Cette logique mathématique si rigoureuse, cette "chaîne de raisons" que nous n'avons qu'à suivre, comme si, les principes posés, tout s'ensuivait en vertu de règles qui semblent précéder les premiers efforts de réflexions des hommes et semblent s'être imposées à eux du dehors, reposent cependant sur des conventions sur lesquelles les membres d'un groupe se sont mis d'accord. (C'est la société des géomètres.) Il faut bien garder le souvenir de ces conventions si l'on veut se placer au point de vue du groupe : il faut "tourner la tête de ce côté-là" (disait Pascal). C'est-à-dire entrer dans la disposition d'esprit de ceux qui avant nous ont fait de la géométrie. » pp. 211-212.

Reprenant la définition de Pascal de la méthode idéale pour la démonstration géométrique (« définir tous les termes et prouver toutes les propositions »), Halbwachs conclut :

> « C'est donc (qu'il y a une mémoire des géomètres) que les géomètres se souviennent autant qu'ils raisonnent. Il y a même peu de cas où la nature collective de la mémoire apparaisse plus clairement puisque l'on ne se rappelle une démonstration et on ne la comprend qu'à condition que notre souvenir ou notre pensée soit exactement tel dans notre esprit que dans celui des autres géomètres. C'est dire que la mémoire ou la pensée collective est alors tout entière et non partiellement chez chaque individu. » p. 213.

Que se passe-t-il alors lorsque l'on étudie les mathématiques, par exemple dans la pratique ordinaire qui consiste à résoudre un problème ? Halbwachs apporte la réponse suivante :

> « Le problème est simplement posé. Nous ne trouvons qu'au prix d'un effort. Mais tout ne se passe-t-il pas, lorsque nous y parvenons, comme si nous avions retrouvé un souvenir qui était là, au point de convergence des déterminations d'où nous sommes partis. Quant à l'effort que nous avons accompli ne consistait-il pas à chercher et à trouver une des attitudes qui étaient conformes aux commandements du groupe des géomètres, c'est-à-dire à nous identifier plus pleinement avec lui ? » p. 214.

Cette mémoire est donc celle d'un savoir et de pratiques de ce savoir relatives à une communauté, celle des « géomètres ». Ces pratiques sont réglées par « des conventions sur lesquelles les membres d'un groupe se sont mis d'accord ». L'engagement dans ces pratiques exige qu'« il faut bien garder le souvenir de ces conventions si l'on veut se placer au point de vue du groupe », et qu'il faut aussi se souvenir des « termes et propositions » antérieurement étudiés. Résoudre un problème permet alors de retrouver un souvenir de cette mémoire collective dont le savoir qui est la réponse au problème est une forme d'expression de la mémoire.

---

bas de la page 147 : « […] le manuscrit ébauche une analyse de l'espace géométrique mais cette ébauche est restée trop informe pour être publiée » !

[44] Mathématiques qu'Halbwachs connaissait bien par ailleurs, puisqu'il fut l'un de ceux qui introduisirent la méthode statistique en sociologie. À ce titre, il fut membre de la Société statistique de Paris et de l'Institut international de statistique. Il fut par ailleurs, en 1924, le co-auteur avec le mathématicien M. Fréchet d'un ouvrage intitulé « Le calcul des probabilités à la portée de tous ».

Cette analyse d'Halbwachs contient une grande part d'implicite qu'il est nécessaire de lever afin de rétablir sa pertinence. Elle suppose en effet qu'est constituée une communauté stable (celle des géomètres), avec des pratiques stables relatives à un savoir stable lui-aussi. C'est oublier qu'il ne saurait y avoir de savoir « pur », transcendant à toute institution. Il n'y a pas de reproche à adresser ici à des analyses rédigées, il y a une soixantaine d'années, alors qu'évidemment, une théorie de la transposition institutionnelle des savoirs telle qu'elle est développée dans l'approche anthropologique en didactique n'existait pas. Fondateur de cette approche en didactique des mathématiques, Chevallard (1991), dans la postface à la seconde édition de *La transposition didactique* l'expose ainsi :

> « L'épistémologie actuelle, en effet, nous donne une vision très restreinte de la *vie des savoirs* dans la société. Ce qui est caractéristique des savoirs, notamment, c'est leur "multilocation". Un savoir donné S se retrouve en divers types d'institutions I, qui sont pour lui, en termes d'écologie des savoirs, autant d'*habitats* différents. Or, à considérer ces habitats, on aperçoit immédiatement que le savoir considéré vient régulièrement y occuper des *niches* bien distinctes. Ou, pour le dire autrement, que le rapport institutionnel de I à S, $R_I(S)$, que j'appellerai aussi *la problématique de I relativement à S*, peut être fort différent. Corrélativement, la manière dont les agents de l'institution vont "manipuler" ce savoir va varier elle aussi. […] L'institution I peut avoir, vis-à-vis de S, une problématique d'*utilisation*. […]L'institution I peut avoir, vis-à-vis de S, une problématique d'*enseignement* …. […] … l'institution I peut avoir vis-à-vis de S une problématique *de production*. […] L'apport majeur de la théorie de la transposition didactique, la grande découverte – j'ose l'écrire – dont nous n'avons pas fini de reconnaître les conséquences pour l'anthropologie des savoirs, c'est la mise à jour *d'un quatrième type* de manipulation : la manipulation *transpositive* des savoirs. C'est, aussi, corrélativement, la mise en évidence d'institutions *de transposition* des savoirs – les *noosphères* -, cette intendance si désireuse de se faire oublier, qui semble s'évanouir aussitôt qu'elle a produit ses effets, et dont nous sommes ordinairement oublieux jusqu'à la dénégation. » pp. 210-211-214.

Il s'ensuit donc différents types ou « régimes » pour ce qui peut être identifié comme un même savoir, ce qui complexifie la question de la possibilité d'une mémoire collective des mathématiques, ou « du savoir des géomètres » pour reprendre la formulation d'Halbwachs. De plus, nous n'avons jusqu'à présent envisagé le savoir qu'à travers des pratiques accomplies en telle institution (des classes de mathématiques) par tel ou tel sujet (des élèves) ; que ces pratiques soient évoquées, racontées par des élèves, ou que nous puissions y avoir accès par l'intermédiaire de leur trace écrite dans les copies d'élèves. Mais on pourrait alors se poser légitimement la question de ce qu'est le savoir, indépendamment des pratiques grâce auxquelles nous y accédons. Savoir transposé certes, mais encore ? La réponse est fournie par Chevallard (1994a) :

> « […] *on ne parle jamais de savoir que par métonymie*. La partie – le savoir – désigne un tout qui inclut *aussi* domaine de réalité et pratique sociale. Ce que nous nommons savoir *représente*, au sens diplomatique du terme, un domaine de réalité et ses sous-domaines en même temps qu'un système de pratiques sociales, dont ce savoir est à la fois un émergent et une condition ; et il les représente *sans toutefois les annuler*. En faisant donc du savoir une hypostase de cette trinité, nous poserions mal, au double niveau théorique et pratique, le problème de la transposition didactique. Ce qui doit être transposé est bien cette "trinité" – domaine de réalité, pratique, savoir – dont l'ensemble ne peut exister, à l'instar d'un nœud borroméen, si l'un quelconque de ses éléments se perd. »[45] pp. 176-177.

[45] La définition d'un domaine de réalité est donnée par Chevallard (1988) : « Toute institution admet un environnement qui est un univers culturel ; tout univers culturel est une institution ; toute institution peut fonctionner comme univers culturel pour d'autres institutions (dont elle constitue alors l'environnement culturel). […] Les domaines de réalité associés à un univers culturel (domaines de réalité culturels) y sont repérables par les champs lexicaux présents dans cet univers culturel. […] Au sein d'un univers culturel

Si nous reprenons l'exemple de la question de l'épreuve de géométrie de l'évaluation externe, « montrer que ABCD est un rectangle », on peut dire alors qu'à travers les traces écrites de l'activité d'élèves s'engageant dans la production de la réponse, ce sont, en même temps que des pratiques relatives à un savoir, des domaines de réalité institutionnels qui sont rappelés. Ainsi, nous avions pu identifier différents niveaux, en termes de « couches de mémoire pratique », que nous référions à telle classe (5^e, 4^e, 3^e ou seconde). Avec ces classes, ce sont aussi les souvenirs de domaines de réalité institutionnels qui sont engagés, et qui sont par exemple accessibles par le lexique relatif aux droites lorsqu'il s'agissait de montrer le parallélisme ou l'orthogonalité. Dès lors, « se replacer au point de vue du groupe » prend un tout autre sens pour la mémoire du savoir : il s'agit conjointement du domaine de réalité, du savoir, des pratiques de ce savoir dans ce domaine de réalité, ou encore de l'institution considérée dans ces trois dimensions. La mémoire des mathématiques est donc effectivement sociale, plus précisément institutionnelle. Dans le cas des mathématiques enseignées, une dimension particulière vient se surajouter : celle du temps didactique qui s'exprime aux trois niveaux précédents (domaine de réalité, pratique et savoir), ceux-ci se transformant conjointement au fur et à mesure de l'avancée du temps, scandée par l'introduction d'objets mathématiques nouveaux. L'institution didactique, même si elle demeure constituée des mêmes personnes, occupant les mêmes places, aux prises avec des pratiques qui peuvent apparaître comme de même nature, celles des mathématiques, ne peut que, corrélativement, se transformer elle-aussi. La mémoire didactique des mathématiques ne peut être alors qu'une mémoire relative à une dynamique institutionnelle.

2. 4. 3. Mathématiques et spécificité de la mémoire humaine

L'existence de cette dynamique institutionnelle une fois posée, nous pouvons tenter, afin de l'examiner du point de vue de la mémoire des pratiques mathématiques qui s'accomplissent, d'en « neutraliser » momentanément deux variables : nous pouvons bloquer les variables institutionnelle et temporelle. Soit donc une institution I à un instant t, et des « sujets » de I qui s'engagent dans des pratiques mathématiques au temps t. Sans doute peut-on, en première approche, y voir, tout comme Halbwachs, ce que tous ceux qui se sont un jour livrés au travail mathématique ont connu :

> « Cette logique mathématique si rigoureuse, cette "chaîne de raisons" que nous n'avons qu'à suivre, comme si, les principes posés, tout s'ensuivait en vertu de règles qui semblent précéder les premiers efforts de réflexions des hommes et semblent s'être imposées à eux du dehors […] ».

---

déterminé, chaque institution produit une image d'un certain nombre de domaines de réalité culturels. Elle produit en outre, éventuellement, des domaines de réalité institutionnels, qui deviendront éventuellement des domaines de réalité culturels (et qui sont des domaines de réalité culturels relativement à l'institution considérée comme univers culturel). […] La production, au sein d'une institution, d'un domaine de réalité institutionnel (éventuellement comme image d'un domaine de réalité culturel) est contemporaine de la production d'un savoir de ce domaine de réalité : un domaine de réalité (institutionnel) et le savoir de ce domaine (au sein de l'institution) existent comme tels l'un par l'autre, l'un renvoyant à l'autre. » pp. 97-98.

On est en droit de s'interroger sur cette "chaîne de raisons" qui semble aller de soi, s'imposer aux hommes par une sorte de logique externe, relevant quasiment de la transcendance ? La deuxième partie de la phrase d'Halbwachs fournit une réponse : [elles] « reposent cependant sur des conventions sur lesquelles les membres d'un groupe se sont mis d'accord. »

L'histoire des mathématiques abonde de ces types de « conventions sur lesquelles les membres d'un groupe se sont mis d'accord ». Mais ce phénomène « d'accord » entre les membres d'un groupe n'a souvent pu être réalisé que par l'intermédiaire d'un processus continué à l'échelle historique, et donc très long à l'échelle d'une vie humaine, alors que les « membres du groupe » n'avaient plus qu'une existence virtuelle à travers les œuvres qu'ils avaient laissées, et que leurs continuateurs avaient critiquées, retravaillées, dépassées.
L'exemple du développement du calcul infinitésimal est, à cet égard, tout à fait éclairant. Ainsi Raymond (1976) souligne-t-il, à propos du nouveau symbolisme introduit par Leibniz, à qui l'on doit par exemple les écritures dy, $\int$, et donc $\int dy=y$ que :

> « […] ce n'est pas un trait spécial du génie de Leibniz ; il suppose l'universalisation des échanges sociaux portée au second niveau d'un langage universel et sans ambiguïté et d'une systématisation des moyens de correspondance ; il est à la fois la cause et l'effet de la concentration des divers résultats scientifiques et de l'apparition des premiers ouvrages pédagogiques (ainsi du traité du marquis de L'Hospital, *L'analyse des infiniment petits*, conçu comme complément d'une œuvre à paraître de Leibniz sur le calcul intégral, relu par Leibniz lui-même, et influent sur un long terme). » p. 77.

En effet, ce symbolisme permet à Leibniz de donner en 1684 la définition de la différentielle grâce à la sous-tangente qu'il emprunte au *Traité des sinus du quart de cercle* de Pascal, dont il dira avoir tiré son inspiration. Pascal est mort depuis 1662, mais au cours d'une mission diplomatique à Paris en 1672, Leibniz y a rencontré Huygens qui l'a initié, entre autres, à l'œuvre de Pascal. Leibniz identifie en 1684 le rapport $\frac{dy}{dx}$ à $\frac{y}{sous-tangente}$.

Un siècle plus tard, en 1897, Lagrange publie un ouvrage intitulé *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissants, de limites ou de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies*, dans lequel il rejette notamment la méthode des infiniment petits de Leibniz. Le projet de Lagrange, rendu public dès 1772, est de substituer l'emploi des fonctions dérivées à celui des différentielles[46]. Ainsi, dans les *Leçons sur le calcul des*

[46] Ce projet est aussi, comme le note Friedelmeyer (1989) celui d'un contemporain de Lagrange, Arbogast, qui dès 1789, soit huit ans avant la *Théorie des fonctions analytiques* de Lagrange, envoie à l'Académie de sciences de Paris, un « Mémoire sur de nouveaux principes de calcul différentiel et intégral indépendants de la théorie des infiniments petits et des limites », dont Lagrange et Legendre seront chargés de faire un rapport. Lagrange lui rend hommage, page 5 de la *Théorie des fonctions analytiques* : « Depuis, Arbogast a présenté à l'académie des sciences un beau mémoire où la même idée est exposée avec des développements et des applications qui lui appartiennent. Cet ouvrage ne doit rien laisser à désirer sur l'objet dont il s'agit ; mais l'auteur n'ayant pas encore jugé à propos de le faire paraître… ».

fonctions de 1808, figure le remplacement explicite et revendiqué par Lagrange de la notation différentielle $\frac{dy}{dx}$ par la notation de la dérivée $f'x$:

> « Quoique les fonctions dérivées doivent leur origine au développement de la fonction primitive, lorsqu'on augmente la variable d'une quantité quelconque i, on voit qu'elles sont indépendantes de cette même quantité, qui ne sert, pour ainsi dire, que comme un outil pour former ces fonctions. Ainsi, dès qu'on aura trouvé, par la considération du premier terme du développement, des règles générales pour passer d'une fonction primitive à la fonction dérivée, on pourra faire abstraction de tout développement, et regarder la dérivation des fonctions comme une nouvelle opération d'algèbre plus générale et d'une beaucoup plus grande étendue que l'élévation aux puissances. Ceux qui savent le calcul différentiel n'auront pas de peine à se convaincre que les fonctions dérivées $f'x$, $f''x$, etc.,y', y'', etc., reviennent aux quantités qu'on désigne dans ce calcul par $\frac{d \bullet fx}{dx}, \frac{d^2 \bullet fx}{dx^2}$, etc., $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, etc. et ainsi des autres expressions semblables. »[47]

« L'accord » dont parlait Halbwachs n'est donc, bien sûr, pas le fruit d'une sorte de pacte passé entre « membres d'un groupe ». Il résulte, en revanche, d'un long processus historique qui a fixé, à l'issue de confrontations, de débats, de dépassements théoriques, des notations symboliques et des règles pour leur bonne utilisation, et dont nous ne sommes, en définitive, que les héritiers, à travers l'enseignement des mathématiques que nous avons reçu.

Il faut alors souligner un point qui nous paraît très important pour l'orientation que nous donnons à cette thèse. La « chaîne de raisons » dont parlait Halbwachs, peut alors, en ce point, s'éclairer de la « chaîne d'actes » volontaires, conscients et revendiqués, qui substituent certaines « chaînes d'actions » par d'autres. Ce sont donc, pour les mathématiques, des chaînes d'actes qui commandent aux chaînes d'actions, qui commandent enfin les gestes. Ainsi en est-il, dans la « chaîne d'actes » qui ponctuent le développement du calcul infinitésimal au cours du XVIII^e siècle, ou de l'acte de substitution, par Lagrange, de la « chaîne d'actions » propre au calcul de la différentielle par celle qui est spécifique du calcul de la dérivée. C'est dans ce sens, et sans doute dans ce sens seulement, que l'on peut parler de la mémoire dont est dépositaire le savoir mathématique. L'accomplissement d'un geste mathématique (par exemple, en dérivant un monôme de degré n, placer le n comme coefficient du monôme de degré n-1 obtenu) actualise alors le souvenir du choix du type d'action (dériver), donc de l'acte (identifier la dérivée au coefficient du terme du premier ordre dans le développement en série de Taylor de la fonction) volontaire et soumis à des (bonnes) raisons (d'ordre mathématique), dont le savoir est porteur. Nous devrons revenir sur ce point que nous développerons beaucoup plus en détail lorsque nous traiterons, dans la quatrième partie, d'exemples de production de savoirs mathématiques nouveaux au XVII^e et au XVIII^e siècle.
Mais d'ores et déjà, poser de cette manière la définition de la mémoire du savoir mathématique ne nous semble guère s'éloigner de la définition de la mémoire qu'en donne, en anthropologie, Leroi-Gourhan (1964) :

> « Mémoire est entendu, dans cet ouvrage, dans un sens très élargi. C'est non pas une propriété de

[47] Pour une analyse historique de l'évolution du calcul infinitésimal, on peut se reporter par exemple à Houzel, Ovaert, Raymond, Sansuc (1976), et pour son histoire à Dahan-Dalmedico, Peiffer (1986).

> l'intelligence mais, quel qu'il soit, le support sur lequel s'inscrivent les chaînes d'actes. On peut à ce titre parler d'une "mémoire spécifique" pour définir la fixation des comportements des espèces animales, d'une mémoire "ethnique" qui assure la reproduction des comportements dans les sociétés humaines et, au même titre, d'une mémoire "artificielle", électronique dans sa forme la plus récente, qui assure, sans recours à l'instinct ou à la réflexion, la reproduction d'actes mécaniques enchaînés. » p. 267.

Quel est le support sur lequel s'inscrivent les chaînes d'actes, ou plutôt d'actions, en mathématiques ? Il est toujours constitué d'un dispositif constitué d'un objet pour recevoir et conserver une trace, depuis le sable des Grecs à l'écran de l'ordinateur en passant par le tableau ou la feuille de papier, et d'un objet pour tracer (bâton, craie, crayon, clavier). Mais le dispositif constitué, tout reste à faire ! Autrement dit, certains gestes, visibles et « extériorisables », donc soumis à contrôle social, vont être requis pour l'utilisation convenable de l'outil ainsi constitué, l'ensemble permettant d'accomplir ce qui pourra être identifié par une personne extérieure comme étant une activité mathématique. Or, comme le note Leroi-Gourhan (1964) :

> « La synergie opératoire de l'outil et du geste suppose l'existence d'une mémoire dans laquelle s'inscrit le programme du comportement. » p. 36.

Distinguant entre la mémoire chez l'animal et chez l'homme, il souligne la spécificité de la mémoire chez ce dernier :

> « On a vu plus haut que chez l'homme l'amovibilité de l'outil et du langage déterminait une mise à l'extérieur des programmes opératoires liés à la survie du dispositif collectif […] » p. 36.

Et donc :

> « Le fait fondamental, relatif à la mémoire humaine, a déjà été discuté : comme l'outil, la mémoire de l'homme est extériorisée et son contenant est la collectivité ethnique. » p. 64.

Cette extériorité ouvre alors la voie à ce que Leroi-Gourhan nomme « l'expansion de la mémoire », qui va de la transmission orale des programmes jusqu'à la mémoire électronique, en passant par la transmission écrite.

La mémoire pratique suppose un dispositif outillé par des gestes, ce terme étant pris tout aussi bien dans son sens premier que dans le sens élargi signifiant l'activation de l'outil, et une mémoire de la personne résultant de l'intériorisation de chaînes opératoires portées par « la collectivité ethnique » qui joue le rôle de mémoire (l'homme ne naît pas, en effet, doté d'une mémoire atavique des mathématiques, comme d'ailleurs de bon nombre d'autres savoirs !)[48]. La mémoire du savoir contient, elle-aussi, ces trois termes. Extérieure à l'homme, institutionnelle donc relevant d'une « collectivité ethnique », déposée dans des ouvrages ou

---

[48] On comprend alors l'inefficacité pratique de « l'institution des fiches » mise en place par Ludivine et Sarah, qui ne saurait se suffire d'elle-même, sans les gestes de personnes qui permettront de convertir cette mémoire des fiches en mémoire opératoire pour la pratique du savoir. C'est ce que note Leroi-Gourhan (1964), dans un paragraphe consacré aux fiches : « […] si un fichier est une mémoire au sens strict, c'est une mémoire sans moyens propres de remémoration et l'animation requiert son introduction dans le champ opératoire, visuel et manuel, du chercheur. » p. 73.

des pratiques (associées à la production, l'utilisation, l'enseignement, ou la transposition), elle est constituée d'outils et de règles opératoires permettant d'engager les gestes pour la manipulation de l'outil.
On rejoint en ce point le sens à donner à la « trinité » mentionnée par Chevallard (1994a) pour pouvoir définir un savoir, métonymie commode pour pouvoir en parler puisque qu'il est constitué du triplet (domaine de réalité, pratique, savoir). Dans un domaine de réalité à l'intérieur d'une institution, par exemple les mathématiques en terminale S, la pratique qui s'y déploie est outillée par les gestes permis par le savoir qui les commande et qui agit comme mémoire de ces gestes, tant pour règler leur activation, que pour se (re)construire par ces gestes en tant que mémoire. Les trois termes du triplet interagissent l'un sur l'autre et le savoir mathématique peut être tout à la fois vu comme mémoire extérieure, issue de choix sociaux antérieurs, qui commande les gestes accomplis dans l'institution, que comme mémoire construite à partir d'une pratique dans une institution.
Aussi, le schéma qui vient d'être décrit (outil, geste, mémoire extérieure au sujet) peut tout aussi bien s'appliquer à la mémoire pratique qu'à la mémoire du savoir mathématique.

C'est à partir de ces outils et de leur manipulation en situation, à travers des gestes qui se donnent à voir, que peut alors émerger la question du sens, de la signification, (termes qui, quant à eux, ne sont pas directement montrables, visibles), relativement à l'institution à l'intérieur de laquelle ces gestes instrumentés sont accomplis ; donc la question de la mémoire sémantique, si tant est que ce terme est encore un sens, que nous avions dû abandonner provisoirement dans la première partie, tant sa définition nous paraissait impraticable. C'est la conclusion à laquelle aboutit aussi Martinelli (1998), dans un tout autre domaine, puisqu'il s'agit d'une étude portant sur les forgerons mooses au Burkina-Faso :

> « Par eux-mêmes, les gestes et les opérations sont asémantiques, de même d'ailleurs que les noms et les mots. Ils sont dépourvus de signification tant que ne sont pas mis en œuvre des savoirs. Ces savoirs portent sur les relations qui solidarisent tous les éléments du système opératoire (outils, matières, gestes, ressources énergétiques et humaines). Ils portent aussi sur la compréhension des circonstances du travail. La signification n'est pas une somme d'actes opératoires, aussi nombreux soient-ils, mais la résultante des rapports de plus en plus ramifiés et complexes qui se créent entre eux, dans un contexte social de réalisation. » pp. 74-75.

Que sont ces outils, ces gestes guidés par des règles de « bonnes » manipulations ? Quel « sens » donnent-ils à l'activité mathématique ? C'est ce que décrivent les derniers développements de l'approche anthropologique en didactique des mathématiques.

2. 4. 4. Les outils ostensifs du travail mathématique

2. 4. 4. 1. Quelques éléments de la théorie anthropologique du didactique relatifs aux ostensifs

Bosch et Chevallard (1999) se démarquent de certaines approches classiques en didactique qui présupposent une certaine transparence du savoir mathématique. Il en résulte que pour ces approches, étant vues comme non questionnables, les mathématiques et leurs pratiques ne sont, par conséquent, pas questionnées. Ces approches centrent alors, essentiellement, leurs objets d'étude sur les sujets engagés dans la relation didactique : l'élève et le professeur. À l'inverse, Bosch et Chevallard interrogent la théorie des situations, et la théorie anthropologique, à partir de la place qu'elles accordent l'une et l'autre au savoir mathématique.
Ainsi, reprenant la problématique de la théorie des situations, ils affirment que :

> « Elle [la théorie des situations] suppose […] que *les connaissances mathématiques ne peuvent s'appréhender qu'à travers les activités qu'elles permettent de réaliser, et donc les problèmes qu'elles permettent de résoudre.* »

La théorie de la transposition didactique montre, quant à elle, que :

> « […]*le savoir mathématique* (qu'il soit "savant", "enseigné" ou "à enseigner") *est à l'origine de toute problématicité didactique.* »

Il en résulte alors que :

> « […] ce savoir ne peut être pris comme un donné inquestionnable et que les recherches en didactique des mathématiques vont être conditionnées par le type de modélisation des mathématiques auquel on a recours […] ».

C'est bien en ce point que nous sommes parvenus en nous interrogeant, depuis le point de vue de la mémoire collective d'une institution, tel qu'il est développé par Halbwachs, sur la spécificité du savoir mathématique comme mémoire. Se poser la question de la *nature de l'activité* qui est l'enjeu de la création de l'institution qui réunit les sujets, professeur ou élèves, nous paraît dès lors incontournable. Et on peut s'interroger sur les raisons pour lesquelles cette nature, foncièrement liée à des activités relatives à un savoir spécifique, est malheureusement trop souvent oubliée, au risque de tomber dans des généralités qui, parce qu'elles ignorent cette spécificité, débouchent sur des banalités ou des erreurs.
Il s'agit, certes, d'une activité didactique, donc d'étude, mais la prise en compte de cette seule donnée ne suffit pas : il est nécessaire de pousser plus loin l'analyse pour se pencher davantage sur *l'objet* de l'étude. Cette condition nous apparaît minimale si l'on veut saisir, de façon plus large, l'activité dans laquelle les sujets sont engagés, et ceci afin de pouvoir rendre compte de son intelligibilité.

La théorie anthropologique développe une modélisation de l'activité mathématique et de l'activité enseignante. Mais elle s'emploie aussi à décrire les moyens, les outils, grâce auxquels s'accomplit le travail mathématique, tant dans le cours de l'étude que « hors étude », tant pour les élèves (en train d'apprendre) que pour « l'homme », au sens générique du terme, engagé dans une activité mathématique. Car, si les élèves étudient et si le professeur enseigne ou dirige cette étude, il est nécessaire de ne pas perdre de vue qu'il s'agit de l'étude d'un savoir spécifique, les mathématiques, parmi les savoirs hautement techniques, et non de l'étude du français, de l'informatique, de la mécanique générale, de la cuisine, du droit, de la bicyclette, ou du saut en hauteur. Les outils grâce auxquels s'accomplissent les activités mathématiques, outils que les élèves ont par ailleurs à étudier, afin d'apprendre à les utiliser correctement, parce qu'ils doivent s'en saisir, sont donc, eux aussi, spécifiques. C'est la tâche des didactiques que d'analyser et de préciser ces spécificités, selon la nature du savoir dont elles étudient l'étude. Pour ce qui concerne les mathématiques, et dans la modélisation proposée par l'approche anthropologique, les objets engagés pour la réalisation d'une activité se différencient en objets ostensifs et objets non-ostensifs, dont Chevallard (1994b) donne les définitions suivantes :

> « a) On appelle *ostensifs* les objets qui ont pour nous une forme *matérielle, sensible,* au demeurant quelconque. Un objet matériel (un stylo, un compas, etc.) est un ostensif. Mais il en va de même :
> - des gestes : nous parlerons d'ostensifs *gestuels* ;
> - des mots, et, plus généralement, du discours : nous parlerons ici d'ostensifs *discursifs* (ou langagiers) ;
> - des schémas, dessins, graphismes : on parlera en ce cas d'ostensifs *graphiques* ;
> - des écritures et formalismes : nous parlerons alors d'ostensifs *scripturaux*.
> Le propre des ostensifs, c'est de pouvoir être *manipulés*, ce mot étant entendu en un sens large : manipulation au sens strict (celle du compas, ou du stylo, par exemple), mais aussi par la voix, le regard, etc.
> b) Au contraire des ostensifs, les *non-ostensifs* - soit ce que l'on nomme usuellement *notions*, *concepts*, *idées*, etc. - ne peuvent pas, à strictement parler, être manipulés : ils peuvent seulement être *évoqués*, à travers la manipulation d'ostensifs associés. Ainsi, pour pouvoir dire que, pour résoudre l'équation $2^x = 10$ "on prend le logarithme des deux nombres", il convient que le *non-ostensif* qu'est le concept de logarithme existe, mais on ne peut le dire que parce que l'*ostensif* (langagier) "*logarithme*" est disponible. Pour réaliser l'action correspondante, en outre, il faudra disposer d'ostensifs *scripturaux* adéquats, qui permettront par exemple *d'écrire* :
> $2^x = 10 \Leftrightarrow \ln 2^x = \ln 10 \Leftrightarrow x \ln 2 = \ln 10 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 10}{\ln 2}$.
> La technique de résolution des équations de la forme $a^x = b$ mise en œuvre ici suppose ainsi, à côté d'un certain nombre de non-ostensifs (concept de logarithme), *un système d'ostensifs articulés à ces non-ostensifs*. […] Toute technique suppose l'activation d'un complexe d'objets, les uns ostensifs (ils seront manipulés), les autres non ostensifs (ils seront évoqués). La manipulation des ostensifs est réglée à l'aide notamment des non-ostensifs, et ces derniers, inversement sont évoqués à l'aide des ostensifs. Il y a ainsi *une dialectique nécessaire entre ostensifs et non-ostensifs*. » p. 69.

De plus, ces objets ostensifs (qui se donnent à voir) possèdent, d'une part, la particularité de réaliser le travail mathématique dans lequel ils sont engagés, mais aussi, d'autre part, d'en contrôler la pertinence et d'anticiper sa poursuite. Chevallard (1994b) précise cette double spécificité de ces outils du travail mathématique :

> « Un objet ostensif apparaît comme possédant deux valences : une valence *instrumentale*, d'une part, une valence *sémiotique*, d'autre part, ces deux valences apparaissant, *au sein d'une technique donnée*, associées comme le recto et le verso d'une feuille.
> a) Dire qu'un ostensif a une valence *instrumentale* signifie qu'il permet d'agir, de travailler. […] Le discours, ici, n'a pas simplement une fonction de communication : *il est un outil qui permet un travail*. Il en va de même avec les autres registres ostensifs (matériel, gestuel, graphique, scriptural).
> b) Dire qu'un ostensif a une valence *sémiotique* signifie qu'il permet de voir, d'apprécier de manière sensible, le travail *fait*, le travail *en train de se faire*, et d'envisager le travail *à faire* - et cela aussi bien pour le sujet que pour l'observateur. » p.71.

Ostensifs et non-ostensifs apparaissent aussi conjointement dans le travail mathématique qui se fait :

> « Les ostensifs constituent la partie perceptible de l'activité, c'est-à-dire ce qui, dans la réalisation de la tâche, se donne à voir, aussi bien à l'observateur qu'aux acteurs eux-mêmes. Dans l'analyse du travail mathématique, les éléments ostensifs font partie du réel empirique, accessible aux sens. Par contraste, la présence de tel ou tel non-ostensif dans une pratique déterminée ne peut être qu'induite ou supposée à partir des manipulations d'ostensifs institutionnellement associés. »[49]

C'est, si l'on reprend l'exemple de l'apport historique de Lagrange au développement du calcul différentiel, ce que lui-même revendique lorsqu'il substitue l'ostensif $f'(x)$ à l'ostensif $\frac{dy}{dx}$.

2. 4. 4. 2. Un exemple dans la *Théorie des fonctions analytiques* de Lagrange : les systèmes d'ostensifs outillent les pratiques

Ce changement n'est pas anodin et ne relève pas d'un « caprice » mathématique. En effet, Ovaert (1976) récapitule les intentions de Lagrange quant aux objectifs qu'il se fixe et les critiques qu'il formule à l'encontre de l'emploi des anciennes méthodes du calcul infinitésimal :

> « *1. Insistance sur l'emploi des fonctions dérivées et non des différentielles* […]
> Selon Lagrange, l'emploi des différentielles a non seulement entraîné un manque de clarté et de rigueur, mais il a suscité un obstacle épistémologique à la construction du calcul différentiel à plusieurs variables. […]
> *2. Établir les principes du calcul* différentiel et intégral sur des règles purement *algébriques*, à l'exclusion de toute considération de *géométrie* et de *mécanique* […]
> *3.* Le calcul différentiel et intégral doit apporter des *bases claires* à la géométrie et à la mécanique […]
> *4.* Le recours à toute *métaphysique* des infiniment petits est expressément exclu. […]
> *5.* À l'opposé, il faut recourir à des *analyses rigoureuses* dans les domaines qui le permettent et retrouver la perfection des raisonnements des *Anciens*, mais par l'usage des moyens théoriques *modernes*. […] Nous voyons que, comme Euler, Lagrange situe la *source de la rigueur* dans la *manipulation algébrique et formelle* des fonctions et leurs développements en série. […]
> *6.* Ces conclusions font apparaître un autre aspect important des intentions de Lagrange : la méthode des infiniment petits est *efficace*, il ne faut *renoncer* à aucun de ses résultats. Il est donc inutile de reprendre toutes les applications de cette méthode […] Seuls sont à corriger les *principes*. […] »[50]

On peut relever de cette liste d'objectifs quelques non-ostensifs, quelques « concepts mathématiques », émergents cristallisés de certaines pratiques mathématiques dont l'engagement, la convocation dans les « nouvelles » pratiques du calcul infinitésimal élaborées par Lagrange vont être réorganisés, modifiés, déplacés par rapport aux anciennes. Ainsi les principes du calcul différentiel et intégral doivent découler, pour Lagrange, du calcul algébrique et non plus de la géométrie, comme le faisaient Leibniz, les Bernoulli, L'Hospital, ou de la mécanique, comme le faisait Newton à travers la méthode des fluxions. Tout au contraire, dans la *Théorie des fonctions analytiques* de Lagrange c'est « la théorie des fonctions », l'analyse, qui va fournir des applications à la géométrie et à la mécanique. Pour cela, les « fondements » du calcul infinitésimal sont revisités, eux aussi. Apparaissent en effet pour Lagrange, à cette époque, comme relevant de la métaphysique, les méthodes des infiniment petits et des limites. Cette dernière méthode, utilisée par Maclaurin et D'Alembert,

---

[49] Bosch et Chevallard (1999), op.cit. p 92.
[50] Ovaert (1976), op. cit., pp. 167-171.

et qui n'a pas encore acquis la rigueur à laquelle elle accédera au cours du XIX^e siècle, encourt le reproche de Lagrange : « l'espèce de métaphysique que l'on est obligé d'y employer, est, sinon contraire, du moins étrangère à l'esprit de l'analyse, qui ne doit avoir d'autre métaphysique que celle qui consiste dans les premiers principes et dans les premières opérations fondamentales du calcul. » C'est, entre autres choses, de cette « métaphysique » que veut se dégager Lagrange, mais aussi de l'écriture du rapport de deux différentielles considéré comme « réduit à l'expression vague et indéterminée de zéro divisé par zéro ».
Le développement des mathématiques au cours du XVIII^e siècle, permet à Lagrange d'utiliser diverses « clés » pour réaliser son projet. En effet, Euler a développé le non-ostensif « fonction » (défini comme étant « une expression analytique composée d'une manière quelconque de cette quantité variable et de nombres ou de quantités constantes » pour les fonctions d'une variable[51]), introduit l'ostensif $f(x,y,z,\ldots)$[52] . Newton et Euler ont obtenu les développements en série entière de fonctions rationnelles et irrationnelles, de l'exponentielle et du logarithme, du sinus et du cosinus, de l'arc tangente, etc. Lagrange peut ainsi écrire, dès la leçon 1 des *Leçons sur le calcul des fonctions*, « Le développement des fonctions[53], envisagé d'une manière générale, donne naissance aux fonctions dérivées de différents ordres ; et l'algorithme de ces fonctions une fois trouvé, on peut les considérer en elles-mêmes et indépendamment des séries d'où elles résultent. Ainsi une fonction donnée étant regardée comme primitive, on en peut déduire, par des règles simples et uniformes, d'autres fonctions, que j'appelle *dérivées* ; et lorsqu'on a une équation quelconque entre plusieurs variables, on peut passer successivement aux équations dérivées, et remonter de celles-ci aux équations primitives. Ces transformations répondent aux différentiations et aux intégrations ; mais dans la théorie des fonctions, elles ne dépendent que d'opérations purement algébriques, fondées sur les simples principes du calcul formel. »

C'est ce plan d'exposition que Lagrange suit déjà dans la *Théorie des fonctions analytiques* de 1797. Les fonctions dérivées de f sont définies comme coefficients des puissances de i dans le développement en série de $f(x+i)$, f étant la fonction primitive :

> « Considérons donc une fonction fx d'une variable quelconque x. Si à la place de x on met $x+i$, i étant une quantité quelconque indéterminée, elle deviendra $f(x+i)$; et par la théorie des séries on pourra la développer en une suite de cette forme $fx+pi+qi^2+ri^3$+&c., dans laquelle les quantités p, q, r, &c., coëfficiens des puissances de i, seront de nouvelles fonctions de x, dérivées de la fonction primitive fx, et indépendantes de la quantité i. » p. 2

[51] Lagrange (1797) en donne la définition suivante : « On appelle *fonction* d'une ou de plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, reliées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi, dans les fonctions on ne considère que les quantités qu'on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées. »
[52] Pour Lagrange (1797) : « Pour marquer une fonction d'une seule variable comme x, nous ferons simplement précéder cette variable de la lettre ou caractéristique f, ou F ; mais lorsqu'on voudra désigner la formulation d'une quantité déjà composée de cette variable, comme x^2 ou $a+bx$ ou &c., on renfermera cette quantité entre deux parenthèses. Ainsi, fx désignera une fonction de x, $f(x^2)$, $f(a+bx)$, &c. désigneront des fonctions de x^2, de $a+bx$, &c. Pour marquer une fonction de deux variables indépendantes comme x, y, nous écrirons $f(x,y)$, et ainsi des autres. »
[53] Il s'agit du développement en série d'une fonction.

Lagrange démontre ensuite que les puissances de i ne peuvent qu'être entières (pp.7-8), puis s'intéresse à chacun des termes du développement en série. Après avoir démontré que « […] $f(x+i)$ sera égale à fx, plus à une quantité qui doit disparaître en faisant i=0 », donc qui s'exprime selon les puissances entières de i, Lagrange obtient le développement limité à l'ordre 1 : « On aura donc ainsi $f(x+i)=fx+iP$, donc $f(x+i)-fx=iP$, et par conséquent divisible par i ; la division faite, on aura $P=\dfrac{f(x+i)-fx}{i}$. »

Il montre qu'en itérant le raisonnement précédent, on obtient ainsi les différents « coëfficiens des puissances de i », et donne en exemple, les développements de $\dfrac{1}{x}, \sqrt{x}$. Puis :

> « Après ces considérations générales sur le développement des fonctions, nous allons considérer en particulier la formule du n°3, $f(x+i)=fx+pi+qi^2+ri^3+$&c., et chercher comment les fonctions dérivées p, q, r, &c. dépendent de la fonction primitive fx. » p. 13

En remplaçant i par $i+o$, le développement devient : $fx+p(i+o)+q(i+o)^2+r(i+o)^3+$&c., puis en développant les puissances de $i+o$: $fx+pi+qi^2+ri^3+si^4+$&c.$+po+2qio+3ri^2o+4si^3o+$&c.
En remplaçant x par $x+o$, « et en ne considérant dans le développement que les termes qui contiennent la première puissance de o », les fonctions fx, p, q, r, &c. deviennent respectivement $fx+f'xo+$&c., $p+p'o+$&c., $q+q'o+$&c., $r+r'o+$&c. La formule du n°3[54] devient alors : $fx+pi+qi^2+ri^3+si^4+$&c.$+f'xo+p'io+q'i^2o+r'i^3o+$&c. Puis :

> « Comme ces deux résultats doivent être identiques, quelles que soient les valeurs de i et de o, on aura, en comparant les termes affectés de o, de io, de i^2o, &c. $p=f'x$, $2q=p'$, $3r=q'$, $4s=r'$, &c. Maintenant, de même que $f'x$ est la première fonction dérivée de fx, il est clair que p' est la première fonction dérivée de p, que q' est la première fonction dérivée de q, r' la première fonction dérivée de r, et ainsi de suite. Donc, si, pour plus de simplicité et d'uniformité, on dénote par $f'x$ la première fonction dérivée de fx, par $f''x$ la première fonction dérivée de $f'x$, par $f'''x$ la première fonction dérivée de $f''x$, et ainsi de suite, on aura $p=f'x$, et de-là $p'=f''x$; donc $q=\dfrac{P'}{2}=\dfrac{f'x}{2}$; donc $q'=\dfrac{f'''x}{2}$, et de-là $r=\dfrac{q'}{3}=\dfrac{f''x}{2\cdot 3}$; donc $r'=\dfrac{f^{IV}x}{2\cdot 3}$, et de-là $s=\dfrac{r'}{4}=\dfrac{f^{IV}x}{2\cdot 3\cdot 4}$, et ainsi de suite. Donc, substituant ces valeurs dans le développement de la fonction $f(x+i)$, on aura $f(x+i)=fx+f'xi+\dfrac{f''x}{2}i^2+\dfrac{f'''x}{2\cdot 3}i^3+\dfrac{f^{IV}x}{2\cdot 3\cdot 4}i^4+$&c. » p. 14.

De la formule de Taylor, ainsi démontrée, Lagrange tire les définitions suivantes :

> « Nous appellerons la fonction fx, *fonction primitive*, par rapport aux fonctions $f'x$, $f''x$, &c. qui en dérivent, et nous appellerons celles-ci, *fonctions dérivées*, par rapport à celles-là. Nous nommerons de plus la première fonction dérivée $f'x$, *fonction prime* ; la seconde dérivée $f''x$, *fonction seconde* ; la troisième fonction dérivée $f'''x$, *fonction tierce*, et ainsi de suite. » pp.14-15.

Avec le développement du concept de limite au cours du XIX^e^ siècle, Cauchy peut donner, quelques décennies plus tard, la définition de la dérivée d'une fonction comme limite en 0 du

[54] Rappelons que la formule du n°3 est $f(x+i)=fx+pi+qi^2+ri^3+$&c.

rapport $\dfrac{f(x+i)-f(x)}{i}$, et non plus comme « coèfficiens des puissances de i » dans la formule connue désormais sous la désignation de Taylor-Lagrange, pour une forme particulière de son reste.[55]
Cependant, le système d'ostensifs défini par Lagrange va fixer un système de pratiques.

2. 4. 4. 3. Permanence de certaines pratiques ostensives et oubli des raisons d'être

L'ostensif scriptural f' et l'ostensif langagier « dérivée » demeurent de nos jours, de même que les ostensifs $\int$ et « primitive ».

La genèse des pratiques dans lesquelles ils sont engagés a changé, au point de pouvoir être ignorée, donc oubliée au regard d'une institution qui attacherait une importance particulière à l'histoire des pratiques mathématiques dont on use, de qui se contente de leur manipulation, sans la référer à l'histoire des mathématiques. Il en résulte alors que, de l'organisation nouvelle des pratiques dans lesquelles ces ostensifs sont engagés, vont émerger des non-ostensifs nouveaux. Ainsi, le non-ostensif « la fonction dérivée » n'aurait sans doute pas le même sens dans l'organisation du savoir mathématique, parce que renvoyant à d'autres pratiques ostensives, si son histoire s'était arrêtée avec Lagrange. Il serait apparu, ainsi que le définit Lagrange, comme « dérivant » d'une fonction « primitive », car c'est effectivement à partir d'une pratique d'où il découle d'une fonction « première », développée en série de Taylor, qu'il est défini par Lagrange. Alors que dans la présentation standard du calcul différentiel et intégral « classique », le non-ostensif « primitive d'une fonction » apparaît, inversement, comme découlant du non-ostensif « dérivée d'une fonction », car la pratique de la dérivée est première.
Ainsi, par exemple, le *Cours de mathématiques spéciales* de H. Commissaire et G. Cagnac (1936) définit de la manière suivante les fonctions primitives, en son chapitre II « Recherche des fonctions primitives » du troisième et dernier tome consacré au calcul intégral :

[55] En fait, comme l'indiquent Ovaert et Verley (1997) : « Il n'est donc pas possible, comme l'a tenté Lagrange dans la *Théorie des fonctions analytiques* (1797), de fonder le calcul différentiel sur le développement en série de Taylor. » La raison en est que « .. l'application de Taylor T de $C^{\infty}(\mathbf{R})$ dans l'anneau $\mathbf{C}[[X]]$ des séries formelles à coefficients complexes, définie par T : $f \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} X^n$ est ***surjective***. » (souligné par nous). Or la question de l'unicité des systèmes de notation des objets (les ostensifs) est essentielle dans le pratique mathématique.
Le Bourbaki des *Éléments d'histoire des mathématiques* n'est, quant à lui, guère tendre envers le travail de Lagrange : « Le monumental ouvrage de Lagrange représente une tentative de fonder l'analyse sur l'une des plus discutables conceptions newtoniennes, celle qui confond les notions de fonction arbitraire et de fonction développable en série de puissances, et de tirer de là (par la considération du coefficient du terme du premier ordre dans la série) la notion de différentiation. » pp. 246-247. Même s'il concède que donner la démonstration de la formule de Taylor, avec reste intégral et son évaluation, et fournir des matériaux pour, à la fois, la théorie des fonctions d'une variable complexe et la théorie des séries formelles, n'est pas rien, il conclut : « Mais, du point de vue de son objet immédiat, elle représente un recul plutôt qu'un progrès. » p. 247.

« 406. ***Fonctions primitives et intégrales indéfinies.*- <u>DÉFINITION.</u>- Étant donnée une fonction *f(x)*, on appelle primitive de *f(x)* toute fonction admettant *f(x)* pour dérivée.**

NOTATION. – *On représente une fonction primitive quelconque de la fonction f(x) par le symbole* $\int f(x)dx$ (qui s'énonce somme de *f(x)dx*).

Les notations *y'=f(x)* ou *dy=f(x)dx*, d'une part, et $y=\int f(x)dx$ d'autre part, ont la même signification. Si F(*x*) est une primitive particulière de *f(x)*, on a

$$\int f(x)dx = \mathrm{F}(x)+\mathrm{C},$$

C étant une constante arbitraire.

[…]

Le symbole $\int$ s'appelle le signe somme ; la fonction *f(x)* est dite placée sous le signe somme ; *f(x)dx* est appelé l'élément différentiel de l'intégrale indéfinie $\int f(x)dx$ » p. 19.

Cette définition importe, à travers les non-ostensifs qu'elle désigne (fonction, primitive, dérivée, élément différentiel, intégrale indéfinie), et les ostensifs qu'elle contient (*f(x)*, *y'*, *dy*, *dx*, *F(x),* C, +, $\int$, $\int$ *f(x)dx*), la mémoire du savoir mathématique, des choix des règles et conventions qui furent faits (sans pour autant les expliciter ou les rendre intelligibles de prime abord).

Elle importe, de la même manière, les débats mathématiques et les avancées qui en résultèrent, sans pour autant les justifier, ni les rendre compréhensibles au lecteur qui s'arrêterait, en ce point, à la lecture de l'ouvrage : pourquoi y a-t-il équivalence entre « *y'=f(x)* ou *dy=f(x)dx*,[56] d'une part, et $y=\int f(x)dx$ d'autre part » ? Pourquoi « le signe somme » ?

Pourquoi « intégrale » et pourquoi « indéfinie » ? Y en a-t-il qui soient « définies » ou « finies » ?

En ce point, on pourrait objecter que, bien qu'il se situe assez « haut » dans le cursus scolaire (bac+2), et qu'il soit daté (1936), l'ouvrage cité sert en définitive d'exemple *princeps* pour une exposition du savoir à visée d'enseignement, et donc qu'il expose un savoir transposé, et réorganisé par rapport au savoir savant. Il est exact que l'exposition didactique classique du calcul différentiel et intégral dans **R**, au moins pour ce qui concerne l'intégrale de Riemann, fait d'abord précéder la notion de dérivée comme limite d'un rapport, avant celles de primitive, d'intégrale, de développement en série entière. Cependant, il faut noter que les ouvrages de Lagrange cités précédemment se présentent, eux aussi, et par bien des aspects, comme des ouvrages à visée didactique. L'un d'entre eux se dénomme même *Leçons sur le calcul des fonctions* ! C'est qu'il est toujours, en effet, nécessaire de définir et de montrer comment fonctionnent les manipulations ostensives du savoir et quelles sont les raisons qui les fondent, ne serait-ce que pour que le savoir produit puisse être soumis à l'évaluation et à la critique externe qui, en dernière instance, le légitimera ou non.

[56] On peut remarquer que cet ouvrage donne aussi la notation ostensive due à Leibniz, sans autre forme d'explication. Il faudrait vérifier si le manuel en faisait un usage spécifique que n'aurait pas permis l'écriture $f'(x)$, autrement que pour la notation d'une primitive sous forme d'intégrale indéfinie.

Cet exemple montre que les ostensifs langagiers peuvent demeurer, tandis que les pratiques dans lesquelles ils sont engagés et les non-ostensifs qui en résultent peuvent être oubliés.
Il montre aussi le processus par lequel les œuvres[57] mathématiques peuvent demeurer présentes dans la mémoire d'une institution donnée, à travers la perpétuation des pratiques utilisant les outils ostensifs bâtis au fil du développement de l'œuvre, alors que les raisons d'être de l'œuvre ont été oubliées[58]. En reprenant les métaphores des « chaînes » évoquées par Halbwachs et Leroi-Gourhan, les « chaînes des raisons d'être » ont historiquement tendance à être oubliées, tandis que demeurent les « chaînes d'actes ».

[57] La notion d'œuvre est prise ici dans le sens que lui donne Chevallard (1996) : « J'appelle œuvre toute production humaine *O* permettant d'apporter réponse à un ou des types de questions *Q*, questions "théoriques" ou "pratiques", qui sont les *raisons d'être* de l'œuvre – et cela sans considération de la "taille" de l'œuvre (parmi les œuvres, beaucoup sont des "œuvrettes" : par exemple, la théorie de la transposition didactique) »
[58] Cette question est abordée par Chevallard (1997a) : « Questions vives, savoirs moribonds : le problème curriculaire aujourd'hui » *in* Actes du colloque « Défendre et transformer l'école pour tous », IUFM d'Aix-Marseille.

2. 5. La dynamique de la mémoire dans l'enseignement

Ce que nous venons de voir sur « l'oubli » des intentions originelles qui ont fondé l'emploi dans un sens très précis, chez Lagrange, des non ostensifs « dérivée » et « primitive » (et corrélativement l'oubli des pratiques qui en étaient le support matériel) semble être un trait de la vie institutionnelle, non seulement des savoirs, mais de toute forme de pratique, qu'elle soit publique ou privée, collective ou individuelle.
Dans le cas de la *Théorie des fonctions analytiques*, d'autres pratiques du calcul différentiel et intégral, qui ont « recouvert » le projet de Lagrange, ont été établies, ou rétablies, dans « l'institution mathématique », par les mathématiciens qui lui ont succédé, parce qu'ils ont pu les fonder sur des développements nouveaux du savoir mathématique. Demeurent la pratique et les outils pour l'accomplir, parce qu'ils permettent la poursuite, de manière satisfaisante, du travail qui fonde l'institution mathématique concernée.
Nous nous plaçons, dans le cadre de ce travail, dans le cas d'institutions didactiques pour lesquelles l'activité mathématique qui s'y déploie résulte d'un processus de transposition didactique. Elles sont de ce fait observées et validées dans leur existence par de nombreuses autres institutions sociales qui leur donnent leur légitimité, et au rang desquelles se trouvent les institutions mathématiques ; légitimité assise, en dernier ressort, sur la légitimité épistémologique et culturelle que la société attribue aux mathématiques[59]. Mais on peut se poser, au-delà du seul cas des mathématiques et de leur enseignement, la question de la conservation et de l'oubli des souvenirs au sein des institutions, en général. Quelques exemples nous sont fournis par les recherches en anthropologie, qu'elles concernent les mathématiques ou d'autres domaines, et permettent de dévoiler le cœur du mécanisme institutionnel de la mémoire qui, au-delà de la spécificité des institutions, leur est commun.

2. 5. 1. Le principe de cohérence institutionnelle

2. 5. 1. 1. Étude de trois exemples

Nous tirons les deux premiers exemples de la présentation qu'en donne M. Douglas (1989) dans son ouvrage *Ainsi pensent les institutions*.

- Le premier concerne le « paradoxe de Condorcet »

Ce « paradoxe », qui n'en est pas un, est établi en 1781 par le chevalier de Borda dans son *Mémoire sur les élections au scrutin* présenté le 16 juin 1770 à l'académie des Sciences. Il est reformulé en 1785 dans l'*Essai sur l'application de l'analyse de la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, par son ami Condorcet dans les termes suivants :

[59] La postface de 1991 à *La transposition didactique* fournit une analyse de ces légitimités.

> Supposons, en effet, toujours trois candidats, et que les électeurs soient au nombre de soixante ; qu'il y ait vingt-trois voix pour l'ordre Pierre, Paul, Jacques ; aucune pour l'ordre Pierre, Jacques, Paul ; deux pour l'ordre Paul, Pierre, Jacques ; dix sept pour l'ordre Paul, Jacques, Pierre ; dix pour l'ordre Jacques, Pierre, Paul, et huit pour l'ordre Jacques, Paul, Pierre ; la proposition, Pierre est préférable à Paul, aura une pluralité de trente-trois contre vingt-sept. La proposition, Jacques est préférable à Pierre, trente-cinq voix contre vingt-cinq ; la proposition, Paul est préférable à Jacques, quarante-deux contre dix-huit. Les trois propositions adoptées par la pluralité seraient donc :
>
> Pierre est préférable à Paul ;
> Jacques est préférable à Pierre ;
> Paul est préférable à Jacques.
>
> Et il est évident que ces trois propositions ne peuvent être vraies en même temps, puisque les deux premières, et en général de deux quelconques, admises ensemble, résulte nécessairement une conséquence contradictoire avec la troisième.

M. Douglas analyse pourquoi ce résultat a été « oublié » pendant près de cent soixante ans, au point d'être de nouveau démontré en 1948 par l'économiste Kenneth Arrow, prix Nobel 1972, qui en ignorait l'existence. En effet, dans le cas où une structure sociale complexe (entreprise, organisme international), dirigée par plusieurs personnes, doit décider d'un choix par le moyen d'un vote, Arrow est amené à démontrer de nouveau ce résultat, afin d'établir le « théorème de l'impossibilité », qui stipule que « ni le vote à la majorité ni quelque manière que ce soit d'agréger les préférences ne peuvent définir une seule hiérarchie des choix. Et il définit ainsi les conditions qui empêchent toute agrégation des préférences individuelles ».
Arrow écrit en 1984, à propos de sa découverte, et après qu'il ait eu connaissance du « paradoxe de Condorcet » vieux de plus d'un siècle et demi : « La partie mathématique aurait très bien pu être transmise par Condorcet, mais il n'y avait alors aucun corpus vivant abordant les mêmes questions ». M. Douglas explique alors les raisons de l'oubli de la découverte de Condorcet :

> « Si la découverte de Condorcet a été oubliée, ce n'est pas parce que l'appareil mathématique disponible au XVIII^e^ siècle était insuffisant. C'est le climat d'idées, à la fois philosophique et politique, dans lequel il a établi sa démonstration, qui était différent. Mais quelle importance cette découverte pouvait-elle avoir au XVIII^e^ siècle ? La mathématique abstruse du vote circulaire importait peu dans un pays à la veille de la Révolution, et par la suite l'apport effectif de cette théorie aurait été mal reçu des hommes politiques du XIX^e^ siècle préoccupé d'étendre le droit de vote et de limiter le pouvoir politique des élites. Elle ne pouvait que déplaire à ceux qui avaient une foi simple dans les décisions à la majorité. […] Cette théorie n'est donc devenue pertinente pour la science politique qu'à la fin du XX^e^ siècle quand le droit de vote, devenu universel, ne peut plus être étendu, que le pluralisme rend plus difficile l'établissement d'un consensus, et que les fondements de la société démocratique sont de plus en plus mis en cause. Une découverte nouvelle doit être compatible avec les hypothèses politiques et philosophiques généralement admises pour pouvoir être reconnue à son époque, a fortiori pour qu'on s'en souvienne par la suite ». p.70.

Ainsi, parce qu'il venait contrarier les volontés démocratiques qui allaient, par leur convergence, aboutir à la Révolution française ou continuer de militer pour l'extension du scrutin universel au long du siècle qui suivit, ce paradoxe fut « oublié ». Mais « oublié » de qui ? Sans doute des sociétés savantes, mathématiques et politiques, qui pouvaient y avoir accès et à partir desquelles il aurait pu diffuser dans la société, mais aussi chez qui il venait heurter les convictions démocratiques qui les animaient par ailleurs . Ce n'est que parce que désormais le droit de vote est établi, parce que certaines institutions à l'intérieur de la société sont amenées à se poser, à partir de lui, le problème de la décision par agrégation des choix (du passage du singulier à l'universel), qu'il peut être retrouvé. Ainsi l'institution rejette-t-elle les idées ou les résultats qui viennent contredire un des principes qui la fondent. D'où il résulte qu'elle ne leur organise pas les moyens de leur transmission, et donc de leur souvenir.

- Le second exemple emprunté à M. Douglas concerne le psychologue anglais de la première moitié du XX^e^ siècle, Sir Frederick Bartlett

Douglas explique comment ce spécialiste de la mémoire, qui a notamment établi l'importance des éléments sélectifs et constructifs dans la conscience humaine, a été amené à ne réaliser que la moitié du programme de recherche qui était initialement le sien. La deuxième partie, oubliée, portait sur la recherche d'une théorie sociologique de la perception. Il s'agissait d'étudier le :

> « pouvoir de contrôle exercé par les conventions culturelles sur la perception et le souvenir. Il voulait découvrir ce qui dirige l'attention des individus, supposant que les processus perceptifs individuels sont liés aux émotions les plus profondes de l'individu et que celles-ci, en suivant Rivers, sont déterminées par la forme des institutions ». p. 79

Or, « Bartlett semble avoir frisé la dépression nerveuse en essayant d'écrire son livre attendu sur la conventionnalisation », écrit M. Douglas. Se référant à la notice consacrée à Bartlett pour le Dictionary of National Biography, M. Douglas relève que cette notice souligne la contribution de Bartlett à la psychologie pour :

> « […] avoir montré que la perception et le souvenir sont contrôlés par un processus sensible aux buts et à l'intérêt du sujet percevant. Mais toute l'ambition qu'exprimait antérieurement Bartlett d'analyser le processus social de sélection est restée lettre morte. […] Lui qui enseignait que les intentions guident la cognition a oublié ses propres intentions. […] Et il y a toujours eu quelque chose pour le distraire de sa préoccupation première. Ses bonnes idées, qui étaient fragiles, sont tombées dans l'oubli, attendant la phase suivante du cycle des redécouvertes ». pp.79-80.

Dans ce cas encore, Douglas explique les causes de cet oubli par la nature de l'institution, celle de la communauté des psychologues, à laquelle appartenait Bartlett : « Il n'y avait alors aucun moyen (et il n'y en a jamais eu depuis) de relier son idée de principes de sélection institutionnels aux thèses établies de la recherche en psychologie ». En ce qui concerne les institutions scientifiques, elle souligne alors que, pour être retenue, *une idée ne doit pas violer le principe de cohérence spécifique aux idées propres à cette institution.*

- Le troisième exemple est étudié par A. Mercier dans sa thèse, pages 209 à 221.

On pourrait faire remarquer que les exemples précédents étant tirés de la sociologie, ils s'appliquent à des regroupements humains assez importants (la société de la fin du XVIII^{e} siècle, une communauté scientifique assez vaste telle que celle des psychologues anglais de la première moitié du XX^{e} siècle) et sur une échelle de temps relativement grande (le siècle ou quelques décennies). On pourrait alors objecter de la validité de leur transposition aux processus d'enseignement tels qu'ils opèrent en classe : population de faible effectif, durée courte (une année scolaire, scandée d'études de thèmes et hachée en séquences de l'ordre de l'heure). Un dernier exemple permettra de voir que de tels phénomènes se produisent aussi, lorsqu'on quitte le champ des grands groupes humains, et que l'on observe des petits groupes tels ceux qui s'adonnent à l'étude des mathématiques. Il est relatif aux classes de mathématiques, et veut montrer qu'à l'intérieur de ces « micro institutions » certains événements relatifs au savoir mathématique, parce qu'ils sont portés par des élèves singuliers et dérogent par conséquent au principe de cohérence auquel adhère le reste de la classe, ne peuvent être « connus » (ou reconnus) de l'institution et donc conservés dans sa mémoire.

Il s'agit de l'étude du « texte de Suzanne », qui est une très bonne élève de 1^{e}S. Le texte écrit par Suzanne, et qu'elle intitule « suite et fin », comporte onze pages manuscrites et raconte l'aventure d'une suite *U* qui tend vers zéro. Lors de son « cheminement » vers zéro, elle rencontre toute une variété d'autres suites, qui convergent vers une autre limite, ou ne convergent pas, sont croissantes ou décroissantes, etc. Ce texte ne répond aucunement à une quelconque demande, notamment du professeur de sa classe. C'est, en quelque sorte, un travail « gratuit » que Suzanne a rédigé de son propre chef, et pourrait-on dire, pour son propre compte. De sa position de didacticien qui prend pour objet d'étude le rapport personnel des élèves au savoir, Mercier (1992) écrit à propos de ce texte :

> « La rencontre que nous observons [il s'agit de la rencontre de cette élève avec quelques propriétés des nombres réels] aurait pu ne pas avoir lieu, faute de moyens mathématiques ou littéraires, et se produire plus tard, explicitement, par la construction de **R** et l'étude de ses propriétés topologiques, ou à l'occasion de l'enseignement d'un autre objet mathématique et "après-coup". *Pour cette élève-ci, cet après-coup est prêt d'avance*. En partie tout au moins. Et à l'"nsu de l'institution […] ». p. 212.

Il explique ainsi que ce que décrit le texte est, en fait, la succession des rencontres de Suzanne avec les suites, et avec l'écologie des savoirs dans laquelle « les suites » sont prises. Ces rencontres ne peuvent être vues depuis l'institution didactique à laquelle appartient Suzanne, sa classe, et à l'intérieur de laquelle des personnes occupent la position professeur et les positions élèves, car elles font partie de la biographie didactique personnelle, donc privée (et par conséquent privée du regard d'autrui) de cette élève. Il en résulte que, parce qu'elles sont personnelles, ces rencontres ne pourront être connues du système didactique, et donc conservées dans sa mémoire.
Cet exemple permet de faire un pas de côté, en oubliant les rapports à l'objet mathématique « suites en 1^{e}S », et en se centrant sur l'événement que constitue la production d'un tel texte. Car si les rapports au savoir qui s'expriment à travers ce texte, et qui sont analysés par Mercier (1992), sont, certes, personnels, il a bien fallu pour les connaître que ce texte soit rendu public ! Or la manière grâce à laquelle ce texte a été recueilli est de ce point de vue tout à fait remarquable. Voici comment elle est décrite :

> « Suzanne propose à son professeur de mathématiques un texte où elle met en représentation son rapport à la convergence des suites. Celui-ci, qui ne sait trop qu'en faire, le fait lire à un collègue : nous avons ainsi eu accès à un travail personnel exemplaire. » p. 209.

Ainsi de sa position d'élève, et d'élève singulière à bien des égards puisque, outre la production tout à fait exceptionnelle d'un tel texte, elle s'autorise à le communiquer à son

professeur, Suzanne ne peut trouver par ce geste, ni la possibilité de faire connaître à la classe les connaissances qu'elle a acquises sur les suites, ni la reconnaissance de sa connaissance depuis la position qu'occupe son professeur dans l'institution didactique. On peut émettre l'hypothèse que la production d'un tel texte contredit le « principe de cohérence » sur lequel est fondé le contrat didactique classique dans la classe de Suzanne, et provoque par là l'embarras de son professeur. Aux yeux de l'institution didactique, il n'y a alors pas de place pour la reconnaissance et la mise en mémoire didactique de cet événement. L'éloignement de la classe que connaît ce texte, par la remise de celui-ci à un collègue du professeur, (par ailleurs travaillant à l'IREM d'Aix-Marseille) assure l'oubli de cet événement singulier au regard de l'institution didactique à laquelle appartient Suzanne. C'est parce qu'il satisfait alors au « principe de cohérence » propre à l'institution où travaillent les didacticiens de l'IREM qu'il peut alors, et pour la postérité, sortir de l'oubli institutionnel spécifique de la classe où il était né.
L'exemple de Suzanne rend compte de l'exposition, sous la forme de son rapport privé à l'étude des suites en 1^{e} S, *du résultat de son travail* personnel d'étude relatif à l'objet. Cet exemple constitue un accès inattendu (car il devient public dans l'institution) à une partie de la dimension privée du rapport de cette élève à différentes dimensions de l'étude d'un cours de mathématiques, partie en général invisible depuis les différentes positions occupées dans l'institution. Ce n'est donc pas un hasard si de telles observations sont si rares, et leur apparition publique si aléatoire.

- Conclusion tirée de ces trois exemples

Un trait commun à ces trois exemples peut être mis en évidence. Dans chaque cas, afin d'en conserver et rapporter le souvenir, la mémoire de l'événement a dû nécessiter un changement d'institution : passer de la société pré-révolutionnaire du XVIII^{e} siècle à celle des économistes d'après-guerre dans le cas du « paradoxe de Condorcet », de la communauté des psychologues anglais de la première partie du XX^{e} siècle à celle des anthropologues des années 1980 pour les travaux oubliés de Bartlett, sortir de la classe dans le cas du texte de Suzanne et rejoindre la petite communauté des didacticiens de l'IREM. L'oubli et le souvenir apparaissent ainsi, une fois de plus, dépendants de l'institution en tant que telle, et aussi de la position qui y est occupée, dans le sens où chacun doit rester à la place qui lui a été attribuée (« chacun doit rester à sa place », pourrait-on dire), sous peine de briser le « principe de cohérence » institutionnelle qui fonde les pratiques conformes au maintien de l'institution et « rejette » les autres.
Si nous pouvons alors identifier le principe de cohérence institutionnelle comme « moteur » du processus de la mémoire institutionnelle, de cette identification découle aussi une conséquence importante pour l'observation. En effet, elle nécessitera donc le déplacement de l'observateur vers une autre institution de laquelle, dégagé du principe de cohérence institutionnel qui la fonde, il pourra rendre compte des spécificités du processus de mémorisation dans l'institution qu'il observe. Ce point sera abordé dans les troisième et quatrième parties de cette thèse.

2. 5. 1. 2. Application à la didactique : reformulation d'une des hypothèses de J. Centeno

Une fois établi le rôle de la satisfaction du principe de cohérence dans une institution didactique, tel que défini par Douglas, nous pouvons alors retravailler une des hypothèses formulées par J. Centeno (1995) dans sa thèse :

> « H7 : Dans un processus d'enseignement, un élève ne peut pas faire preuve de certaines connaissances, qu'il pourrait montrer par ailleurs, si les conditions didactiques ne le lui permettent pas. Il y a prééminence des conditions didactiques sur les conditions personnelles. » p.134.

Centeno (1995) utilise cette hypothèse pour montrer que, parfois, la situation et le contrat didactiques « interdisent » à l'élève l'utilisation de connaissances qu'il possède personnellement, et qu'il aurait pu mettre en œuvre si les conditions étaient différentes. Sous l'éclairage des exemples précédents, cette idée paraît désormais pouvoir être replacée dans un cadre plus large que celui des seuls processus d'enseignement proprement dits, dans la mesure où elle peut être étendue à d'autres institutions. On peut alors reformuler cette hypothèse dans un sens anthropologique plus englobant afin de la retravailler :

Tout sujet d'une institution qui se trouve occuper une position donnée dans cette institution, ne peut pas faire preuve de certaines connaissances pratiques, qu'il pourrait montrer par ailleurs, si les conditions institutionnelles ou sa position à l'intérieur de l'institution étaient différentes. Il y a prééminence des conditions institutionnelles, qui ne retiennent de la personne que l'expression de certaines de ses connaissances pratiques personnelles : celles qui sont conformes au principe de cohérence institutionnelle.

Faisant alors nôtre cette hypothèse reformulée, on peut se demander comment s'opère ce tri, comment certaines idées, certains événements, sont conservés dans la mémoire du système, tandis que d'autres sont rejetés. Il y a certes nécessité de satisfaire au principe de cohérence institutionnelle, il existe aussi des positions d'où certains événements qui se produisent hors, mais aussi et surtout dans l'institution, ne peuvent être vus. Mais la question reste ouverte, qui consiste à rendre compte des mécanismes institutionnels à l'œuvre dans ces procédures de tri. Dans une certaine mesure, ces mécanismes échappent sans doute à la conscience des sujets de l'institution puisqu'ils sont le produit de l'action de ces sujets au sein d'un certain type d'ordre social, celui qui caractérise l'institution[60], et dont l'analyse ou le « dévoilement » ne peuvent être menés qu'en extériorité à l'institution.

Nous nous emploierons à définir et cerner ce mécanisme pour ce qui concerne l'enseignement

[60] C'est par exemple ce que montre l'étude d'Evans-Pritchard sur les Nuers. Le système mis en place pour compter le nombre de têtes de bétail que l'on est en droit de réclamer ou que l'on doit fournir, lors d'un mariage ou d'un décès, repose sur la capacité à établir le degré de parenté. Celui-ci nécessite que l'on remonte jusqu'à la cinquième génération. Le mécanisme utilisé pour connaître ce que l'on donne ou reçoit induit un « tri des ancêtres » qui entraîne à son tour la conservation ou la disparition du nom des ancêtres. La formule qui préside aux calculs induit alors une forme spécifique de mémoire dans cette société pastorale du Soudan des années 1930.

des mathématiques dans le paragraphe 2. 7. 2. et ses développements du chapitre 2. 8., mais nous voudrions, avant cela, en montrer une forme peut-être plus apurée, parce qu'elle concerne le domaine des mathématiques.
Sans doute, dans les mathématiques produites, parce qu'elles se fondent sur des principes de logique, de non contradiction et de complétude, de « démonstration rigoureuse », etc., le fonctionnement du principe de cohérence institutionnelle, à partir duquel certains faits, ici des thèses établies, seront ou non conservés en mémoire, apparaît-il peut-être plus clairement.

Ainsi, la refondation assurée par le travail de Lagrange donne-t-elle, sans doute, de la cohérence à tout un pan des mathématiques qui s'est développé au cours du XVII^{e} et du XVIII^{e} siècle : le calcul différentiel et intégral. C'est ce que Lagrange indique lui-même en 1772 dans un mémoire soumis à l'Académie de Berlin et intitulé *Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différenciation et à l'intégration des quantités variables*, et dont nous donnons l'extrait significatif suivant, dans lequel il expose la philosophie de son travail :

> « Le Calcul différentiel, considéré dans toute sa généralité, consiste à trouver directement, et par des procédés simples et faciles, les fonctions p, p', p''… dérivées de la fonction u ; et le Calcul intégral consiste à retrouver la fonction u par le moyen de ces dernières fonctions.
> Cette notion des Calculs différentiel et intégral me paraît la plus claire et la plus simple qu'on aurait encore donnée ; elle est, comme on le voit, indépendante de toute métaphysique et de toute théorie des quantités infiniment petites ou évanouissantes. »

Mais, le développement en série de Taylor va, à son tour, poser des problèmes de cohérence, notamment à partir du problème de sa convergence. Ainsi, Lagrange est-il amené à écrire dans les *Leçons sur le calcul des fonctions* :

> « Ainsi, on a ce théorème analytique, remarquable par sa simplicité,
> $$fi=f+if'+\frac{i^2}{2}f''+\frac{i^3}{2\cdot 3}f'''+\ldots+\frac{i^{\mu-1}}{2\cdot 3\ldots\mu-1}f^{(\mu-1)}+\frac{i^{\mu}}{2\cdot 3\ldots\mu}f^{(\mu)}j$$
> […]
> On a par là une démonstration rigoureuse de cette proposition qu'on s'était contenté de supposer jusqu'ici ; savoir que, dans le développement d'une fonction, on peut donner à la variable suivant laquelle est ordonné le développement, une valeur assez petite pour qu'un terme quelconque de la série soit plus grand que la somme de tous ceux qui le suivent ; car il est clair qu'il suffit pour cela de faire voir qu'on peut toujours prendre i assez petit pour que l'on ait $\frac{i^{\mu-1}}{2\cdot 3\ldots\mu-1}f^{(\mu-1)}>\frac{i^{\mu}}{2\cdot 3\ldots\mu}f^{(\mu)}j$, condition qui se réduit à celle-ci $f^{(\mu-1)}>\frac{i}{\mu}f^{(\mu)}j$, à laquelle il est visible qu'on peut toujours satisfaire en diminuant la valeur de i pourvu qu'on n'ait pas $f^{(\mu-1)}=0$. »

Ovaert (1976) signale que l'erreur de raisonnement, contenue dans les trois dernières lignes citées, ne pourra être identifiée qu'à partir des travaux de Weierstrass, Laguerre et Borel, soit un siècle plus tard, avec la théorie des développements asymptotiques. Mais, il explique que :

> « Cependant, Cauchy et même Lacroix, bien qu'incapables d'*expliquer* le phénomène, verront dans ce passage une *obscurité* majeure, et abandonneront, de ce fait, la formule de Taylor pour l'étude des fonctions dérivées. » p. 181.

La conséquence en est, au XIX^e siècle, et à l'exception de Weierstrass et des mathématiciens qui travailleront à sa suite, l'abandon de l'utilisation des développements en série pour fonder l'analyse ; développements en série qui, depuis Newton et Euler, jouaient un rôle de premier plan. Cependant, les idées de Lagrange ont trouvé, grâce au développement des mathématiques, des théories des fonctions d'une variable complexe, les fonctions analytiques précisément, et grâce au développement de la théorie des séries formelles[61], les institutions en lesquelles elles entrent en résonance avec le principe de cohérence institutionnel. C'est ce que souligne encore Ovaert (1976) :

> Ainsi, la thèse de Lagrange a finalement été reprise complètement, mais dans un cadre théorique beaucoup plus approfondi, ce qui a permis d'élucider les grandes difficultés rencontrées par Lagrange dans ce domaine. » p. 182.

La cohérence se trouvant, dans cet exemple particulier, dans le savoir mathématique lui-même dont la pratique fonde les institutions de production des mathématiques, il suffit ici de « suivre » la vie de ce savoir en ces institutions pour trouver en lui les éléments qui s'accordent ou qui violent ce principe de cohérence. Cependant, il est sans doute d'autres principes de cohérence qui fondent aussi ces communautés mathématiciennes dans leurs pratiques et les objets de ces pratiques : questions auxquelles répondent les savoirs construits, certes, mais aussi idéologie selon laquelle les sujets de ces institutions voient leurs rapports à ces pratiques et les rapports interpersonnels qui en résultent, « champ » au sens donné par Bourdieu au terme.
Répondre à la question de ce tri sélectif des souvenirs institutionnels, à partir de l'observation de l'évolution des rapports aux principes de cohérence suppose donc, tout à la fois un cadre théorique et la résolution d'une question d'ordre méthodologique. Cette dernière consiste à construire une extériorité par rapport à l'institution observée - extériorité dont le principe de cohérence sera différent de celui de l'institution observée -, grâce à un ou des dispositifs qui permettent une recension des possibles, c'est-à-dire de l'ensemble des choix ouverts *a priori*, afin, parmi ceux-ci, de pouvoir interpréter ceux effectivement advenus dans l'institution donnée, et d'en comprendre le sens. Mais, avant d'en arriver à ce point méthodologique que nous traiterons de manière théorique dans la troisième partie de cette thèse, et de manière pratique dans les troisième et quatrième parties, il nous faut en revenir tout d'abord à la poursuite de l'élaboration permettant de définir le type de mémoire rencontrée dans l'étude des mathématiques.

2. 5. 2. La mémoire ostensive : définition et exemple

Dans la classification en trois points qu'il fait des différentes manifestations de la mémoire, Candau (1998) définit ce dernier type de mémoire, pour un individu, de la manière suivante :

> « 3/ La métamémoire, qui est, d'une part, la représentation que chaque individu se fait de sa propre mémoire, la connaissance qu'il en a et, d'autre part, ce qu'il en dit, dimensions qui renvoient au "mode d'affiliation d'un individu à son passé" […] La métamémoire est une mémoire revendiquée, ostensive. » p. 14.

[61] Boubaki (1969) p. 247 et Ovaert (1976) p. 182.

En nous plaçant dans un cadre institutionnel plus large, cadre dans lequel l'individu devient un sujet, nous pouvons, en nous aidant de cette définition, donner la définition suivante, valable en particulier pour les institutions didactiques.

Nous appellerons *mémoire ostensive*, la mémoire qui est délibérément donnée à voir, de manière revendiquée, et par des moyens appropriés, à ses propres sujets ou à d'autres personnes par une institution ou un individu.
Cette ostension peut être réalisée, comme pour les ostensifs pris comme outils du travail mathématique, dans le cadre de divers registres perceptifs : gestuel, discursif - langagier, graphique, scriptural.

Bien qu'il n'emploie pas le terme, un exemple d'utilisation d'une telle mémoire ostensive, reconnue comme telle et revendiquée par les membres de l'institution en laquelle elle prend naissance, est fourni par Martinelli (1998). Il étudie, en tant qu'ethnologue, la petite communauté des forgerons de la société Moose, dans la province du Yatenga, au Burkina-Faso, et plus précisément l'apprentissage de la qualification professionnelle. Cet apprentissage peut se subdiviser en quatre périodes :

> « Le jeune enfant est présent à toutes les activités qui se déroulent à la forge familiale dès son jeune âge. On dit qu'il "naît" dans la forge. […]. L'apprentissage formel commence vers l'âge de 15 ans et dure deux à trois ans. […]. Autrefois, […] il [l'apprenti] entreprenait un voyage de plusieurs années, tour de pays analogue à celui de nos Compagnons du tour de France, au cours duquel le jeune forgeron fréquentait les ateliers de maîtres réputés pour leurs spécialisations. […]. Le forgeron atteignait ainsi l'âge de 25 à 30 ans. Une dernière phase de transmission du savoir commençait alors, s'étendant sur une dizaine d'années. Elle concernait la fonderie pratiquée saisonnièrement en brousse dans les sites d'extraction des minerais de fer. » pp. 67-68.

Or, un trait spécifique de ces quatre phases de l'apprentissage réside, pour l'apprenti, dans le « bien voir ». Ainsi, dès la petite enfance où « il naît » dans la forge, selon l'expression forgée par les mooses :

> « Que doit-il voir pour que l'on valorise à tel point le "bien voir", lorsqu'à l'adolescence vient le temps de l'apprentissage ? Il voit son père, ses oncles et ses frères aînés qui travaillent en groupe sous l'abri de la forge. […]. Il est trop jeune pour que ces savoirs lui soient communiqués verbalement. Mais il écoute et enregistre sans s'en rendre compte bien des significations. […]. En voyant travailler ses aînés, l'enfant se voit lui-même, tel qu'il doit devenir. Il se voit associé progressivement à l'activité des adultes. Il y assume un rôle sans que les adultes ne se soucient de lui en apprendre les règles. Il connaît ces règles bien avant même de commencer la période de l'apprentissage formel puisqu'il les a "vues". […]. Tout se passe donc comme si l'action de "voir" synthétisait et permettait de s'approprier l'essentiel des valeurs sémantiques de la forge. » p. 69

On pourrait croire que cette importance de la « vision » est un trait caché mis en évidence par l'analyse de l'ethnologue. Or, il n'en est rien. Cette capacité à « voir » est explicitement identifiée et valorisée par la communauté des forgerons mooses. Ainsi, durant le temps du voyage à travers le pays :

> « Le sens de la curiosité, du "bien voir", déjà valorisé durant tout l'apprentissage, était exalté au cours de cette aventure personnelle de perfectionnement. » p. 68.

De plus, la capacité à « bien voir » doit pouvoir… être vue ! Il faut alors pouvoir la montrer et elle peut, inversement, être testée chez l'apprenti ou recherchée par d'autres :

> « Les discours des aînés reviennent sans cesse sur un sens particulier de la curiosité qui doit rester l'apanage des forgerons quelles que soient les évolutions techniques. Ils aiment détecter ce sens dans le regard des enfants, au tout début de l'apprentissage. […]. La régulation sémantique procède de cette organisation latente et expansive de la mémoire technique. On a vu, avec l'exemple des forgerons africains, qu'elle se construit dès les degrés élémentaires d'inculcation. C'est pourquoi les maîtres d'apprentissage cherchent à le "voir" dans le regard des enfants. » pp. 69&75.

En contrepartie, la société des forgerons se doit d'organiser, au cours de l'apprentissage, les conditions d'une « bonne vision », cette expression étant prise tant dans son sens premier, que dans le sens où ce qui est vu est « bon », c'est-à-dire est de qualité :

> « Tout d'abord, il [l'apprenti] actionne les soufflets, ce qui le place en position privilégiée pour observer attentivement les opérations. Par la suite, il prend place face au maître. Pince dans la main gauche, celui-ci manipule la pièce à travailler entre le foyer et l'enclume. […]. On n'attend pas seulement de l'apprenti qu'il assimile des savoir-faire mais qu'il s'insère dans un groupe primaire aux rôles strictement différenciés. Si ces conditions initiales sont remplies, elles ouvrent droit de regard sur le travail du maître. Rien ne consacre plus le statut social de maître que d'exécuter les tâches de la forge "sous le regard de l'apprenti" (Martinelli B., 1996, pp. 9-47). La forge moose est organisée pour le rendre possible. On peut aller plus loin et dire que la transmission du savoir est inscrite dans la conception spatiale et sociale de la forge. […]. La forge est le lieu où règne l'éthique du regard. Ce champ visuel traduit la sociologie interne de la profession en ce qui concerne les valeurs d'appropriation et de transmission des savoirs. » pp. 67-68&72.

De même, la capacité à « voir » s'exerce à travers le rythme qu'il faut impulser au soufflet de forge pour régler sa puissance, selon les températures exigées pour le foyer, en fonction de la qualité ou de la quantité de métal utilisé. Le rythme est battu et conservé par des énoncés mi-chantés, mi-psalmodiés, par les forgerons. L'apprenti donne à voir à la communauté, ou plutôt à entendre, sa connaissance de ces chants souvent emblématiques de clan.

> « La maîtrise de ces séquences chantées, appelées "paroles du soufflet", est un marqueur d'intégration des jeunes forgerons. […]. Ces chants représentent, à l'extérieur de l'atelier familial, un critère d'authentification de l'apprentissage. […]. Dès son arrivée, le jeune visiteur est invité à prendre place à la forge. Le maître du lieu lui dit : "souffle !". Il s'agit de démontrer sa virtuosité. Les gens de la famille se rassemblent pour écouter le nouveau venu. » pp. 70-71.

On aurait tort de penser que cette manière de transmettre un savoir professionnel, qui accorde tant d'importance à la vue et à l'ouie, est spécifique d'une société africaine qui ne connaît encore que le travail artisanal du fer, et qui est donc, en définitive, assez fruste, tant au plan professionnel qu'au plan didactique. Que l'on songe à l'organisation spatiale d'une classe, avec son tableau face auquel se trouvent assis les élèves afin qu'ils le « voient bien », au maître qui parle face à la classe afin d'être entendu de tous[62], aux élèves qui sont sollicités oralement ou par « passage au tableau », afin que puisse être donné à tous d'entendre ou de voir, pour un élève singulier, sa manière de faire, ce qu'il pense, ses idées, ses erreurs

[62] Aux riches heures de l'école de la III^e République le maître, paraît-il, était tenu de parler distinctement, avec une voix assez puissante, afin « d'atteindre les rangs du fond », critère qui était pris en compte pour la certification professionnelle.

éventuelles. Ainsi l'espace et les gestes[63] des uns et des autres, sont-ils sciemment organisés dans la classe pour que certains événements didactiques puissent se produire « au vu et au su » de tous. Ceux-ci vont permettre que soient emmagasinés, oubliés ou rappelés certains souvenirs. C'est en ce sens que l'on peut, entre autres, parler de la mémoire didactique ostensive de la classe, parce qu'elle s'appuie sur des événements qui ont été publiquement, et intentionnellement pour une grande partie d'entre eux, donnés à voir (ou à entendre, manipuler, etc.).

[63] Le mot « geste » est utilisé ici dans le sens que lui donne Chevallard (1996) : « Le latin *gestus* signifie, au figuré, "prendre sur soi, se charger volontairement de", et donc "exécuter, faire". C'est en ce sens large, et non dans le sens restreint plus courant ("mouvement du corps"), que le mot est pris ici : on doit le rapprocher du verbe *gérer* et du substantif *gestion*, de même origine, et de quelques autres encore. » p. 84.

2. 6. Le jeu de la mémoire ostensive dans la production du milieu a-didactique

2. 6. 1. Le milieu

La notion de milieu a été introduite dans la théorie didactique par G. Brousseau, mais, de l'aveu même de son « inventeur », la prise en compte du terme par la communauté des didacticiens a été difficile et tardive. Aussi déplorait-il en 1990 :

> « Trois ans après la quatrième école d'été, me voici conduit à exposer le même sujet (Brousseau 1986a) devant le même auditoire. De plus le système "milieu" est absent dans les textes de présentation de la relation didactique, malgré la " démonstration" que j'avais cru fournir de sa nécessité. Ceci explique peut-être cela ».

Pour Brousseau :

> « Nous avons de nombreux exemples de situations qui, pour un observateur, paraissent s'appuyer sur "l'intervention" d'un "milieu" dont on attend qu'il se manifeste par des propriétés (par exemple physiques) indépendantes de la connaissance des protagonistes. (Exemples : le puzzle, la reproduction de figures, le nombre le plus grand, la course à vingt...). Le milieu qu'il soit physique, social, culturel ou autre joue un rôle dans l'emploi et l'apprentissage des connaissances par l'enseignant et par l'élève, qu'on le sollicite ou non dans la relation didactique ».[64]

À partir de cette première approche qui permet d'évoquer le terme, Brousseau développe une modélisation systémique de la relation didactique qui s'appuie sur la théorie des jeux : l'interaction au temps t opère entre un sous-système (élève ou enseignant) et un jeu formel. Cette modélisation constitue, en théorie des situations, une théorisation de la formation des connaissances pour l'élève :

> « Les connaissances du joueur apparaissent, dans les stratégies et dans les changements de stratégies, comme des moyens de gagner des parties ou d'en améliorer l'issue. »

Dans la poursuite de cette modélisation :

> « Pour représenter convenablement le fonctionnement non didactique des connaissances, nous devons adopter le plus souvent des situations dans lesquelles les états du jeu sont déterminés alternativement par le joueur et par un SYSTEME antagoniste qui modifie les états du jeu de façon non contrôlée par le joueur. Ce système, nous l'avons déjà signalé, est pour l'observateur une modélisation de l'environnement et de ses réponses

---

[64]Sur la distinction « savoir-connaissance » Brousseau-Centeno (1991) précisent : « Les connaissances sont les moyens transmissibles (par imitation, initiation, communication, etc.) mais non nécessairement explicitables, de contrôler une situation et d'y obtenir un certain résultat conformément à une attente ou à une exigence sociale. La connaissance -ou la reconnaissance- n'est pas analysée mais exigée comme une performance relevant de la responsabilité de l'acteur.
Le savoir est le produit culturel d'une institution qui a pour objet de repérer, d'analyser et d'organiser les connaissances afin de faciliter leur communication, leur usage sous forme de connaissance ou de savoir, et la production de nouveaux savoirs. Dans certaines situations (d'action, de formulation ou de preuve) le même résultat peut être le fruit d'une connaissance de l'acteur ou le fruit d'un savoir ou les deux. »

pertinentes pour l'apprentissage en cours. »

Pour illustrer son propos, Brousseau cite, comme exemple, le cas d'une séquence d'enseignement de la soustraction au CE1. Un certain nombre d'objets de différentes formes et couleurs se trouvent dans une boîte opaque et les élèves ont à deviner combien d'entre eux possèdent la même caractéristique particulière (par exemple être rond et rouge). Les élèves peuvent commencer à jouer au hasard, le comptage effectif des objets cherchés fournissant la réponse exacte et représentant le système antagoniste. Mais certains états du système antagoniste peuvent amener un changement des états du jeu des élèves. Par exemple, ayant compté le nombre total des objets de la boîte qui est 52, on a sorti de celle-ci tous ceux qui ne possèdent pas la caractéristique requise et il y en a 50. Beaucoup d'élèves estiment qu'il ne reste alors dans la boîte que 2 objets et qu'ils possèdent la propriété. Ceci constitue une modification d'état du jeu des joueurs qui passent d'une réponse donnée au hasard à une anticipation de la solution. Le jeu peut continuer ainsi, certains états du système constitué par la boîte, le nombre d'objets comptés ou pas et le nombre à trouver, modifiant les stratégies de jeu des élèves. Le système antagoniste apparaît ainsi comme dénué d'intentions, non finalisé mais, par les rétroactions renvoyées au sujet actif qui opère sur lui, il est cependant capable de provoquer des modifications des actions immédiates ou à venir du sujet, et ce faisant, de lui permettre d'apprendre une connaissance nouvelle, que nous pouvons ici identifier à une forme particulière de la soustraction (52-50).

Cette modélisation de l'apprentissage faisant jouer un rôle central au milieu est synthétisée par Brousseau :

> « Dans notre culture, l'univers, à la fois environnement, source d'influences, objet de connaissance, et référence du savoir en tant que description, est considéré comme un système, *non finalisé* et donc non téléologique. Se demander pourquoi est une bonne question. La situation didactique est, *pour l'observateur*, la modélisation de l'environnement dans lequel est plongé un joueur, la situation d'action, d'apprentissage ou d'enseignement pour l'élève, le cadre de l'enseignement pour l'enseignant. Le système antagoniste du joueur dans une situation est *pour le joueur* comme pour l'observateur, une modélisation de la partie de l'univers à laquelle se réfère la connaissance en jeu et les interactions qu'elle détermine. C'est ce système antagoniste que nous avons proposé d'appeler *milieu*. Il joue un rôle central dans l'apprentissage, comme cause des adaptations et dans l'enseignement comme référence et objet épistémologique (Définition : le milieu est un jeu ou une partie de jeu qui se comporte comme un système non finalisé.) »

Il serait erroné de croire que le modèle présenté ici est une transposition du modèle behavioriste S-R, modèle dont Brousseau (1986) montre et rappelle les limites. Il se rapproche davantage du modèle piagétien dans le sens où, pour ce dernier, le sujet construit ses connaissances sur l'objet qui « résiste » par assimilation-accomodation, la dialectique enclenchée par le fonctionnement de ce couple débouchant sur l'équilibration majorante[65].

[65] Sur la théorie de l'assimilation chez Piaget, on peut par exemple citer Lerbet (1970) : « Selon Piaget, l'adaptation intelligente est un processus d'organisation active qui va prolonger, sans la contredire, l'organisation biologique en la dépassant par la construction de nouvelles structures. Ce processus obéit aux mêmes lois fonctionnelles que le processus d'adaptation biologique. Lorsque le sujet se trouve dans un état structuré S^1 en présence d'un objet O, il aura tendance à l'incorporer à sa structure. Devant une certaine résistance de l'objet il sera conduit à l'accommoder après différenciation des schèmes assimilateurs. La complexité structurale S^2 qui en résultera sera plus importante mais elle aboutira conjointement à une plus grande cohérence dans la structure et

Dans le modèle proposé par Brousseau, la description d'une situation didactique en terme de jeu ne saurait se passer de la « nécessité du sous-système » milieu a-didactique[66]. En effet, une des clauses du contrat didactique stipule :

> « ... qu'à la fin de l'enseignement, le système enseigné sera supposé pouvoir faire face, à l'aide du savoir appris, à des systèmes dénués d'intentions didactiques. Le savoir enseigné à l'élève est supposé lui donner alors la possibilité de *lire* ses relations avec ces systèmes comme des nouvelles *situations a-didactiques* et par ce moyen, leur apporter une réponse appropriée. Le *milieu* est le système antagoniste du système enseigné, ou plutôt, précédemment enseigné. »

Cette clause du contrat sera réalisée lorsque l'élève, après enseignement, sera seul aux prises avec le travail d'un exercice, la résolution d'un problème, la recherche d'une démonstration, etc.

Chevallard (1989) situe, quant à lui, la définition du terme de milieu dans une problématique institutionnelle, en montrant comment le milieu qui, en première approche, peut être considéré comme un « donné de la nature », est en fait un construit institutionnel :

> « Au cours de l'évolution temporelle de l'institution (par rapport au temps interne t_I), des sous-systèmes du système général des objets institutionnels vont se stabiliser durablement, en ce sens que les rapports institutionnels à ces objets vont, sur une période assez longue, cesser d'évoluer, se révéler "robustes" face aux perturbations extérieures, et se "naturaliser" en devenant transparents aux acteurs de l'institution. C'est le phénomène de *désinstitutionnalisation apparente des objets et rapports institutionnels*, contemporain d'un dépérissement relatif des relations institutionnelles à propos des objets considérés, processus par lequel les acteurs pourront vivre l'illusion d'un "accès" à ces objets qui soit *non assujetti à l'institution*. […] De tels sous-systèmes d'objets vont assumer, pour les acteurs de l'institution, une fonction de *milieu*, celui-ci apparaissant doué d'une objectivité échappant au contrôle et à l'intentionnalité de l'institution : on pourra dire alors que le milieu est "*a-institutionnel*". Le "jeu" de l'acteur avec ces objets lui apparaîtra alors comme un jeu à *un joueur*, un jeu "*contre la nature*", dépendant uniquement des propriétés intrinsèques de la "nature" et de ses propres choix (et non de telle ou telle convention à propos de la nature). Il en ira en particulier ainsi pour tous les objets culturels pour lesquels l'institution considérée "reprend à son compte", à titre de rapport institutionnel, *le rapport culturel courant*. Ainsi, par exemple, à l'école primaire et au-delà, de l'objet "propriétés des objets matériels", tel qu'il est mis en jeu dans les activités de la classe. »

Comme pour Brousseau, l'existence et la prise en compte d'un milieu, sont pour Chevallard nécessaires pour que « quelque chose » puisse être enseigné et appris, ou que cet apprentissage puisse être à son tour pris comme objet d'étude. Pour l'un et l'autre, le milieu apparaît donc comme un élément nécessaire dans la relation didactique afin que puissent s'opérer les apprentissages visés, puisque, dans le cas d'une relation didactique, et contrairement au cas d'une relation d'apprentissage « brut » non didactique, une institution est constituée « dans l'intention » de faire apprendre quelque chose à quelqu'un. Ainsi, complétant la modélisation du fonctionnement des systèmes didactiques (notés SD dans le texte qui suit), Chevallard (1992) précise :

> « […] pour qu'un SD fonctionne, il faut qu'à chaque instant – par rapport au temps propre du SD comme

---

dans ses relations avec le *milieu* (adaptation). […] Par un processus d'équilibration progressive, il [l'homme] tend à constituer un *milieu* stable et étendu dont l'adaptation assure la fermeture. » pp. 100&104.

[66] Brousseau (1986a) donne la définition suivante : « [une situation est dite a-didactique] en ce sens que disparaît d'elle l'intention d'enseigner (elle est toujours spécifique du savoir). Une situation pédagogique non spécifique d'un savoir ne serait pas a-didactique mais seulement non didactique. »

institution – il existe un ensemble d'objets institutionnels qui, pour les sujets du SD, aillent de soi. Des objets O, donc, tels que les rapports institutionnels $R_I(p, O)$ (où p = e, E)[67] soient *localement stables*. En d'autres termes, il faut minimalement *qu'il existe un milieu*. […] … le fonctionnement d'un système didactique fait "bouger" le milieu : c'est même pour cela, peut-on dire, que les systèmes didactiques existent ! Certains des éléments du milieu vont être destabilisés et cesseront momentanément d'appartenir au milieu, avant de s'y restabiliser ensuite, dans une organisation économiquement et écologiquement différente. […] À chaque instant, le milieu apparaît subjectivement comme un donné ; mais c'est en vérité *un construit permanent*. […] on pourra comparer ce processus de "mésogénèse" (de genèse du milieu) au processus par lequel un immeuble se construirait en reconstruisant – ou en "réhabilitant" – les étages inférieurs chaque fois qu'un étage lui est ajouté. Sans milieu – sans les étages inférieurs -, un système didactique ne peut pas fonctionner : impossible de rajouter un étage quand il n'y a rien en-dessous, pas même de fondations. Mais, inversement, le fonctionnement d'un système didactique change le milieu. […] L'évolution du milieu revient à faire que, subjectivement, l'univers transparent, allant de soi, stabilisé – c'est-à-dire le milieu – où le sujet s'est accoutumé à vivre, tout à coup s'opacifie, se brouille, se remplit d'incertitude – avant de retrouver éventuellement sa transparence subjective originaire, critère d'un apprentissage terminé. »

La définition du milieu en didactique, telle que donnée à travers les citations rencontrées, nous semble rejoindre la discussion, par Taylor (1995), du terme « d'arrière-fond » chez Heidegger et Wittgenstein, dans l'article qu'il consacre à la notion d'habitus chez Bourdieu. Pour Taylor :

« La compréhension s'opère toujours par rapport à un arrière-fond fait de ce que l'on tient pour acquis, de ce sur quoi l'on s'appuie ni plus ni moins. […]. L'arrière-fond incorpore véritablement une compréhension ; il consiste en une appréhension des choses qui, quoique implicite, peut nous permettre de formuler des raisons et des explications si on nous met au défi d'en donner. […] Voir que notre intelligence réside avant tout dans nos pratiques, c'est attribuer un rôle incontournable à l'arrière-fond. […] La compréhension d'arrière-fond … est dans une large mesure incorporée. Ceci aide à expliquer la combinaison de traits qu'elle présente : c'est une forme de *compréhension*, permettant de trouver du sens aux choses et aux actions, mais en même temps entièrement informulée, tandis que, troisième point, elle peut **servir de base à une formulation nouvelle. »** (souligné en gras par nous)

Cette « base à une formulation nouvelle » est bien la dimension indispensable à la compréhension d'une nouvelle pratique mathématique, que l'institution veut faire étudier, et qui va incorporer des objets de savoirs nouveaux, à côté d'anciens qui constituent « l'arrière-fond ». En retour, cet « arrière-fond » va fabriquer « le sens » de ces nouveaux objets, en servant de base à laquelle se référer pour évaluer ce qu'ils apportent de nouveau dans de nouvelles pratiques, ou dans d'anciennes débarrassées de vieux objets. C'est ce principe de rétroaction que l'on trouve dans la définition du milieu donnée par Brousseau, milieu vu par l'observateur et le joueur comme un système antagoniste.
Avec la définition du milieu que donne Chevallard (1989), apparaît une dynamique, celle par laquelle des objets construits par l'institution semblent devenir, avec le temps, « a-institutionnels » : ces objets, non interrogés, se stabilisent, nous dit Chevallard. Ce processus, dans lequel le temps et la pratique interviennent de façon déterminante, nous paraît s'appuyer sur un temps long et des dimensions de pratiques qui ne changent plus. Or, les intervalles temporels dont disposent l'enseignant pour engager l'étude d'un objet nouveau sont souvent d'amplitude restreinte (dans la pratique enseignante, ils se calculent souvent en divisant le nombre de semaines de l'année scolaire par le nombre de chapitres contenant le programme), et le but de l'enseignement est bien de faire changer les pratiques des élèves, ou tout au moins

[67] p désigne la position possible occupée par un sujet de I ; soit, généralement, e pour élève et E pour professeur, lorsqu'il s'agit d'une institution didactique.

d'en introduire de nouvelles sur de nouveaux objets de savoir. C'est ce dernier point que souligne la définition donnée par Chevallard (1992) qui précise cette destabilisation d'éléments du milieu. Le temps long et des pratiques stables qui touchent aux objets de savoir enseignés sont alors des éléments difficiles à trouver dans le quotidien des institutions didactiques, notamment en mathématiques. Comment se construit le milieu pour de nouveaux objets à enseigner, et quelle est la place accordée à la mémoire dans cette construction du milieu dans l'ordinaire des classes de mathématiques, est alors une question importante pour laquelle nous allons réserver la suite de ce chapitre.

2. 6. 2. Remarques sur la notion de milieu, rapports avec la mémoire pratique

Une définition ultérieure, plus formalisée, est donnée par Chevallard (1992) pour le milieu, qualifié alors d'institutionnel :

> « À chaque institution I est associé un ensemble d'objets, O_I, dit ensemble des objets *institutionnels* (pour I), qui est l'ensemble des objets O que connaît I, c'est-à-dire pour lesquels existe un rapport institutionnel $R_I(O)$. […]. Pour toute institution I, il existe ce que j'appellerai un *temps institutionnel* t_I. L'ensemble O_I dépend de $t=t_I$, et il serait donc plus exact de la noter $O_I(t)$. […]… à chaque "instant" t, de nouveaux objets institutionnels apparaissent, tandis que d'autres disparaissent (pour n'être plus, par exemple, qu'institutionnellement visibles depuis I). Il en va de même des rapports institutionnels $R_I(O, t)$.[…]
> On désigne par $C_I(t)$, et on nomme contrat institutionnel relatif à I au temps t, l'ensemble des couples $(O,R_I(O, t))$, où O est un élément de $O_I(t)$. On nomme alors milieu institutionnel relatif à I au temps t, et on note $M_I(t)$, le sous-ensemble de $C_I(t)$ formé des couples $(O, R_I(O, t))$ "stables" au temps t. […] les éléments $(O, R_I(O, t))$ qui constituent le milieu – les éléments "stables" – sont ceux qui, subjectivement, c'est-à-dire pour les sujets de l'institution I, […] apparaissent comme *allant de soi*, *transparents*, *non problématiques*. »

Reprenant (partiellement) la définition du milieu donnée par Chevallard (1992), comme étant fait des objets et des rapports institutionnels aux objets qui apparaissent « stables » pour les sujets de l'institution à un moment t donné, objets et rapports étant eux-mêmes pris dans la vie institutionnelle d'un objet donné, avec son écologie, plusieurs questions peuvent être adressées qui permettent de préciser les contours de la notion de milieu, et d'éviter les méprises.

Tout d'abord, à l'issue de l'enseignement, le rapport personnel de l'élève au savoir doit coïncider, dans sa composante publique, avec le rapport institutionnel attendu.
Or, l'atteinte de cet objectif final est organisée, dans l'enseignement des mathématiques, par les phases de dévolution des problèmes à l'élève[68], phases destinées à faire évoluer son rapport personnel à l'objet de savoir afin de le rendre conforme au rapport institutionnel attendu. Avec la dévolution d'un problème, c'est donc aussi la dévolution d'un milieu qu'il incombe à l'élève de recevoir. Cette dévolution, qui est un des termes du contrat didactique, est aussi une condition d'apprentissages nouveaux. Avec cette clause du contrat, c'est l'injonction de passer dans la position « résolveur de problèmes », pour reprendre une formulation de Brousseau-Centeno (1991), qui est adressée à l'élève ; clause pour laquelle l'adhésion de l'élève assurera

[68] Brousseau (1988) donne la définition suivante : « La dévolution est l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage (a-didactique) ou d'un problème et accepte lui-même les conséquences de ce transfert ».

certes son apprentissage, mais aussi permettra l'évaluation de son rapport au savoir par l'enseignant. Lorsque le bon fonctionnement du contrat didactique permet à l'élève de l'identifier, cette phase de dévolution s'accompagne donc de la reconnaissance, par l'élève, que l'enseignant attend de lui l'action dans le milieu a-didactique qui va signer l'acceptation et le bon fonctionnement de cette dévolution. L'élève rentre alors dans une activité cognitive de reconnaissance et de construction du milieu pour l'activité qui lui est demandée ; la résolution du problème modifiant le milieu (des objets entrent et sortent du milieu, les rapports des objets du milieu entre eux changent aussi), et le milieu ainsi construit contribue, par ses rétroactions, à la résolution du problème.
La régulation de ces interactions est pilotée par une démarche d'auto-évaluation de l'élève, orientée vers la satisfaction du terme du contrat didactique qui est ici à la charge de l'élève : organiser les objets du milieu de manière à produire, à partir d'eux, la réponse mathématique attendue par le professeur à la question qui a été posée à l'élève. Ceci suppose donc que l'élève identifie pour lui-même, condition d'une dévolution réussie, des objets qu'il va considérer comme « stables », afin de servir de milieu a-didactique pour le problème qui lui a été dévolu.

Le terme d'élève ou d'enseigné mérite alors d'être interrogé : il peut s'agir d'un élève générique, représentant de ce qui a pu être nommé « le sous-système élève », ou d'un élève singulier, produit d'une histoire de sujet singulier d'une institution, dont la connaissance nous est accessible par l'étude de sa biographie didactique, et dont Mercier (1992) donne la définition suivante :

> « Étant donné que les élèves apprennent, et savent, les organisations des savoirs personnels scolaires des élèves sont nécessairement des systèmes ouverts qui sont repris, et entretenus en permanence, des systèmes qui perdurent en se renouvelant et, même, en se réorganisant parfois plus ou moins profondément. Ces apports, reprises, réorganisations des rapports personnels scolaires, se construisent au long de ce que nous appelons *la biographie d'un élève, relativement au savoir enseigné et appris : la biographie didactique d'un élève. »* p. 70.

Les définitions données tant par Brousseau que par Chevallard renvoient, parce qu'elles modélisent les systèmes didactiques (en général, pourrait-on rajouter) à l'élève générique : « le sous-système élève » modélisé comme étant un joueur face à un système antagoniste d'une part, chez Brousseau[69], et la stabilité des objets étant à référer subjectivement, c'est-à-dire à des personnes qui sont sujets d'une institution et en occupent une position donnée, d'autre part

---

[69] Margolinas (1992) note, à propos de la modélisation proposée par Brousseau : « L'utilisation de la "théorie des jeux" en sciences humaines n'est pas nouvelle, sa critique non plus. Cette théorie est organisée autour de la notion de "comportement rationnel" (Plon, 1976). Les réductions de choix et la notion même de stratégie ne peuvent s'élaborer qu'*en excluant le sujet psychologique* au profit d'un "sujet-joueur-qui-choisit". […] Le milieu a-didactique introduit par Brousseau, quelles que soient les formes de ses réalisations dans le cadre de l'ingénierie, n'est pas un milieu matériel du point de vue théorique. Le milieu a-didactique doit avoir (ou pouvoir prendre) la signification d'un "milieu mathématique". […] Le mot mathématique signifie ici : ce qui et mathématiquement pertinent dans la situation. […] La théorie des situations a-didactiques ne considère l'élève que dans la mesure où celui-ci rentre en interaction avec le milieu mathématique. Si l'élève rentre dans ce jeu, il ne retient donc que *ce qui est mathématiquement pertinent dans la situation*. C'est donc uniquement l'élève comme "sujet mathématique" (c'est-à-dire n'agissant que du point de vue du problème posé) que Brousseau retient ici. Le sujet mathématique est analogue dans la théorie didactique au sujet rationnel de la théorie des jeux. »

pour Chevallard.
Cette modélisation en termes « d'élève générique » ou de « sous-système élève », si elle constitue une entrée pour la question de l'apprentissage, tend cependant à rabattre les apprentissages, que l'on peut supposer différenciés selon les types d'élèves, parce que les formes de l'étude sont elles-mêmes différenciées sur un seul type d'apprentissage possible : celui qui a été construit ou pensé, par l'enseignant ou le didacticien, dans la constitution ou l'analyse du milieu.
Ce trait est décrit par Bouveresse (1995) dans un article où il souligne les rôles de Wittgenstein et Bourdieu dans sa mise en évidence :

> « Mais Wittgenstein critique également, par ailleurs, une conception que l'on peut appeler "mécaniste" de ce qui se passe dans le cas où nous avons réellement affaire à un calcul obéissant à des règles tout à fait strictes. Lorsque nous appliquons des règles qui sont parfaitement explicites et univoques, comme le sont apparemment les règles que nous utilisons en mathématiques, il semble que la compréhension de la règle ait en quelque sorte déterminé à l'avance et une fois pour toutes ce qui doit être fait dans chacun des cas qui pourraient se présenter. […] Pour des raisons évidentes, Bourdieu est surtout sensible à la confusion qui est régulièrement faite, notamment par les sociologues, entre deux usages très différents du mot "règle" : la règle comme hypothèse explicative formulée par le théoricien pour rendre compte de ce qu'il observe, et la règle comme principe qui gouverne réellement la pratique des agents concernés. C'est cette confusion qui amène à "donner pour le principe de la pratique des agents la théorie que l'on doit construire pour en rendre raison" [70]. C'est essentiellement à cause de cette confusion presque inévitable que Bourdieu préfère finalement s'exprimer en termes de stratégies, d'habitus ou de dispositions, plutôt que de règles. » pp. 574-575.

Il peut être intéressant de situer, afin de l'élargir, le concept de milieu à l'articulation des deux acceptions du terme « d'élève » précédemment évoqués (générique et singulier) pour, dans ce dernier cas, tenir compte de « rationalités » multiples et différenciées, d'un élève à l'autre[71]. C'est ce que montre Mercier (1992) qui identifie des phases où l'élève s'enseigne à lui-même[72]. Cette orientation est motivée, par ailleurs, par le type d'enseignement traditionnellement dispensé dans les classes ordinaires du système secondaire. La dévolution du milieu pour l'élève peut, en effet, relever de la dévolution pour chaque élève singulier d'une classe, par exemple dans le cas d'un cours « magistral » où chacun est convié à

---

[70] Cette citation de Bourdieu, extraite de *Choses dites*, nous semble dénoncer la tentation à la confusion entre système et modèle. S'il n'est pas ici question d'imputer cette confusion à la théorisation du milieu telle que précédemment décrite, et de nombreux travaux de Brousseau et Chevallard insistent sur la nécessité de cette distinction, il nous paraît cependant nécessaire d'élargir le cadre du modèle pour « rendre raison » d'autres dimensions du système.

[71] Ce faisant, nous retrouvons la préoccupation décrite par Bourdieu dans *Chose dites* : « Le jeu social est réglé, il est le lieu de régularités. Les choses s'y passent de façon *régulière* : les héritiers riches se marient *régulièrement* avec les cadettes riches. Cela ne veut pas dire qu'il soit de règle pour les héritiers riches d'épouser des cadettes riches. […] Pour construire un *modèle* du jeu qui ne soit ni le simple enregistrement des normes explicites, ni l'énoncé des régularités, tout en intégrant les unes et les autres, il faut réfléchir sur les *modes d'existence différents* des principes de régulation et de régularité des pratiques… » pp. 81-82.

[72] C'est l'étude du cas de Delphine (traité pp. 95-112) qui, à l'occasion d'une levée d'indétermination de limite d'une fonction comportant un logarithme (exercice rattaché au chapitre sur le logarithme népérien), rencontre pour la première fois le problème que le théorème sur la limite infinie du produit (enseigné précédemment dans le chapitre sur les limites) permet de résoudre. Delphine s'enseigne alors à elle-même l'usage de ce théorème, usage nullement enseigné par le professeur auparavant. Cette étude du cas de Delphine montre que l'élève peut alors être considéré comme « enseigné » à un double niveau : par le professeur, certes, mais aussi par lui-même à travers les situations a-didactiques qu'il rencontre, presque fortuitement, dans des phases d'action de résolution de problème et qui, de par l'avancée du temps didactique, semblent *a priori* déconnectées de l'enseignement dispensé par le professeur.

« suivre », donc à suivre l'évolution des objets du milieu institutionnel, ou dans le cas de la résolution individuelle d'un problème. Ou bien cette dévolution peut s'entendre pour l'élève générique d'une classe, par exemple dans le cas d'un enseignement de type « coopératif » où c'est la prise en compte, par un élève générique hypothétique, de la pertinence d'éléments de milieu officiel apportés par des élèves singuliers, ou par l'enseignant, qui constituera le milieu institutionnel pour une classe et pour un objet donné à un moment t donné. Or, chacun de ces types d'enseignement produit des apprentissages : il est donc nécessaire de construire un modèle des différents types de milieu qui leur correspondent.
Il paraît alors indispensable, dans la définition du milieu, de prendre en compte une composante privée, qui est la partie du milieu institutionnellement dévolu qu'organise pour elle-même toute personne confrontée à l'étude mathématique, que cette personne soit dans la « position élève » à qui le professeur a dévolu un problème, ou qu'elle soit de manière plus générale « face » à un problème, c'est-à-dire dans la position « résolveur de problèmes » répondant à une question qui lui est socialement posée, ou qu'elle se pose au nom de normes ou valeurs sociales, elles-mêmes intériorisées, et qui agissent pour elle à la place de la société[73]. Cette composante privée du milieu rejoint ce que nous avons antérieurement désigné sous le terme de « mémoire pratique » : la différenciation des « couches de mémoire » activées par différents élèves correspondant à des composantes individuelles différentes de ces milieux, historiquement co-construites dans les phases a-didactiques antérieurement rencontrées, et intégrées à la biographie didactique des différents élèves.

Halbwachs notait dès l'avant-propos aux « Cadres sociaux de la mémoire » :

> « Nous verrons que, le plus souvent, nous ne faisons appel à notre mémoire que pour répondre à des questions que les autres nous posent, ou que nous supposons qu'ils pourraient nous poser, et que d'ailleurs, pour y répondre, nous nous plaçons à leur point de vue, et nous nous envisageons comme faisant partie du même groupe ou des mêmes groupes qu'eux. » p. VII

La sollicitation « personnelle », hors du système didactique, de la mémoire telle que la décrit Halbwachs, suit donc le plus souvent un processus intériorisé de dévolution à soi-même d'une question que les autres pourraient nous poser, et le procédé qui permet la réponse consiste « à se placer à leur point de vue » ou au point de vue « du même groupe qu'eux ». S'il en est socialement ainsi, alors le processus de dévolution (d'une situation a-didactique pour les systèmes didactiques), tel que théorisé par Brousseau, n'est pas exclusif aux systèmes didactiques. Tout au contraire, son bon fonctionnement à l'intérieur du contrat didactique suppose que l'élève soit parvenu à le transposer d'une pratique sociale « naturelle » relative à l'utilisation personnelle de sa mémoire (réponse à une question que les autres pourraient lui poser), vers sa pratique spécifique aux systèmes didactiques. Il y a ainsi un milieu de connaissances sociales non explicitées (relatives à l'utilisation personnelle de la mémoire) qui va être utilisé et transposé à l'intérieur du contrat didactique, lui-aussi implicite, et qui va

[73] On retrouve ici une pratique utilisée explicitement par les médecins cliniciens : celle du « colloque intérieur ». Elle consiste en un test d'hypothèses mené par le médecin sous la forme d'un dialogue « intérieur » qui instruit alternativement à charge et à décharge et qui donc, de fait, convoque l'institution (médicale dans ce cas) absente. Ce dialogue intérieur, que l'on pourrait croire mené avec et par soi-même, est une manière de constitution d'un collectif de pensées pour résoudre le problème posé.

permettre la réalisation de la dévolution, celle-ci permettant en retour l'utilisation personnelle de la mémoire des connaissances de l'élève pour la construction personnelle d'un milieu a-didactique.[74].

Comment ce processus fonctionne-t-il ? C'est ce que tente de montrer le travail entrepris par Namer (1987). L'explicitation donnée atteint ses limites pour les questions relevant de la didactique, donc de l'étude des mathématiques considérée comme une pratique sociale parmi les autres, car Namer n'étudie que la mémoire parlée, celle qui se dit. Elle n'est pas mémoire en acte de pratiques. Elle ne s'exprime que par le langage, celui-ci pouvant néanmoins décrire des souvenirs de pratiques. Mais cette analyse a le mérite de souligner la multiplicité des expressions de la mémoire personnelle, tout en mentionnant leur articulation à la mémoire collective[75]. Ainsi, suivant la direction montrée par Halbwachs, Namer (1987) indique :

> « À partir de cette intuition (que nous nous souvenions comme une réponse à la question d'un autre), nous arrivons à l'hypothèse *que toute mémoire s'exprime*, quelles que soient les variations culturelles *sur le modèle d'un dialogue* où d'une certaine façon la société pose une question et d'une certaine façon la mémoire répond. » p. 232 (souligné par lui).

Cette hypothèse de la mémoire comme dialogue est testée, dans le travail de Namer (1987), à travers la pratique d'entretiens non directifs, puis semi-directifs, au cours de trois enquêtes sur des histoires de vie : la première sur les juifs égyptiens vivant en France, la seconde sur l'ascension sociale à l'intérieur de la classe salariale, la troisième sur les déportés. Il en conclut :

> « … nous supposons alors, devant le caractère tantôt spontané, tantôt hésitant du discours de mémoire dans l'entretien que *la mémoire est déjà un dialogue intériorisé*. Ce serait le dialogue où celui qui se souvient, se met, comme dit Halbwachs "du point de vue" de son groupe d'origine à la façon dont il l'était au moment où le souvenir est fixé. Mais s'il adopte ce point de vue du groupe originel, son discours est destiné à un public (qui peut être le groupe d'origine mais qui peut être un autre) ; pour ce faire, il utilise les mots, les expressions, les tons accessibles à ce public. » p. 233.

Comment ce dialogue social intériorisé détermine-t-il la mise en mémoire individuelle ? Poursuivant la réflexion d'Halbwachs, Namer (1987) répond alors :

> « ... la mémoire se présente comme *un processus total de messages qui se prépare de façon inachevée dans le for intérieur et ne se réalise que par une pratique de discours social*. À la place de la réciprocité supposée par Halbwachs entre les cadres sociaux de la mémoire individuelle, et les cadres de la mémoire du groupe, nous pensons que le cadre social de la mémoire individuelle est une *anticipation*, une *organisation du discours de mémoire en vue de la pratique sociale de la mémoire*. » p. 234.

À l'appui de cette thèse, Namer reprend l'expérience décrite par Halbwachs dans laquelle un voyageur, à l'intérieur d'un groupe d'autres voyageurs, continue par la pensée à appartenir à

---

[74] Nous retrouvons en ce point le concept de « conversion didactique »

[75] « [nous élaborons] une seconde hypothèse (qu'Halbwachs aborde en d'autres termes) suivant laquelle *il y a non pas une, mais un grand nombre de mémoires "régionales" d'origine sociale* chez un sujet *et que ces mémoires régionales sont unifiées par une mémoire englobante* et si l'on veut dominante, prête à être parlée devant un public ; elle a acquis ce pouvoir d'unification précisément par un "parler" intérieur préalable dirigé vers ce public. » pp. 132-133.

sa famille, notamment en fixant les souvenirs de son voyage avec l'intention de les lui relater à son retour[76]. Ainsi « le point de vue du groupe », tel qu'il s'exprime au travers de l'individu dans son travail de mémoire, n'est-il pas singulier. Le processus, décrit par Namer, par lequel l'individu enregistre les souvenirs suppose au moins deux « points de vue de groupe » : celui du groupe à l'intérieur duquel se produisent les événements et dans lequel ils vont se fixer ou se dire, et celui pour lequel le discours sur ces événements va être tenu.

2. 6. 3. La gestion des milieux dans les situations didactiques

Le schéma de cette multiplicité de mémoires « régionales » d'origine sociale pour un même sujet est transposable en didactique, en suivant la constitution du rapport personnel au savoir. Les deux théories didactiques nous fournissent chacune un modèle de cette constitution.
Dans la théorie des situations, le modèle de la constitution du rapport au savoir, qui s'appuie sur de multiples travaux expérimentaux, repose sur quatre phases à travers chacune desquelles le savoir joue un rôle déterminé ; elles sont couramment identifiées, dans la communauté des didacticiens, comme relevant des situations d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisation. Nous citons quelques extraits de Brousseau (1986a) qui permettent de préciser le sens de ces qualificatifs :

> « ii/ La fonction première du savoir sera donc de fournir des <u>décisions</u>, de permettre des choix au cours de l'action. Pour cela il n'est pas toujours nécessaire que le savoir s'exprime, se prouve, ni même soit formulable. Toute situation d'enseignement pourra être analysée du seul point de vue <u>des actions</u> que l'élève doit entreprendre, de leurs motivations, de rétroactions auxquelles elles sont soumises, des possibilités d'évolution des stratégies de l'élève et des représentations ainsi obtenues.
> iii/ La seconde fonction du savoir est de permettre la description représente un type de tâchedes situations, c'est-à-dire <u>la formulation des représentations</u>. Et la composante des situations d'apprentissage qui justifie cette formulation, c'est la <u>communication</u>, éventuellement l'autocommunication. […]
> iv/ La troisième fonction du savoir est d'appuyer la conviction du sujet par des preuves éventuellement organisées en <u>théories</u>. La composante de la situation qui justifie cette activité c'est <u>le débat de la preuve</u>, de la validité de ce qui a été avancé, doit être apportée à un <u>égal</u>, <u>également</u> informé. […]
> v/ La quatrième fonction du savoir est la <u>référence culturelle</u>, à l'échelon d'un petit groupe, d'une classe, d'un milieu de chercheurs ou d'enseignants ou de la société tout entière, les rapports sociaux utilisant des savoirs reposent sur un tissu de conventions. La composante des situations d'enseignement qui règle cet aspect de la connaissance est <u>l'institutionnalisation</u> par laquelle un groupe donne un statut à ce qu'il a produit par rapport à ce qui est pratiqué dans la société […] » pp. 454-455.

Pour sa part, Chevallard propose, au sein de l'approche anthropologique, un modèle des moments didactiques, ou moments de l'étude, qui s'appuie sur le modèle des organisations praxéologiques[77]. Dans ce modèle, toute organisation praxéologique peut être décrite à l'aide d'un quadruplet [$T/\tau/\theta/\Theta$], dans lequel T représente un type de tâches, τ une technique ou manière de faire pour accomplir ce type de tâches, θ la technologie de cette technique, discours tenue sur cette technique et dont certaines des fonctions consistent à la justifier et la

[76] Namer note alors : « J'enregistre bien les faits dans les catégories d'espace, de temps et de langage propres aux autres voyageurs, mais je mémorise le récit comme un récit fait sur un ton persifleur, où les faits sont commentés, ridiculisés, en complicité par avance avec mon public familial à qui je vais les raconter. »
[77] Modèle sur lequel nous reviendrons plus en détail quand il s'agira d'analyser des savoirs enseignés, dans la troisième partie de cette thèse.

rendre compréhensible, et enfin Θ qui représente la théorie en tant que technologie de la technologie. Les moments de l'étude, au nombre de six, sont définis par Chevallard (1999) de la manière suivante :

> « Le *premier moment* de l'étude est celui *de la première rencontre* avec l'organisation *O* enjeu de l'étude. Une telle rencontre peut avoir lieu de plusieurs manières, mais un mode de rencontre - ou de "rerencontre" – inévitable, sauf à rester à la surface de l'œuvre *O*, est celui qui consiste à rencontrer *O* à travers l'un au moins des types de tâches T_i constitutifs de *O*.[…] Le *deuxième moment* est celui de l'*exploration* du type de tâches T_i et de l'*élaboration d'une technique* τ_i relative à ce type de tâches. […] Le *troisième moment* de l'étude est celui de *la constitution de l'environnement technologico-théorique* [θ/Θ] relatif à τ_i. […] Le *quatrième moment* est celui du *travail de la technique*, qui doit à la fois améliorer la technique en la rendant plus efficace et plus fiable … et accroître la maîtrise que l'on en a […] Le *cinquième moment* est celui de l'*institutionnalisation*, qui a pour objet de préciser ce qu'est "exactement" l'organisation mathématique élaborée […] Le *sixième moment* est celui de l'*évaluation*, qui s'articule au moment de l'institutionnalisation : la supposition de rapports institutionnels transcendants aux personnes, en effet, fonde en raison le projet d'évaluer les rapports *personnels* en les référant à la *norme* que le moment de l'institutionnalisation aura ainsi hypostasiée. »

Les parcours personnels aléatoires, incomplets, différés ou différenciés de ces moments de l'étude, ces qualificatifs s'appliquant tout aussi bien aux divers types de situations, constituent, tant en théorie anthropologique qu'en théorie des situations, des occasions de constituer de multiples mémoires « régionales » (pour reprendre la terminologie de Namer), pour un ou des sujets (ici par exemple dans la position élève), bien qu'ils se rapportent à des souvenirs de pratiques institutionnelles unifiées ou englobées par une mémoire institutionnelle. Ces mémoires « régionales », construites lors de rencontres personnelles passées, rencontres complètes ou incomplètes avec certains éléments des organisations praxéologiques enseignées, sont les briques constitutives des mémoires pratiques.
En effet, la constitution d'une mémoire pratique pourrait se lire, rétrospectivement, et si la possibilité nous était donnée d'avoir accès à ses diverses couches, comme la liste des rencontres réussies avec des situations a-didactiques d'action, selon la terminologie propre à la théorie des situations, ou comme la réalisation réussie du quatrième des moments de l'étude, relatif au travail de la technique.
Mais comment s'assurer, dans l'enseignement quotidien, tel qu'il est réalisé par des professeurs du système éducatif, et non à travers la fabrication d'ingénieries pour certains objets à enseigner, par des didacticiens, que la mémoire pratique dont peuvent disposer les élèves va permettre d'assurer la dévolution d'un milieu a-didactique d'action, ou une première rencontre qui engagera dans les autres moments ?

Mercier (1993-1994), dans le prolongement de sa thèse (1992), se pose la question des apprentissages observés chez des élèves soumis aux conditions scolaires d'un enseignement ordinaire, ce qu'il appelle « l'observation naturelle », et débute l'étude du milieu qu'on peut rencontrer dans un tel enseignement. Il identifie deux formes possibles pour un apprentissage, qui correspondent à trois « styles » d'enseignement :

> « 1. Soit l'apprentissage se fait par l'ostension de l'usage d'un objet *O* qui est emblématique du rapport visé *S* *(il faut que S comprenne en particulier un rapport à O)*, puis la répétition par l'apprenti de l'usage de *O*.
> 2. Soit l'apprentissage se fait par la médiation didactique du rapport à l'objet de savoir *S*, ce qui suppose l'absence initiale de *S*.

- si la médiation du rapport à *S* se fait par un discours à propos de *S*, cette représentation est suivie d'exercices donnés à l'élève, au cours desquels il rencontre progressivement *S* et ses usages ;
- si la médiation du rapport à *S* se fait par la représentation d'un milieu pour l'usage de *S*, l'action de l'élève dans le milieu lui fait rencontrer la nécessité de *S*. » p. 158.

Ces trois « styles » d'enseignement, correspondent, en suivant leur ordre d'énonciation :
- à l'ostension : enseignement qui consiste à montrer à l'élève une technique relevant d'un savoir et sert d'emblème pour ce savoir, ou bien, dans sa variante déguisée, enseignement où l'élève est actif mais ne peut voir que ce que le professeur lui montre, et non ce qu'il rencontre, parce qu'il n'y a rien à voir dans ce qu'il rencontre, précisément, alors que l'un et l'autre le croient ou feignent de le croire
- au cours magistral : exposé classique du savoir, durant lequel le professeur tient un discours sur le savoir, discours que l'élève note éventuellement ; la rencontre de l'élève et du savoir se produit essentiellement ailleurs, dans les exercices que l'élève fait, ce qui lui permet d'accéder ainsi aux types de tâches auxquelles le savoir fournit des réponses
- à l'ingénierie didactique : système d'enseignement conçu par un didacticien, qui vise à faire dévolution à l'élève d'un problème auquel le savoir répond ; cette dévolution s'opère en fournissant avec ce problème un milieu permettant, grâce à l'action de l'élève dans le milieu, de faire émerger des éléments de réponse qui se constitueront en savoir

Dans l'enseignement secondaire, si le style magistral, venu du plus lointain de l'histoire de l'enseignement, a perduré avec le développement de la massification de l'accès au second degré, et si l'ingénierie didactique, à l'exception de quelques tentatives ultra minoritaires, n'y existe pas, la forme la plus développée, notamment avec la diffusion des « méthodes actives », demeure l'ostension ou l'ostension déguisée. De fait, l'observation de cours réalisés dans les classes du second degré, montrerait sans doute aussi des traces d'une forme magistrale d'enseignement et aussi des moments où un milieu a-didactique est dévolu, mais l'étude de ces formes d'enseignement telles qu'elles sont effectivement mises en œuvre, pour l'ensemble du système d'enseignement secondaire des mathématiques, reste à mener. Cependant, tant l'observation des instructions officielles[78], que celle des manuels scolaires qui, dans leur quasi-majorité, de la 6e à la Terminale, proposent en ouverture de chapitre, des « activités préparatoires », nous conduisent à considérer cette forme d'enseignement par ostension comme désormais dominante : les activités proposées n'assurant que rarement la rencontre des élèves avec le savoir[79]. Ce manque en savoir est montré par Mercier (1993-1994) sur l'exemple de la simplification des fractions. Il indique un dispositif d'enseignement grâce auquel il est possible de montrer à l'élève la technique et la lui faire apprendre, sans pour autant qu'il ait rencontré les dimensions technologiques qui vont la justifier, et donc sans qu'il ait rencontré un savoir mathématique.

[78] Citons quelques extraits des programmes. Au cycle central (5e et 4e) : « On privilégiera l'activité de l'élève, sans négliger les temps de synthèse qui rythment les acquisitions communes ». En seconde : « […] la résolution de problèmes et l'étude de situations occupent une part importante du temps de travail, allant bien au-delà de l'horaire de travaux dirigés en effectif réduit. »
[79] Sur l'analyse en terme d'organisation mathématique effectivement enseignée à travers certaines activités proposées dans des manuels scolaires, nous renvoyons aux exemples étudiés dans Matheron (1999).

Non prise en charge par une ingénierie didactique, la construction d'un milieu pour apprendre est assumée, plus ou moins bien et de manière privée, par l'élève qui étudie. La construction d'un milieu pour enseigner est, quant à elle, assumée par l'enseignant ; de manière privée sans doute, par exemple lorsqu'il conçoit son enseignement à venir, mais aussi selon les normes sociales telles qu'elles peuvent exister dans la profession, à un moment donné du développement du système éducatif et telles que nous avons pu les voir à travers les Instructions Officielles et les manuels. Aussi bien pour l'élève que pour l'enseignant, il est donc nécessaire de savoir gérer le milieu adéquat pour apprendre ou pour enseigner. Dans la partie qui clôt ce chapitre, nous étudierons le rôle de la mémoire dans la construction du milieu pour l'enseignement.

2. 6. 4. La dialectique milieu institutionnel - mémoire ostensive

Pour les institutions didactiques, une différence fondamentale avec les autres types d'institutions réside, bien que des cadres stables demeurent toutefois, en ce que les pratiques relatives au savoir et à son étude ne se reproduisent pas à l'identique. En effet, si tel était le cas, il n'y aurait pas d'apprentissage possible pour les élèves, car plus d'enseignement possible du fait d'un blocage de la dialectique ancien - nouveau[80]. Le fonctionnement de cette dialectique implique que des pratiques nouvelles vont apparaître, que d'autres vont devenir obsolètes, que d'autres enfin vont perdurer en subissant, éventuellement, certaines transformations. Un exemple permettra d'illustrer, pour ce qui peut être considéré comme relevant d'un même thème, le fonctionnement rapide, de l'ordre d'une année scolaire, de cette dialectique ancien - nouveau.

2. 6. 4. 1. Un phénomène didactique : la « rapidité » du fonctionnement de la dialectique « ancien - nouveau »

L'étude de deux manuels de lycée de la même collection, l'un de seconde et l'autre de 1^{e}S[81], fournissent un bon exemple d'évolution d'une technique d'un niveau à un autre, de seconde en 1^{e}S. L'exemple aurait pu être tiré d'autres ouvrages, pour d'autres notions mathématiques et d'autres niveaux d'enseignement, mais ces manuels, par la mise en texte adoptée, permettent de « suivre » plus facilement ce qui est, à chaque moment, considéré comme devant être

[80] Ce point, longuement étudié par Chevallard (1985) dans les chapitres 6, 7, 8 de *La transposition didactique*, est désormais bien connu et constitue le point de départ des études sur le temps didactique. Citons seulement : « Comment évolue la contradiction ancien/nouveau ? Normalement, ou mieux, normativement, cette contradiction est *dépassée* dans *le succès de l'apprentissage*. […] Le dépassement de la contradiction ancien/nouveau, à propos de tel objet, équivaut, peut-on dire, au vieillissement de cet objet : les objets d'enseignement sont victimes du *temps didactique*, ils sont soumis à une érosion, à une usure "morales", qui impliquent au cours d'un cycle d'étude leur *renouvellement*. Dans la *relation didactique* (qui unit enseignant, enseigné, et "savoirs"), l'*enseignant* est le servant de la machine didactique dont le *moteur* est la contradiction de l'ancien et du nouveau… L'enseignant est donc celui qui sait avant les autres, qui sait *déjà*, qui sait "plus"… cette avance chronologique [est] toujours détruite (par l'apprentissage), toujours reconstruite (par l'enseignement, c'est-à-dire l'introduction de nouveaux objets transactionnels [entre passé et avenir]) ».
[81] Il s'agit des ouvrages de la collection *Fractale* seconde 1995 et première 1995, édités par Bordas.

connu des élèves. En effet, ils donnent, en les institutionnalisant à travers un dispositif de « Fiches méthode » ou d'« Exercices commentés », des techniques différentes, évolutives, et tout à fait classiques, d'étude des variations d'une fonction, l'une se substituant à l'autre, tout en continuant à l'évoquer, au passage d'un niveau à l'autre, ou à l'intérieur d'un même niveau. Ainsi, dans le manuel de seconde, la page 183 est-elle consacrée à une « Fiche méthode » intitulée « Comment étudier une fonction définie sur un intervalle ». Deux techniques sont données, l'une graphique et l'autre algébrique. Pour cette dernière, le troisième point, consacré aux variations est le suivant :

> « Étudiez le sens de variation de f sur I : a et b étant deux nombres **quelconques** de I, tels que $a<b$, comparez $f(a)$ et $f(b)$, par exemple en calculant $f(a) - f(b)$. »

Cette technique est illustrée dans deux « Exercices commentés », à la page184 suivante.
Le premier est consacré à l'étude de f définie sur [-1, 1] par $f(x)=x^3+3x$. Après avoir remarqué que f est impaire, l'étude des variations est menée sur J=[0, 1] de la manière suivante :

> « Soit a et b deux éléments de J tels que $a<b$.
> $f(a) - f(b)=(a^3+3a) – (b^3+3b)$,
> $f(a) - f(b)=(a^3 - b^3)+ 3(a -b)$,
> $f(a) - f(b)=(a – b)(a^2 + ab + b^2 +3)$.
> Par hypothèse : $a – b<0$. Par ailleurs, puisque a et b sont positifs $a^2 + ab + b^2 +3>0$.
> Alors $f(a) - f(b)<0$ donc $f(a)<f(b)$ et f est strictement croissante sur J. »

Le deuxième « exercice commenté » est consacré à l'étude d'une fonction paire définie sur [-2, 2] par $f(x)=x^4-2x^2$ dont l'étude est restreinte à [0, 2] et on lit :

> « **4°** *a*) L'examen de cette courbe suggère que : f est strictement décroissante sur [0, 1] et strictement croissante sur [1, 2]. Démontrons-le.
> Soit a et b deux nombres tels que $a<b$.
> $f(a) - f(b)=(a^4- 2a^2) – (b^4 – 2b^2)$,
> $f(a) - f(b)=(a^4- b^4) – 2(a^2 – b^2)$,
> $f(a) - f(b)=(a^2- b^2)(a^2+ b^2 – 2)$,
> $f(a) - f(b)=(a- b)(a+ b)(a^2+ b^2 – 2)$.
>
> • Si a et b sont deux éléments de [0, 1] alors : $a – b<0$, $a+b>0$ et $a^2+ b^2 – 2<0$ donc $f(a) - f(b)>0$
> soit $f(a) > f(b)$.
> f est strictement décroissante sur [0, 1].
>
> • Si a et b sont deux éléments de [1, 2] alors :
> $a – b<0$, $a+b>0$ et $a^2+ b^2 – 2>0$ donc $f(a) - f(b)<0$ soit $f(a) < f(b)$.
> f est strictement croissante sur [1, 2]. »

Cette technique consiste donc à comparer $f(a)$ et $f(b)$ et pour cela, à étudier le signe de la différence $f(a) - f(b)$, en l'ayant écrite sous la forme d'un produit de facteurs dans lequel apparaît $a – b$.

Dans le manuel de 1^e^ S d'Analyse de cette même collection, cette technique de comparaison de $f(a)$ à $f(b)$ continue de vivre dans le chapitre 4 « Opérations sur les fonctions », mais en utilisant désormais un élément nouveau, étudié en seconde, et qui évite l'étude de la différence

$f(a)$ - $f(b)$: les variations de deux fonctions usuelles (les fonctions $x \to x^3$ et $x \to \frac{1}{x}$).

On trouve en effet, page 75, la même rubrique « Exercices commentés » que dans le manuel de seconde, dans laquelle on peut lire désormais en 1eS :

> « **2 Variations d'une fonction**
>
> Soit f la fonction définie sur **R*** par : $f(x)=x^3-\frac{1}{x}$. Déterminez le sens de variation de f sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
>
> **M***éthode*
>
> **Comment déterminer les variations d'une fonction *f***
>
> *Premier cas.* Par lecture graphique, si la courbe représentative de f est l'image, par une transformation, d'une courbe représentative d'une fonction simple dont on connaît les variations.
>
> *Deuxième cas*. En faisant apparaître la fonction f comme composée de fonctions dont on connaît le sens de variation.
>
> *Troisième cas*. Directement, en comparant $f(x_1)$ et $f(x_2)$, pour x_1 et x_2 éléments d'un intervalle I, tels que $x_1<x_2$.
>
> **UNE SOLUTION**
>
> La fonction f n'est pas ici la composée de fonctions simples, sa courbe représentative n'est pas la transformée d'une courbe simple : nous procédons donc directement en comparant $f(x_1)$ et $f(x_2)$ avec $x_1<x_2$, sur chaque intervalle de l'ensemble de définition de f.
>
> Posons $I_1=]-\infty, 0[$ et $I_2=]0, +\infty[$.
>
> .Soit x_1 et x_2 dans I_1 tels que $x_1<x_2$.
>
> La fonction $x \to x^3$ est strictement croissante sur **R**, donc sur I_1 ; on a donc : $x_1^3< x_2^3$
>
> De plus, si $x_1<x_2<0$, $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ et $-\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$
>
> On obtient : $x_1^3 - \frac{1}{x_1} < x_2^3 - \frac{1}{x_2}$, soit $f(x_1) < f(x_2)$.
>
> f est donc strictement croissante sur $]-\infty, 0[$.
>
> . Soit x_1 et x_2 dans I_2 tels que $0<x_1<x_2$.
>
> Alors : $x_1^3 < x_2^3$, $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$, donc $-\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$.
>
> Additionnons les inégalités membre à membre : $x_1^3 - \frac{1}{x_1} < x_2^3 - \frac{1}{x_2}$ c'est-à-dire $f(x_1) < f(x_2)$.
>
> f est donc strictement croissante sur I_2.
>
> *Remarque : f* est impaire, la symétrie de sa courbe par rapport à l'origine pouvait faire pressentir qu'elle avait même sens de variation sur I_1 et sur I_2. »

L'étude, menée en seconde, des fonctions « usuelles » $x \to x^3$ et $x \to \frac{1}{x}$, permet de réaliser une variante plus économique de la technique consistant à comparer $f(a)$ et $f(b)$, en évitant de devoir étudier le signe de $f(a) - f(b)$.

La technique « ancienne » perdure, mais l'intégration d'autres éléments « anciens » (les fonctions « usuelles »), lui assure un caractère « nouveau » qui se justifie par l'économie ainsi réalisée et qui justifie, par contre coup, la nécessité pour les élèves de la connaissance d'un savoir « ancien » sur les fonctions « usuelles ». Celui-ci est, d'ailleurs, implicitement supposé disponible par le manuel[82].

[82] Remarquons, par ailleurs, que la technique explicitée nécessite la connaissance des maniements d'opérations sur les inégalités ; ce qui est aussi une manière de justifier la nécessité pour les élèves de se rendre disponible (donc d'avoir appris) ce savoir enseigné, lui-aussi, l'année précédente.

Plus loin dans ce même manuel de 1e S d'Analyse, pages 162 et 163, dans le chapitre 7 « Représentations graphiques. Asymptotes », on trouve la technique « nouvelle » standard utilisant la dérivée, et mise en exergue dans la même rubrique « Exercices commentés », qui constitue une sorte d'institutionnalisation des techniques attendues :

« **SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION**
Déterminez le sens de variation de chacune des trois fonctions suivantes :
1° f : x $\rightarrow 3x^2\text{-}2x\text{+}1$

2° $g : x \rightarrow \frac{1}{3}x^3\text{-}x^2\text{+}x\text{-}1$

3° $h : x \rightarrow \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}$.

M*éthode*

Comment déterminer le sens de variation d'une fonction *f*
. A l'aide de la définition d'une fonction croissante ou décroissante sur un intervalle. Par exemple : supposer $a<b$ et comparer $f(a)$ et $f(b)$.
. A l'aide des opérations sur les fonctions. Par exemple :
1. si f et g sont croissantes sur I alors $f+g$ est croissante sur I ;
si f est croissante sur I et g croissante sur f(I) alors $g \circ f$ est croissante sur I ;
si f est croissante sur I et g décroissante sur f(I) alors $g \circ f$ est décroissante sur I .
. A l'aide de la dérivée de f sur$I$.

UNE SOLUTION
1° Dans le cas d'une fonction f polynôme de degré 2, l'écriture de $f(x)$ sous forme canonique permet de déterminer le sens de variation de f . L'utilisation de la dérivée de f conduit, souvent plus rapidement, au sens de variation de f. La fonction f est dérivable sur **R** et, pour tout x de **R**, $f'(x)=2(3x\text{-}1)$.
[…]
2° La fonction g est dérivable sur **R**. Pour tout x de **R** : $g'(x)=x^2\text{-}2x\text{+}1$, $g'(x)=(x\text{-}1)^2$
[…]
3° La fonction h est le quotient de deux fonctions dérivables et est définie sur **R**-{1}. Elle est donc dérivable sur **R**-{1}. Un calcul simple conduit au résultat suivant :
Pour tout x de **R**-{1}, $h'(x)=\frac{3(x+1)}{(x-1)^3}$.
[…] »

Par comparaison à ce qui était considéré comme attendu trois chapitres auparavant, on peut remarquer que la technique graphique n'est plus mentionnée, la technique ancienne de comparaison entre $f(a)$ et $f(b)$ a toujours droit de cité, tout comme la technique consistant à utiliser des opérations sur les fonctions, mais « la solution » qui est montrée s'appuie sur le savoir « nouveau » qui vient d'être enseigné : la dérivée et l'étude de son signe pour la détermination des variations.

Ces changements de pratiques vont entraîner des changements de termes du contrat didactique qui s'y rapportent : on n'attend plus, par exemple, qu'afin d'étudier les variations d'une fonction, des élèves de Terminale S recourent systématiquement à la technique du signe de $f(a) - f(b)$. Comment va réellement évoluer le contrat didactique du point de vue des sujets de l'institution, notamment de ceux qui se trouvent en position « élèves » ? Vont-ils ou non rester dans le contrat, alors que les pratiques de l'institution dans laquelle ils se trouvent désormais ont changé ?

On voit ainsi les pratiques, ici les techniques associées au type de tâche consistant à étudier les variations d'une fonction, évoluer avec le temps didactique. Mais si l'on rapporte cette évolution à la durée, il est notable qu'elle s'effectue très rapidement par rapport à l'évolution des pratiques qui s'opèrent dans la majorité des autres institutions. Songeons par exemple aux techniques de labourage demeurées stables sur des siècles, aux techniques de production demeurées stables sur des décennies dans les ateliers artisanaux, ou des années dans les usines ; et les changements initiés par les techniques informatiques et jugés très rapides, sont encore trop lents si on les rapporte aux changements des pratiques demandés aux élèves à l'intérieur de l'institution scolaire où l'échelle du temps se mesure en mois, et parfois en semaine.

2. 6. 4. 2. Le nécessaire travail de la mémoire comme reconstruction / réorganisation du passé didactique peut être mené grâce à l'ostension

Nous avions vu, lors de l'étude de copies d'élèves pour l'évaluation externe de l'IREM d'Aix-Marseille, et sur le seul exemple de la détermination d'un rectangle en classe de seconde, que les mémoires pratiques mises en jeu peuvent être fort diverses, que le travail d'étude, mené ou pas, modifie et réorganise des paysages anciens. Peut-on parler encore d'une mémoire collective de l'institution à un instant t, alors que les histoires didactiques, que les biographies didactiques des sujets qui la composent, sont à ce point diverses ? Sur quels savoirs et savoir-faire le professeur va-t-il pouvoir compter pour construire un milieu qui s'impose à tous, et sur lequel s'appuyer pour légitimement progresser dans l'avancée du temps didactique ?

Tout travail d'homogénéisation des connaissances disponibles engage une standardisation des pratiques, et de là une reconstruction du passé à travers les pratiques qu'il contient. Ce travail de mémoire, puisque de reconstruction du passé, peut s'opérer sur les plans privé ou public.
Sur le plan privé, celui de la mémoire pratique, c'est le travail d'étude mené personnellement, sous la direction ou non du professeur, qui permet cette reconstruction. Mais, même s'il a été mené, ce travail ne garantit pas l'idonéité du rapport personnel au rapport publiquement attendu tant qu'un moment d'évaluation n'a pas permis de l'objectiver. S'il est idoine, cette situation garantit temporairement, avant que l'avancée du temps didactique ne risque de venir la remettre en cause, la fiction, s'exprimant à travers des pratiques communes relatives aux mêmes classes d'objets mathématiques, d'une unicité des positions dans le contrat institutionnel.
Sur la scène publique de « l'institution classe », le passé est, lui-aussi, continuellement rappelé ou reconstruit :
- les phases d'institutionnalisation indiquent quelles sont les pratiques à retenir et corrélativement, grâce à cette fonction, celles qui peuvent être oubliées[83]

[83] « Tel exemple, dont l'examen a bien servi le projet de construction en révélant des perspectives *a priori* insoupçonnées, tel état de telle technique, que l'on aura mis longtemps à dépasser, tel théorème, en lui-même insuffisant mais qui fut le premier résultat *démontré*, seront-ils intégrés à l'organisation mathématique définitive, ou bien les écartera-t-on ? Le moment de l'institutionnalisation, c'est donc d'abord celui où, dans la construction "brute" qui, peu à peu, a émergé de l'étude, vont être séparés, par un mouvement qui engage l'avenir, le

- les autres moments didactiques, ou les autres situations didactiques[84], par lesquels passe la construction de l'organisation mathématique enseignée, nécessitent un milieu pour cette construction, donc une mémoire commune de connaissances partagées

Ces deux points engagent divers gestes, notamment de l'enseignant, afin de marquer ces phases ou de construire un milieu pour le savoir à enseigner. Pour ce faire, une technique classique d'enseignement réside, comme nous l'avons signalé, dans l'ostension grâce à laquelle le professeur montre le savoir ou le savoir-faire que les élèves doivent connaître. Brousseau (1996) donne la définition suivante du contrat d'ostension :

> « Le professeur "montre" un objet, ou une propriété, l'élève accepte de le "voir" comme le représentant d'une classe dont il devra reconnaître les éléments dans d'autres circonstances. […]. Il est sous-entendu que cet objet est l'élément générique d'une classe que l'élève doit imaginer par le jeu de certaines variables souvent implicites. […] La base du contrat est donc une hypothèse empiriste et réaliste qui arrange apparemment les deux parties. Elle permet au professeur de prétendre communiquer une connaissance en faisant l'économie à la fois des situations d'action où elle transparaît, de sa formulation et de l'organisation du savoir correspondant. […] Le contrat d'ostension, bien que fondé sur une épistémologie "fausse" est pourtant très utilisé par les enseignants car il fonctionne très bien dans de nombreux cas où une définition mathématique serait trop lourde ou inutile. »

2. 6. 4. 3. Utilisation de la mémoire ostensive pour la constitution d'un milieu institutionnel

Deux exemples, issus de l'étude du même thème, le logarithme népérien et l'exponentielle, tirés de cours donnés par le même professeur, à une année d'intervalle, dans une Terminale S, permettent d'illustrer deux modalités du contrat d'ostension.
Dans le premier cas, le 5 février 1998, il s'agit de l'institutionnalisation d'une technique de résolution d'équations logarithmiques se ramenant à des équations algébriques. Un élève a corrigé au tableau les deux exercices qui avaient été donnés quelques jours auparavant : résoudre les équations $(\ln x)^2+\ln x=2$ et $(\ln x^2)+\ln x=2$. Le professeur conclut :

« Bon, celui-là vous l'avez mieux réussi que l'autre. Alors, regardez ces deux équations. Evidemment, le gros truc, c'est ça *(P entoure* $(\ln x)^2$ et $(\ln x^2)$*)*. Qu'est-ce qu'on a fait, là ? Dans les deux, on a composé la fonction logarithme avec la fonction carré. Seulement, on les a pas composées dans le même sens ! Ici *(P montre de la main sous* $(\ln x)^2$*)*, on a d'abord fait ln et ensuite la fonction carré :

$$\mathbf{x} \xrightarrow{\ln} \mathbf{\ln x = X} \xrightarrow{\text{carré}} \mathbf{X^2} = (\ln x)^2$$

(Puis sous $(\ln x^2)$).

$$\mathbf{x} \xrightarrow{\text{carré}} \mathbf{x^2 = X} \xrightarrow{\ln} \mathbf{\ln(X) = \ln(x^2)}$$

Ici *(P montre sous* $(\ln x)^2$*)*, ça donne un polynôme de degré 2 où la variable a été remplacée par lnx:
X^2+X-2

"mathématiquement nécessaire", qui sera conservé, et le "mathématiquement contingent", qui, bientôt sera oublié. » Chevallard 1999.

[84] Rappelons que les organisations didactiques sont, dans la théorisation de Chevallard, constituées de six moments didactiques : première rencontre, exploration du type de tâches et élaboration d'une technique relative à ce type de tâche, constitution de l'environnement technologico-théorique, travail de la technique, institutionnalisation et enfin évaluation. Dans la théorie des situations de G. Brousseau, trois situations sont a-didactiques : l'action, la formulation et la validation ; elles sont parachevées par les situations d'institutionnalisation.

Donc on est conduit à faire un changement de variable. En le voyant vous devez être capable de reconnaître que ça c'est un truc où lnx joue un rôle de variable. Donc d'abord je vais chercher lnx, c'est-à-dire que d'abord je vais travailler sur cette histoire de carré et après je travaillerai à ce niveau-là *(P montre* lnx=X*)*. Alors qu'ici *(sous* $(\ln x)^2$*)*, c'est logarithme de quelque chose plus logarithme de quelque chose égale 2. Je vais transformer ça, je sais transformer ça, en logarithme de machin égale logarithme de truc. Et donc tout de suite, en voyant ça, vous devez être capables, tout de suite, de comprendre que vous n'allez pas faire du tout la même chose… qu'ici *(P montre sous*($\ln x^2$)*)*. Vous allez vous ramener à logarithme de machin égale logarithme de truc :

$\ln\blacksquare=\ln\bullet$

et ici *(sous* $(\ln x)^2$*)* vous allez vous ramener à ça *(P montre* X^2+X-2*)*, d'accord ? Alors quand vous avez une équation avec des logarithmes, c'est toujours l'un des cas qui se passe. Alors, on a vu que, hier, y'a un premier problème, toujours, c'est le problème du domaine de définition, c'est un problème très important. La deuxième chose qu'il faut voir, c'est que tantôt on se ramènera à ça *(P montre sous*($\ln x^2$)*)*, et que tantôt on se ramènera à ça *(P montre sous* $(\ln x)^2$*)*. Suivant que le logarithme joue un rôle d'inconnue, vous pouvez toujours vous ramener à une forme où le logarithme joue un rôle de variable. Ou bien alors, vous pouvez transformer votre équation en logarithme de quelque chose égale logarithme d'autre chose. Voilà, quand vous avez compris ça, vous pouvez faire toutes les équations en logarithmes possibles. Alors on va regarder des systèmes. »

Jusque dans la gestuelle du professeur, qui désigne de la main les deux équations différentes et entoure $\ln x^2$ et $(\ln x)^2$, dans le symbolisme (« $\mathbf{\ln\blacksquare=\ln\bullet}$ ») ou le vocabulaire qu'il utilise (« logarithme de machin égale logarithme de truc »), il s'agit bien pour lui de *montrer*, pour les institutionnaliser et les discriminer, les étapes les plus importantes de la pratique de techniques dont la désignation est mal commode, ou pas assez « parlante » à ce niveau de l'enseignement (« le changement de variable »). Dans cet exemple, on peut aussi remarquer que le professeur fait directement appel à la mémoire des élèves : « Alors, on a vu que, hier, y'a un premier problème, toujours, c'est le problème du domaine de définition, c'est un problème très important. » Il s'agit ici, dans cet exemple, de rassembler les éléments épars, enseignés sur deux séances, et qui constituent la technique à institutionnaliser.

Un second exemple, extrait du cours du 28 janvier 1997, a trait à l'étude des limites à l'infini de la fonction exponentielle :

«106. P : « … **<u>Conclusion</u> :** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

Alors maintenant, on va regarder ce qui se passe en -∞.Qu'est-ce qui se passait en -∞ sur le dessin ? »
107. Un élève : « Il est négatif »
108. D'autres élèves : « Non, ça tend vers 0 »
109. P : « On va avoir une limite égale à 0. Et qu'est-ce qu'il y avait sur le dessin en -∞ ? »
110. Une élève : « Une asymptote »
111. P : « Une asymptote, quoi ?… Une asymptote horizontale. Hein ? La courbe était asymptote à l'axe des x
P dessine les représentations graphiques des fonctions exponentielle et logarithme népérien.
112. P : « Voilà, ici on avait une branche infinie avec une asymptote horizontale. Nous, notre but, c'est de prouver que la limite de la fonction e^x en -∞, c'est 0. C'est ça qu'on voudrait vérifier. Est-ce que vous vous rappelez comment on avait trouvé la limite de la fonction log. en 0 à partir de la limite de la fonction log en en -∞ ? »
113. Murmures des élèves
114. P : « Vous vous rappelez comment on avait démontré la limite de la fonction log. en 0 ? »
115. Une élève : « Avec un… »
116. P : « On a utilisé le fait que $\ln\frac{1}{x}$, c'est -lnx. Reprenez votre cours, regardez. Allez! Cherchez! »
117. Un élève en lisant son cours : « $\ln\frac{1}{x}$, c'est -lnx »
118. P : « Bon, alors on a une formule qui est… »
119. Le même élève : « équivalente ? »

120. P : « … qui sort de ça, qui est un peu issue de là sur la fonction exponentielle »
121. Des élèves avec P qui écrit au tableau :
« $\mathbf{e^{-x} = \frac{1}{e^x}}$ »
122. P : « Alors je voudrais chercher la limite de e^x en $-\infty$, comment je vais écrire e^x ? »
123. Des élèves : « $\frac{1}{e^{-x}}$ »
124. P : « D'accord, oui c'est ça :
$\mathbf{e^{x} = \frac{1}{e^{-x}}}$ »
125. P avec des élèves : « Quand x tend vers $-\infty$, -x tend vers $+\infty$, e^{-x} tend vers $+\infty$, $\frac{1}{e^{-x}}$ tend vers 0. »
126. P : « Bon alors :
$\lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$
Voilà notre asymptote. »

Le professeur évoque maintenant le souvenir de la courbe de l'exponentielle, qui a été étudiée il y a quelques jours déjà (la séance avait débuté par la correction d'exercices de calcul de dérivées de fonctions contenant des exponentielles, qui étaient à chercher pour ce jour). C'est ainsi la première rencontre avec celle-ci qui revient présente dans le milieu sur lequel va travailler la classe. La réponse erronée d'un élève (107 : « Il est négatif ») est écartée par des élèves (108 : « Non, ça tend vers 0 ») et P qui valide (109 : « On va avoir une limite égale à 0 »). Le milieu constitué de la courbe, qui n'est pas encore redessinée par P mais seulement présente dans le souvenir qu'en garde une partie jugée suffisamment importante de la classe, autorise P à poser une question pour laquelle il sait que la rétroaction du milieu évoqué fournira la réponse. Et en effet, à la question posée par P en 109 « Et qu'est-ce qu'il y avait sur le dessin en $-\infty$? », la réponse attendue est donnée par une élève en 110 « Une asymptote ». Le dessin de la courbe, que P trace alors, constitue la matérialisation du milieu institutionnel, visible désormais par tous et non plus simplement attaché personnellement aux sujets qui s'expriment (P et quelques élèves), de la validation de cette réponse.
La même technique de remémoration est utilisée par P afin de constituer un milieu pour la démonstration de la limite en $-\infty$ de e^x : c'est maintenant la technique, qui avait été employée pour déterminer la limite en 0 de la fonction ln, qui va servir de milieu pour l'anticipation des étapes de la démonstration attendue (114. P : « Vous vous rappelez comment on avait démontré la limite de la fonction log. En 0 ? »). Et comme le souvenir n'en est manifestement pas présent dans la classe, P a alors recours à l'ostension par élève interposé (116. P : « On a utilisé le fait que $\ln\frac{1}{x}$, c'est $-\ln x$. Reprenez votre cours, regardez. Allez ! Cherchez ! »). Le cadre de la démonstration précédente, que les élèves ont désormais sous les yeux, peut alors servir de schéma et de milieu. Il va, en interaction entre P, qui commente et écrit au tableau, et les élèves qui donnent des bribes de cette démonstration interprétées par P à travers un

classique effet Jourdain, fournir un milieu institutionnel pour l'anticipation et le contrôle de la démonstration qui se fait.
La même technique didactique, mêlant dans une dialectique aux pôles étroitement imbriqués, les souvenirs des élèves qui se disent publiquement et l'ostension afin de jouer sur des effets de contrat qu'autorise alors l'existence d'un milieu institutionnel, est utilisée dans la suite du cours pour la détermination de la direction asymptotique de l'exponentielle ; la comparaison de e^x à x servant de milieu pour l'anticipation et le contrôle de la comparaison de e^x à x^2. Nous soulignons en italique, dans l'extrait suivant, les mots qui témoignent de cette technique :

127. P : « *Vous vous rappelez* que, quand on avait étudié la fonction logarithme, on n'a pas seulement étudié la limite en $+\infty$ et la limite en 0, ensuite on a étudié la limite en $+\infty$ de $\frac{\ln x}{x}$. Alors ici, c'est pareil, on va étudier la limite en $+\infty$ de $\frac{e^x}{x}$. Vous pourriez peut-être trouver le résultat *si vous vous rappeliez tout ce qu'on a dit un jour où vous m'avez posé un tas de questions sur les asymptotes obliques*. Vous m'avez demandé comment on fait… *vous vous rappelez ?…* pour trouver une asymptote oblique quand on la donnait pas. »
128. Un élève : « Y a une technique »
129. P : « *Voilà : petit a et petit b*. Je vous ai expliqué qu'on cherchait la limite de $\frac{f(x)}{x}$; ça donnait petit a quand il y avait une asymptote oblique. Et qu'à ce moment-là, on fait $f(x)-ax$: ça donnait la constante, ça donnait l'ordonnée à l'origine. *Vous vous rappelez ?* Quand il n'y a pas d'asymptote oblique, (j'ai effacé *la courbe, vous l'avez sur vos cahiers*), la fonction exponentielle quand x tend vers $+\infty$ elle monte, elle monte très vite. La fonction logarithme, elle, elle part horizontalement ; la fonction exponentielle, elle, elle part en montant. Alors le $\frac{e^x}{x}$ dans ce cas-là, va tendre vers quoi ? »
130. Un élève : « x »
131. P : « Ça donnerait… S'il y a une direction, elle monte *avec la direction de quoi ? »*
132. Un élève *: « D'une asymptote verticale »*
133. P *: « Oui. Elle monte avec une direction verticale.* La fonction log, elle montait avec une direction horizontale, d'où le $\frac{\ln x}{x}$ qui tend vers 0. La fonction exponentielle, elle monte avec une direction verticale. Alors, coefficient directeur d'une droite qui est verticale, qu'est-ce que c'est ? Ça n'existe pas, mais *si vous regardez la droite, si vous la faites tourner en la faisant monter, (vous la voyez, vous la voyez la droite ?).* Je prends mon repère ici et puis une droite, je la fais tourner en montant, son coefficient directeur qu'est-ce qu'il fait ? »
134. Des élèves : « il augmente »
135. P : « Il tend vers $+\infty$. *On va voir* que $\frac{e^x}{x}$, et bien, ça tend vers $+\infty$. C'est lié à cette direction verticale. Pour prouver que $\frac{e^x}{x}$ tend vers $+\infty$, on va faire une comparaison de fonctions*, comme tout à l'heure avec la comparaison de x*, *on va comparer e^x non pas à x mais à x^2*. Alors, vous allez travailler un peu tout seuls parce que vous devez savoir le faire et on vient de le faire pour e^x-x, alors *c'est pas beaucoup différent*. Alors, essayez de me faire la comparaison entre e^x et x^2. D'où étude du signe de la différence… »
136. Un élève : « Hou la la! »

La dernière remarque de cet élève semble indiquer, qu'au moins pour lui, la dévolution du problème est réussie. Elle signe l'identification d'un milieu dans lequel il se sent peu à l'aise, soit parce que les souvenirs qui le constituent évoquent pour lui des difficultés potentielles précédemment rencontrées, soit parce que la réorganisation des souvenirs que la constitution du milieu impose lui apparaît problématique, à travers leur ordonnancement tel que montré par P, ou à travers la suite de l'ordonnancement qui reste tout entière à sa charge.

On rejoint en ce point la conclusion d'Halbwachs sur l'association des idées et la localisation dans le chapitre IV des *Cadres sociaux de la mémoire*, relatif à la localisation des souvenirs :

> « Ce n'est plus la série chronologique des états passés qui reproduirait exactement les états anciens, mais ce sont ceux-là seuls d'entre eux qui correspondent à nos préoccupations actuelles, qui peuvent reparaître. La raison de leur réapparition n'est pas en eux, mais dans leur rapport à nos idées et perceptions d'aujourd'hui. Ce ne sont donc pas d'eux que nous partons, mais de ces rapports. » pp. 141-142.

À la lumière des exemples précédents, nous pouvons transposer ces lignes en les adaptant à l'étude du milieu, ce qui va permettre de comprendre le rôle de la mémoire ostensive. Ce n'est pas la série chronologique des objets enseignés, tels que disposés le long du fil du temps didactique, qui va reproduire exactement les objets tels qu'ils ont été enseignés, mais ce sont ceux-là seuls d'entre eux qui vont être pris pour (ou compris dans) la réalisation de nos pratiques actuelles, qui peuvent reparaître. La raison de leur réapparition n'est pas en eux, mais dans leur rapport à nos questionnements, recherches, activités de résolution de problèmes mathématiques d'aujourd'hui qui nécessitent la constitution d'un milieu, et qui sont liés à la volonté d'enseigner, d'apprendre ou d'étudier des objets nouveaux (enseigner ou apprendre un nouveau point du programme de mathématiques, ou résoudre ou étudier un problème qui nous a été donné).

Une situation d'étude peut se distinguer en situation autodidactique ou didactique, et le but de l'apprentissage en mathématiques est, dans les deux cas, essentiellement constitué de la capacité attestée à résoudre des problèmes.
Nous avons vu, en 2. 4., sur l'exemple des copies de l'évaluation externe, que l'engagement dans une activité individuelle de recherche de problème, en situation d'évaluation, suscite l'activation de divers niveaux, antérieurement travaillés, de la mémoire pratique de l'individu. Cette situation de résolution de problème lors d'une évaluation n'est pas très éloignée, du point de vue du milieu, d'une situation autodidactique. Dans le cas d'un apprentissage autodidactique, la personne qui a décidé de se lancer dans l'étude se donne, en principe, les moyens personnels de cette étude, par exemple par la constitution d'une bibliothèque de manuels, l'entraînement à la résolution de problèmes ou à la maîtrise de techniques, etc. Ce dispositif constitue un milieu, en partie matériel, que « l'étudiant » s'est construit afin que les rétroactions qu'il provoque, lorsqu'il est interrogé, permettent l'apprentissage. Dans une situation d'évaluation constituée de la recherche et la résolution de problèmes, les objets matériels de ce milieu peuvent être absents et « l'évalué » n'a plus alors d'autre recours que les souvenirs des pratiques du savoir qui lui paraissent connexes au problème à traiter, ce que nous avons appelé sa mémoire pratique. C'est cette mémoire pratique qui joue alors le rôle de milieu personnel pour la résolution du problème.

Dans la mesure où l'étude se mène de manière non autodidactique, mais généralement dans le cadre de systèmes didactiques scolaires, dans lesquels le style d'enseignement ne se réduit plus à un exposé magistral servi *ex cathedra* aux élèves, le savoir nouveau que le professeur introduit dans le système doit susciter, pour chaque élève, et afin de se construire, l'activité propre de l'élève[85]. Il est ainsi d'une part nécessaire que le professeur garantisse, pour la classe, l'existence d'un milieu institutionnel fait d'une sélection adéquate des savoirs et savoir-faire antérieurement enseignés, et à partir duquel va pouvoir se construire le nouveau savoir. Il est d'autre part nécessaire, afin d'assurer l'entrée possible des élèves dans « l'activité », que le professeur montre que les élèves disposent d'ores et déjà de ces connaissances, par une sorte de maïeutique dans laquelle sont conservées les réponses d'élèves qui rentrent dans la construction du milieu institutionnel et rejetées les autres, par exemple parce que le professeur ne les reprend pas. Les passages suivants du cours précédemment utilisé sont, de ce point de vue, assez éclairants :

- d'une part de l'existence de cette maïeutique :

129. P : « … la fonction exponentielle, elle, elle part en montant. Alors le $\frac{e^x}{x}$ dans ce cas-là, va tendre vers quoi ? »
130. Un élève : « x »
131. P : « Ça donnerait… S'il y a une direction, elle monte avec la direction de quoi ? »
132. Un élève *:* « D'une asymptote verticale »
133. P : « Oui. Elle monte avec une direction verticale. »

- d'autre part de ce que le milieu institutionnel, système antagoniste nécessaire pour l'engagement dans « l'activité » a été montré, que ceci est censé en garantir la dévolution, et que les élèves n'ont plus en conséquence qu'à le questionner judicieusement :

135. P : « … Pour prouver que $\frac{e^x}{x}$ tend vers $+\infty$, on va faire une comparaison de fonctions, comme tout à l'heure avec la comparaison de x, on va comparer e^x non pas à x mais à x^2. Alors, vous allez travailler un peu tout seuls parce que vous devez savoir le faire et on vient de le faire pour e^x-x, alors c'est pas beaucoup différent. Alors, essayez de me faire la comparaison entre e^x et x^2. D'où étude du signe de la différence… »
136. Un élève : « Hou la la! »

Dans le cas de ces élèves « en activité », le fait de donner une tâche de type problématique, quelle que soit sa « difficulté », signe une nouveauté et peut contribuer à l'avancée de la dialectique ancien – nouveau, cette dernière primant sur le style d'enseignement adopté[86]. En effet, tout ce qui est problématique peut être vu dans un premier temps, sous l'angle du contrat didactique, comme nouveau dans la mesure où il contient une dimension liée à la

[85] Les programmes officiels et leurs commentaires abondent de recommandations sur la nécessaire activité de l'élève pendant le cours de mathématiques. Citons simplement :
- en 5^e^ : « On privilégiera l'activité de l'élève, sans négliger les temps de synthèse qui rythment les acquisitions communes », phrase reprise *in extenso* dans le programme de 3^e^ (B.O. n° 10 hors série du 15/10/98)
- en 4^e^ pour la partie relative aux « travaux numériques » : « La résolution de problèmes […] constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme. Elle nourrit les activités, tant dans le domaine numérique que dans le domaine littéral. »
- en 2^de^ : « la résolution de problèmes et l'étude de situations occupent une part importante du temps de travail, allant bien au-delà de l'horaire de travaux dirigés en effectif réduit. […] La classe de mathématiques est un lieu de synthèse dégageant clairement quelques idées et méthodes essentielles… » (B. O. n° 20 du 17/05/90)
[86] On peut se référer sur ce point à Chevallard (1985) 6. 4. & 6. 5. p. 66, à propos du cours réduit au *discours* et à l'inverse à la volonté de privilégier *les problèmes* dans l'enseignement des mathématiques.

déconcertation cognitive[87], donc à la nécessité de bâtir un (nouveau) milieu pour cette tâche, celui-ci n'étant pas « livré » avec celle-là. En effet, ce ne sont pas des objets de savoir tels qu'ils ont été enseignés ou appris qu'il y a nécessité de partir, mais des rapports entre eux tels qu'il faut les établir pour l'engagement dans la pratique problématique nouvelle considérée.

2. 6. 4. 4. Rappels et oublis dans la dialectique milieu - mémoire

Pour construire le milieu institutionnel à un moment donné du temps didactique et à propos d'un objet mathématique à enseigner, l'enseignant peut utiliser le contrat d'ostension : il peut rappeler en mémoire, en les montrant par le langage (oral, écrit, gestuel), des objets enseignés antérieurement et qui doivent s'y trouver, ou les faire revivre en les réactualisant dans des pratiques telles que « les activités » par exemple[88].
Il peut aussi organiser un milieu, en en chassant des objets non pertinents pour la venue de l'objet nouveau. Dans ce cas encore, même si ce milieu permet de susciter l'émergence d'une situation a-didactique d'apprentissage, il crée un oubli, puisqu'il y a eu sélection pour cet apprentissage, dans le milieu qui a été dévolu.[89]
La mémoire entretient ainsi un rapport dialectique avec le milieu. C'est par exemple le rappel ostensif à la mémoire qui permet d'établir le milieu institutionnel, et c'est le milieu tel qu'il est construit à un instant donné qui détermine un contenu de mémoire (ostensive dans la mesure où elle peut se montrer dans les divers types de situations didactiques). Peuvent alors apparaître des phénomènes de rappel ou d'oubli, institutionnels ou personnels, pour les élèves chez qui la dévolution a réussi et qui se situent alors en « résolveurs de problèmes ». Une fois la dévolution du milieu établie, ce sont les couches de mémoire pratique qui vont servir de milieu, et à leur tour être travaillées de nouveau, en fonction des tâches pour lesquelles elles vont être engagées.

Par ailleurs, l'adhésion au contrat didactique produit, à un double titre, des phénomènes de rappel et d'oubli.

---

[87] Sur ce thème, on peut se reporter à Chevallard (1991b) « Sur la déconcertation cognitive » pp. 27-51 in *Interactions didactiques* n°12

[88] Un procédé peut alors consister à utiliser « l'ostension déguisée » telle que définie par Berthelot et Salin (1992) à propos de l'enseignement de la géométrie : « L'ostension "assumée" a été remplacée par l'ostension "déguisée". Au lieu de montrer à l'élève ce qui est à voir, le maître le dissimule derrière une fiction : celle que c'est l'élève lui-même qui le découvre sur les figures soumises à son observation. Comme ce savoir à découvrir est un savoir très élaboré, le maître est obligé de "manipuler" le milieu matériel pour rendre la lecture de ses propriétés la plus simple possible ; malgré cela ses interventions sont indispensables, mais au lieu d'être vécues par l'élève comme un apport d'informations dont il ne dispose pas, elles peuvent l'être comme le signe manifeste de son incapacité à voir et comprendre ce qui est si évident pour l'enseignant et une plus grande incitation à décoder les intentions didactiques du maître. » p. 175.

[89] On retrouve ici la dialectique « mémoire – organisation » mentionnée par de nombreux auteurs et reprise par Lemoigne (1977, 1990) dans sa *Théorie du système général* : « L'organisation se présente alors par une structure centrée sur un processeur de mémorisation, lequel garde les *traces* des programmes. […] Il y a *communication quand il y a organisation* et réciproquement. La remarque est triviale dès lors que nous avons convenu qu'*il n'existait pas de communication sans mémoire* et que *l'organisation se construisait autour d'une mémoire*. » pp. 170-172.

D'une part, l'adhésion au contrat d'ostension autorise l'oubli car le discours de l'enseignant et l'orientation qu'il donne à l'étude, produisent le renvoi dans le domaine privé des rapports personnels antérieurs conformes (ou non) au rapport officiel, sous peine pour l'élève de sortie du contrat, par non adhésion à ce qui est montré. Ainsi pour un élève, dans le contrat d'ostension, des rapports officiels antérieurs deviennent temporairement privés car publiquement tus, puisqu'ils n'ont plus de vie dans le milieu institutionnel donné à voir par l'enseignant pour l'étude d'un savoir nouveau à un moment donné.
D'autre part, l'adhésion au contrat relatif à la dialectique de l'ancien et du nouveau, polarise l'attention des élèves sur la venue de quelque chose qui est implicitement considéré comme nouveau, donc en taisant leurs rapports anciens, considérés comme vieux donc non pertinents pour le nouveau. Il y a alors officiellement oubli relativement au milieu institutionnel à ce moment du temps didactique pour lequel certains objets n'ont pas, comme dans le contrat d'ostension, leur place.

Sous cet angle, la mémoire apparaît, une fois de plus, comme le processus cognitif mis en œuvre pour la construction du milieu, ici le milieu institutionnel, et en retour la mémoire se (re)construit à partir des rapports aux « arrangements » inédits des objets pris pour la construction du milieu. On retrouve en ce point la thèse centrale d'Halbwachs pour qui la mémoire collective, ici la mémoire didactique, et ostensive, puisqu'elle se montre et se dit dans l'institution considérée, est une reconstruction continuelle du passé *en fonction des préoccupations actuelles,* ici d'étude.[90]

Quelques remarques peuvent alors être faites sur les mémoires pratiques et ostensives considérés jusqu'ici. Le milieu, on l'a vu, est convoqué dans la mise en œuvre des pratiques d'étude des mathématiques, telles par exemple que celles relatives à la résolution de problème ; et ceci aussi bien dans les dimensions publique que privée de l'accomplissement de ce travail d'étude, même si n'est visible ou reconnue comme telle par l'institution que la dimension publiée, exprimée soit par écrit, soit oralement. Or ce travail d'étude présente une double face dans l'enseignement : celle spécifique à la personne et faite du savoir-faire, des tâtonnements, des moyens personnels que chacun s'est donné, et celle que chaque personne va donner à voir, et qui par agrégation, évaluation, reformulation, … au niveau du groupe va donner la forme de l'activité sociale visible et telle qu'elle va être institutionnalisée, c'est-à-

[90] Cette idée de mémoire comme reconstruction a été vue par Bergson, notamment à partir des travaux menés sur la lecture par des psychologues allemands du XIX^{e} siècle, (Bergson, 5^{e} édition, p. 113), mais Bergson en tire une conclusion relative à la perception, et non aux besoins de l'activité de lecture : « Ainsi nous créons ou reconstruisons sans cesse. Notre perception distincte est véritablement comparable à un cercle fermé, où l'image-perception dirigée vers l'esprit et l'image-souvenir lancée dans l'espace courraient l'une derrière l'autre ». Un des points importants, qui nous semble distinguer l'approche d'Halbwachs de celle de Bergson à propos de cette reconstruction, réside en le fait qu'elle n'est pas déclenchée par la perception, mais par *le besoin*, besoin de se « mettre au point de vue du groupe » aurait pu dire Halbwachs, besoin nécessité par l'engagement dans l'activité du groupe pourrait-on dire ici. Ainsi Halbwachs (1925, 1994) note-t-il, dans le style faussement naïf qu'il affectionne lorsqu'il critique les thèses de Bergson : « Mais alors ce n'est plus le passé tout entier qui exerce sur nous une pression en vue de pénétrer dans notre conscience. Ce n'est plus la série chronologique des états passés qui reproduirait exactement les événements anciens, mais ce sont ceux-là seuls d'entre eux qui correspondent à nos préoccupations actuelles, qui peuvent reparaître. La raison de leur réapparition n'est pas en eux, mais dans leur rapport à nos idées et perceptions d'aujourd'hui : ce n'est donc pas d'eux que nous partons, mais de ces rapports. » pp. 141-142.

dire reconnue comme légitime, naturelle, produite collectivement par le groupe.

Il existe tout naturellement, dans les systèmes didactiques scolaires ou dans les systèmes auxiliaires, l'expression d'une mémoire personnelle englobant dimensions publique et privée, et correspondant à la mémoire pratique, d'où résulte le milieu qu'est capable de constituer pour lui-même un individu singulier engagé dans une activité d'étude donnée. Mais, dès que l'on entre, à propos d'un objet d'étude, dans une phase de « communication sociale », c'est-à-dire dès la phase dite de « formulation » dans la théorie des situations didactiques, ne peut s'exprimer dans un type de fonctionnement didactique désormais attendu, et désigné « d'actif » ou « par activités », au niveau du groupe, que la partie relative aux rapports établis aux objets de la pratique pour le groupe : objets et rapports institutionnels aux objets « stables », donc au milieu au sens de Chevallard, auxquels il faut ajouter les rapports officiels relatifs à l'objet qui est l'objet de l'étude et tels qu'ils sont en train d'émerger. Ce sont ces rapports qui vont constituer la « mémoire collective », ou mémoire officielle, ou mémoire didactique telle qu'elle va exister pour la classe, car ce sont à eux, et à eux seulement parce qu'ils sont publics, donc qu'ils sont supposés visibles et accessibles à tous, que l'on pourra ultérieurement se référer. C'est donc à eux que l'on pourra faire de nouveau appel pour constituer un nouveau milieu ; ne serait-ce qu'un milieu qui, par ses rétroactions, permettra la réalisation de la phase ultérieure, de validation par exemple, ou de celle de l'institutionnalisation. La description précédente de la mémoire ostensive se rapportait ainsi à la phase d'institutionnalisation d'un milieu pour la classe, celle-ci étant supposée réaliser plus facilement sa dévolution. Mais, pour autant, dès qu'il y a publicité par communication publique d'un milieu ou d'un fragment de milieu, dès que la mémoire du savoir se parle ou se montre, et ceci quelle que soit la position institutionnelle du sujet, c'est une mémoire ostensive qui s'exprime.

Les deux types de mémoire, pratique et ostensive, entretiennent, on l'a vu, des rapports dialectiques : la gestion par l'élève de cette dialectique définit sa mémoire personnelle, équilibre entre le milieu tel qu'il existe au niveau de la classe, le milieu institutionnel, et le milieu personnel. En effet, il n'est pas nécessaire que l'élève adhère totalement au milieu construit par l'enseignant pour la classe en utilisant la mémoire ostensive, si celui qu'il a construit pour lui-même est suffisant, en biaisant parfois avec l'institution, pour l'étude de l'objet mathématique considéré. Cette situation peut par exemple se produire dans le cas où il y a plusieurs démonstrations différentes pour le même problème, plusieurs combinaisons possibles des données de l'énoncé, plusieurs agencements possibles des différentes étapes d'une démarche de résolution,… c'est-à-dire chaque fois que la situation laisse « un certain jeu ». De ces situations différentes vont naître des histoires didactiques personnelles différenciées, puisque relatives à la constitution de milieux différents, débouchant sur des pratiques mathématiques sensiblement différentes et donc des mémoires didactiques personnelles différentes.

La description faite ici ne constitue en fait que l'étude sommaire du seul cas où le milieu construit par l'élève permet, *in fine*, de déboucher sur un rapport à l'objet d'étude conforme au rapport officiel. Il faudra d'autre part envisager le cas où le milieu construit ou reçu par l'élève ne permet pas de déboucher sur le rapport officiel attendu, actuellement ou dans un futur didactique. Ceci peut se produire d'une part parce que le rappel personnel à la mémoire ne permet pas la constitution du milieu nécessaire à la venue du rapport attendu : par exemple, il manque des objets dans le milieu, ou bien ils y sont tous mais leur organisation ne permet pas qu'il en résulte le rapport attendu. Ou d'autre part, parce que la dévolution du milieu institutionnel construit par l'enseignant pour les élèves ne fonctionne pas. Nous aurons l'occasion de revenir sur ces points en conclusion de cette thèse.

2. 7. Trois études menées sur la mémoire didactique

Trois études, menées en didactique des mathématiques, font explicitement référence à la mémoire. Elles ont mis en avant, principalement, et pour au moins deux d'entre elles, ce que nous avons nommé la mémoire ostensive, les deux autres termes de la modélisation proposée dans cette deuxième partie de la thèse se trouvant en retrait ; peut-être parce que leur préoccupation première concernait l'enseignement, dans le sens où quelqu'un enseigne quelque chose à quelqu'un d'autre, et non l'étude dans la globalité du terme. Il est impossible, dans les lignes qui suivent, de rendre compte de manière exhaustive de ces travaux, qui sont des thèses. Nous limiterons donc notre ambition à pointer dans ces thèses quelques traits de ce qui relève des mêmes préoccupations que celles décrites dans la construction du modèle théorique de la mémoire réalisée dans cette deuxième partie, et à examiner comment ce modèle peut en rendre compte.

2. 7. 1. Les situations de rappel

2. 7. 1. 1. La problématique des situations de rappel

La notion de « situation de rappel », introduite par M.-J. Perrin-Glorian dans sa thèse d'État (1992), est définie de la manière suivante :

> « … il ne s'agit pas de révision ni de rappel par le maître de ce qui a été fait, il s'agit plutôt pour les élèves de se rappeler une ou plusieurs situations déjà traitées dans des séances précédentes sur un thème, avec un peu de recul donc, de faire un retour sur ces séances, une anamnèse en quelque sorte, pour reprendre le terme que Y. Chevallard (1988) utilise pour les enseignants. […] Les élèves qui ne se sont pas construit de représentation mentale au cours de l'action trouvent là une nouvelle occasion et une raison de le faire puisqu'ils vont devoir parler de ce qui s'est passé et le décrire sans pouvoir agir à nouveau. […] Nous faisons l'hypothèse qu'au cours de ces phases, il se produit d'une part une *dépersonnalisation* des solutions dans la mesure où elles sont reprises et exposées par d'autres élèves que ceux qui les ont trouvées, d'autre part une *pré-décontextualisation* : en regardant à froid ce qui s'est passé, les élèves élaguent les détails pour identifier ce qui est important. » p. 395.

L'épisode ainsi décrit correspond à un geste d'enseignement bien particulier. Le maître décide du choix de qui va avoir la parole, ce qu'il peut faire selon deux modalités distinctes, explique M.-J. Perrin-Glorian p. 396 : en la donnant à ceux qui n'avaient pas trouvé, s'il veut « qu'ils reprennent à leur compte les méthodes utilisées », ou en la donnant aux « leaders » s'il veut « avancer dans la décontextualisation et la formulation ». Pour M.-J. Perrin-Glorian, ces « situations de rappel » sont à inscrire comme des moments de la réalisation d'un « processus dévolution – institutionnalisation » :

> « Les situations que nous avons appelées "de rappel" sont des moments clé dans le processus d'institutionnalisation locale, qu'elles vont permettre d'adapter aux conceptions actuelles des élèves, mais aussi avant le cours proprement dit qu'elles vont permettre d'accrocher aux problèmes qui ont permis de

> donner du sens aux notions qu'on va exposer. Elles jouent un rôle essentiel dans la constitution de ce que G. Brousseau appelle "la mémoire de la classe". » pp. 398-399.

Il s'agit bien d'une reconstruction dans laquelle « les élèves élaguent les détails pour identifier ce qui est important » dans des situations « déjà traitées dans des séances précédentes sur un même thème », donc d'un travail de mémoire dans lequel certains souvenirs sont volontairement oubliés. Ce travail débouche sur l'organisation d'un milieu officiel pour la classe, dans la mesure où les objets de savoir qui y sont présents sont ainsi « dépersonnalisés » et « pré-décontextualisés ». Sans doute, l'effet de rétroaction du milieu, de système antagoniste, pourra-t-il être utilisé à la demande par le maître pendant le cours, puisque « avant le cours proprement dit [qu'] elles vont permettre d'accrocher aux problèmes qui ont permis de donner du sens aux notions qu'on va exposer ». Cette rétroaction possible donnera peut-être l'occasion à certains élèves de retravailler, de manière indirecte, leur mémoire pratique à travers la re-présentation des situations d'action qu'ils ont précédemment rencontrées : « … ce travail que certains élèves étaient capables d'effectuer seuls pour eux-mêmes, s'ils en éprouvaient le besoin, manquait considérablement à d'autres élèves à qui on ne fournissait pas l'occasion de repenser par eux-mêmes les situations d'action qu'ils avaient rencontrées. » Ce travail est mené de manière ostensive par les élèves et le professeur, car il s'opère « en essayant de dire collectivement ce qui s'est passé ». Cette prise publique de parole est gérée par le maître qui dispose ainsi d'une variable de commande sur la constitution du milieu institutionnel dont il veut faire dévolution. En effet : « s'il veut que la fonction d'homogénéisation et de dépersonnalisation soit remplie, il va donner la parole aux élèves qui n'ont pas trouvé de solution […], s'il veut avancer dans la décontextualisation et la formulation, il va davantage donner la parole aux "leaders" […] ». Une autre variable de commande, pour la création ostensive du milieu, tient aux questions posées par le maître, les questions influant, bien entendu, sur les réponses attendues.

M.-J. Perrin-Glorian discute de la légitimité du qualificatif de « situation » à attribuer ou non à ces « situations de rappel », et de la place qu'elles peuvent tenir dans la modélisation, proposée par Brousseau, des différents types de situations. « Il nous semble qu'on pourrait y définir un jeu de l'élève et un jeu du maître non pas en référence à la résolution d'un problème mais en référence au sens et au statut des connaissances en jeu, et c'est dans cette mesure qu'on pourrait la désigner sous le nom de "situation" au sens de Brousseau. », indique-t-elle. Cette affirmation mérite qu'on y regarde de plus près. Comme l'on sait, la théorie des situations est modélisée par la théorie des jeux, mais Brousseau (1986a) prend soin de préciser les limites de cette modélisation. Ainsi, après avoir donné la définition d'un jeu à k personnes, il précise :

> « Cette définition n'est pas générale et l'on peut rencontrer des exemples de jeux qui réclament une modélisation différente, sensiblement plus complexe : par exemple, elle convient pour le jeu d'échecs ou les petits chevaux, pas pour les jeux de rôles. Elle suffit néanmoins pour définir quelques termes de didactique. » p. 330.

Or, il semble à la lecture des définitions qu'en donne M.-J. Perrin-Glorian, que ce soit une sorte de jeu de rôle qui soit joué par les élèves et le maître, lors des « situations de rappel ». Le dispositif exige en effet, pour chacun dans la classe, « de se replacer au point de vue du groupe

– classe » tel qu'il a pu exister à un instant de la situation rappelée ; ce qui implique qu'un individu n'occupe plus nécessairement le rôle qui était alors le sien dans la situation, comme nous l'avons indiqué dans la partie précédente, puisque l'avancée du temps a modifié l'institution, comme le notait déjà Halbwachs (1925, 1994) :

> « Les transformations d'un groupe ne résultent d'ailleurs pas seulement de ce qu'il se sépare de tels ou tels de ses membres : mais *le rôle et la situation des individus changent sans cesse dans une même société* (souligné par nous). Qu'un fait se produise, qui détermine un ébranlement notable dans l'état perceptif ou affectif de l'un d'eux. Tant que les conséquences matérielles ou les répercussions psychiques de ce fait se font sentir dans le groupe, celui-ci le retient, le met en bonne place dans l'ensemble de ses représentations. Du moment où l'événement considéré a en quelque sorte épuisé son effet social, le groupe s'en désintéresse, alors même que l'individu en ressent encore le contre-coup. » *Les cadres sociaux de la mémoire* p. 131.

C'est d'ailleurs ce que souligne M.-J. Perrin-Glorian : « Les élèves qui ne se sont pas construit de représentation mentale au cours de l'action trouvent là une nouvelle occasion et une raison de le faire puisqu'ils vont devoir parler de ce qui s'est passé et le décrire sans pouvoir agir à nouveau. » N'est-ce pas, pour eux, un changement du rôle qui était alors le leur, que de passer d'une position de « non-construction mentale » personnelle à celui de conteur « de ce qui s'est passé », sous–entendu pour le reste des membres du groupe, et dans lequel il a provoqué « un ébranlement notable » aux « conséquences matérielles » qui se font à ce point sentir que le groupe a ostensiblement décidé, par l'intermédiaire des questions de l'enseignant, de leur faire dire qu'il y est mis « en bonne place dans l'ensemble des représentations » du groupe ? Autrement dit, il s'agit bien d'un jeu de rôle, dans lequel des élèves se dépouillent de l'habit qui correspondait à leur rôle antérieur, pour endosser celui désormais exigé par la nouvelle institution dans laquelle ils se trouvent maintenant. Ce faisant, ils transforment leur personne d'élève, publiquement, de manière ostensive, puisqu'ils disent ce qui s'est passé, pour le groupe donc, et non pour eux-mêmes. Le travail personnel, dans les situations de rappel, consiste donc, pour l'élève désigné, à retravailler sa mémoire pratique afin d'en faire une mémoire ostensive qui puisse être évaluée par le groupe, en référence à ce qui y a été antérieurement (pré)institutionnalisé. Cette dimension de réadaptation va s'appliquer à tous, « constructeurs » ou non de « représentations mentales »[91].
Il s'agit d'analyser ces jeux de rôle, au cours desquels des élèves sortent du rôle qui leur est traditionnellement dévolu, pour en jouer un autre : par exemple celui où l'élève, qui est en principe en classe pour apprendre, va jouer un rôle où il enseigne, parfois seulement, non à la classe, mais à quelques élèves. Ces épisodes didactiques sont fugaces, ils dépendent souvent d'un contexte social contingent, difficilement reproductible et c'est pour ces raisons qu'ils nécessitent une certaine finesse de l'observation qui est par ailleurs aléatoire. Mais de tels épisodes permettent de créer un milieu, par l'intermédiaire de la situation rappelée, qui est un milieu évoqué ; parce qu'il est parlé, et qu'il a seulement pour réalité matérielle les règles sociales auxquelles il y a devoir de se plier, pour qui veut entrer dans le jeu et le continuer

[91] « Chaque fois que nous replaçons une de nos impressions dans le cadre de nos idées actuelles, le cadre transforme l'impression, mais l'impression, à son tour, modifie le cadre. C'est un moment nouveau, c'est un lieu nouveau, qui s'ajoute à notre temps, à notre espace, c'est un aspect nouveau de notre groupe, qui nous le fait voir sous un autre jour. D'où un travail de réadaptation perpétuel, qui nous oblige, à l'occasion de chaque événement, à revenir sur l'ensemble des notions élaborées à l'occasion d'événements antérieurs. » Halbwachs, op. cit., p. 135.

dans le groupe tel qu'il est devenu de par son histoire. Ce qui est donné à tous d'entendre, et qui constitue ce milieu, a aussi pour fonction de montrer les nouvelles règles du jeu, et corrélativement de définir les termes du nouveau contrat dans lequel il y a injonction implicite de se couler : le rappel mémoriel est aussi rappel ostensif des règles qu'on pourra éventuellement « brandir », face au récalcitrant qui ne les aurait pas encore comprises ou appliquées, et ce avec d'autant plus de poids que l'on pourra prendre le reste du groupe à témoin. Cela permet à certains élèves d'enseigner et à d'autres d'apprendre dans ce type de situations de rappel. Une nouvelle institution est ainsi temporairement construite, avec ses règles et les rôles attribués à ses sujets, avec sa manière de diriger les pensées et les souvenirs, comme nous l'avons vu dans cette deuxième partie ; dans le langage d'Halbwachs, les élèves, sous la direction du professeur, construisent ainsi un cadre social :

> « […] ce qui rattache les uns aux autres des souvenirs récents, ce n'est point qu'ils sont contigus dans le temps, c'est qu'ils font partie d'un ensemble de pensées communes à un groupe, au groupe des hommes avec lesquels nous sommes en rapport en ce moment, ou nous avons été en rapport le jour ou les jours précédents. Il suffit donc, pour que nous les évoquions, que nous nous placions au point de vue de ce groupe, que nous adoptions ses intérêts, et que nous suivions la pente de ses réflexions. » op. cit., p. 143.

Mais l'étude du rôle des élèves dans ces situations, et du jeu du maître avec celui-ci, n'est pas menée dans le travail de Perrin-Glorian, pas plus que dans d'autres travaux contemporains. À ce jour, il n'y a guère que Mercier (1998a) qui ait entrepris l'abord du problème à l'occasion de l'étude d'une leçon sur « les grands nombres » au cycle 3 de l'École primaire. Citons, afin de montrer le style d'une telle analyse et l'ampleur du travail méticuleux à mener, quelques moments de cette étude : « Jérôme est enseigné, il apprend de Christian et Fatia, avec le soutien de Michèle » (Michèle est le professeur), « À la demande de Michèle, Jérôme enseigne ; sans succès, faute de soutien épistémologique », « Quels élèves sont-ils autorisés à enseigner, comment et à qui ? », « Pourquoi est-on autorisé à enseigner ? », etc.

2. 7. 1. 2. L'ostension dans les situations de rappel

La réorganisation du passé que réalisent les situations de rappel produit la sélection des connaissances, savoirs ou savoir-faire pertinents pour la venue du savoir nouveau ou pour l'engagement dans un nouveau moment de l'étude d'une même organisation mathématique. Nous voyons là l'intervention d'un « principe d'économie de l'énergie cognitive », pour reprendre l'expression de M. Douglas. La dévolution du nouveau milieu dans le groupe, lors d'une situation de rappel, réalise une deuxième forme d'économie, potentielle, de réserve, pour le rappel éventuel de souvenirs connexes [92]. Les « situations de rappel » apparaissent ainsi comme des techniques didactiques permettant de construire, tout à la fois, une mémoire ostensive jouant le rôle de nouveau milieu institutionnel, éventuellement mobilisable, mais

[92] C'est ce que notait déjà Halbwachs (1925, 1994) :« Nous nous en tenons aux moyens qui nous permettent, partant du présent, d'y préparer la place qu'occupera le passé, d'orienter notre esprit d'une manière générale vers telle période de ce passé. Mais, ces moyens mis en œuvre, quand les souvenirs apparaissent, il ne sera peut-être plus nécessaire de les rattacher péniblement les uns aux autres, de les faire sortir les uns des autres, par un travail de l'esprit comparable à nos raisonnements. » p. 24.

non matériel car évoqué, fait de la réorganisation de souvenirs, et de réaliser son éventuelle dévolution à certains élèves, car l'ostension est assumée conjointement par l'enseignant et les élèves. Notons que cette ostension *conjointement* assumée se distingue de l'ostension assumée définie par Berthelot et Salin (1992) :

> « […] nous dirons qu'un enseignement spatio-géométrique relève d'une présentation ostensive assumée si :
> - le savoir officiel est présenté dès l'entrée dans la situation didactique,
> - il n'existe pas, au sein de la situation d'enseignement, de situation a-didactique d'apprentissage où l'élève peut se situer en "résolveur de problèmes" grâce à ses interactions avec un milieu de référence effectif » pp. 167-168.

Une des différences tient en ce que, dans la période historique des systèmes didactiques qu'ils décrivent, et qui va de 1887 à la fin des années 1970, l'ostension est assumée par les textes officiels et, corrélativement, par les enseignants et les manuels[93]. Le rôle de l'élève est alors défini de la manière suivante par Berthelot et Salin (1992) :

> « La présentation des savoirs par l'enseignant n'est pas suffisante pour assurer l'apprentissage de l'élève : ce dernier y prend sa part par l'observation active de ce que montre le maître ainsi que par la réalisation de tâches matérielles sous la conduite de l'enseignant. » p. 163.

L'ostension étant, dans les « situations de rappel », *conjointement* assumée par élèves et enseignant, il en résulte que le savoir officiel n'est pas présenté, mais présent dans un milieu co-construit : ce n'est pas le savoir qui est présenté, mais la situation vécue. Nous sommes alors en droit de poser la question suivante : existe-t-il une dimension adidactique d'apprentissage, pour certains élèves, dans la « situation de rappel » ? Sans doute, si le milieu devient effectivement un milieu dans lequel va agir l'élève. Ceci n'est pourtant pas garanti si la « situation de rappel » se limite à une action dont l'effet n'est pas explicitement assumé comme la production d'un objet mathématique, *l'évocation* d'une situation précédente (rappelons que dans la définition qu'en donne M-J Perrin-Glorian, il est explicitement indiqué que : [les élèves] « vont devoir parler de ce qui s'est passé et le décrire sans pouvoir agir à nouveau »).

Mercier dans sa thèse (1992) montre, entre autres, comment des dimensions adidactiques sont présentes dans les procédures classiques de l'enseignement traditionnel du second degré :

> « L'élève doit interpréter comme une injonction didactique portant sur O_n^q, l'ignorance institutionnelle qui correspond à l'évolution de $R_I(O_n^q)$[94]. Mais l'objet concerné n'est plus nécessairement un objet de savoir, son existence n'est pas nécessairement explicite, il peut même ne pas avoir de nom […] Le travail de l'élève est donc beaucoup plus important dans le processus d'évolution de ces types de rapports, et le partage de l'intention d'enseigner est ici essentiel. » p. 228.

C'est l'existence d'ignorance à propos de l'objet, qui signe pour Mercier (1992) une dimension adidactique de la situation didactique, et donc la nécessité d'apprendre à son propos :

---

[93] Cette étude est menée par Berthelot et Salin (1992) pp. 163 à 168.

[94] O_n^q et $R_I(O_n^q)$ peuvent être considérés comme représentant respectivement un objet de savoir mathématique et le rapport institutionnel à cet objet tel qu'il a évolué.

> « […] une manifestation non triviale de la rencontre de l'ignorance par un élève est un moment où se manifeste pour lui la *nécessité* d'apprendre et où il trouve la *possibilité* de le faire. C'est-à-dire : un moment où un élève connaît un savoir ancien et où, parce que ce savoir ancien outille des savoirs nouvellement introduits et va devoir s'adapter à de nouveaux emplois, la connaissance que cet élève avait de ce savoir n'est plus satisfaisante. C'est un épisode didactique. Mais aussi, une manifestation non triviale de la rencontre de l'ignorance par un élève est un moment où la situation didactique organise des conditions favorables au changement devenu nécessaire, la possibilité d'apprendre dépend en effet du type de situation didactique par laquelle l'élève rencontre l'ignorance et en particulier *des composantes adidactiques de la situation didactique.* » p. 82.

Dans les « situations de rappel », cette ignorance en cours de construction, face à laquelle un élève, ou plusieurs, peuvent se trouver confrontés, est censée être obtenue en montrant du doigt la transformation collective du rapport institutionnel à l'objet : chaque intervention publique d'un élève qui rappelle un souvenir, et qui est validée par l'enseignant, signe une nouvelle organisation inédite du rapport institutionnel à l'objet, ce qui, potentiellement, enjoint chacun de se relancer dans l'étude. Les « situations de rappel » ont certainement pour projet de contenir une dimension adidactique, et c'est sans doute ici la fonction, que nous avons déjà soulignée, assignée aux changements de rôle qui est contenue en puissance dans l'engagement effectif que l'on attend des élèves. Cependant, comme le soulignait Mercier (1992) « le travail de l'élève sera beaucoup plus important », car bien qu'on lui montre que le milieu a évolué, et comment il a évolué, c'est à lui d'identifier personnellement où se trouve son ignorance et son besoin d'étude, autrement dit où se trouve la dimension adidactique qui lui permettra de s'engager dans un nouveau travail de sa mémoire pratique.
Une des caractéristiques de cette institution des « situations de rappel », et sans doute aussi de son insuffisance, réside dans le fait qu'on n'y retravaille pas directement la mémoire pratique, mais que, par un travail collectif de la mémoire ostensive, on *donne seulement la possibilité d'une reprise*, assumée par l'élève, *de travail de la mémoire pratique*. Il s'agit donc d'une ostension déguisée, au sens que lui donnent Berthelot et Salin (1992), ou si l'on veut bien autoriser la transposition du terme, d'une mémoire ostensive à la reconstruction déguisée. Elle laisse par conséquent une assez grande marge d'incertitude au travail de la mémoire pratique, notamment parce que les élèves sont engagés *à parler* le rapport officiel et non *à pratiquer* leurs rapports personnels, ou encore parce qu'elle n'engage pas directement les élèves dans un milieu adidactique d'action ; c'est d'ailleurs pour cette raison que le terme de « situation » ne semble pas pertinent pour les désigner. Cette ostension laisse alors ouvert, dans une rencontre ultérieure à la charge de l'élève, le travail de sa mémoire pratique, afin de la rendre idoine à des objets qui ne seront plus considérés comme sensibles, c'est-à-dire objets d'enseignement ici et maintenant, mais seulement objets pertinents pour une future rencontre avec de nouveaux et autres objets sensibles[95]. C'est donc, encore, de façon différée par rapport au temps didactique, dans un aléatoire temps de l'apprentissage à venir, que peut se mener le travail de la mémoire pratique dans une « situation de rappel ». Le cas des « situations de

---

[95] Chevallard (1989) donne la définition suivante des objets pertinents : « Pour chaque objet institutionnel O, l'écologie institutionnelle fait apparaître certains objets institutionnels o comme *pertinents* par rapport à O relativement à la position p, c'est-à-dire qu'elle fait apparaître des objets tels que le rapport $R_{I,p}(O)$ présuppose certaines propriétés des rapports $R_{I,p}(o)$. Dans lacs où ces exigences sont satisfaites, on dira que le rapport $R_{I,p}(o)$ est *idoine* à $R_{I,p}(O)$. »

rappel » permet cependant de montrer, une fois de plus, le rôle central de l'existence ou non d'une institution qui aide à penser, à se souvenir, à réorganiser les souvenirs et qui va donc « formater » la mémoire de ses sujets.

2. 7. 2. Les gestes d'indication et l'emblématisation

G. Sensevy introduit dans sa thèse (1994), page 62, le terme de « geste d'indication », mais c'est dans un article de 1996, auquel nous nous réfèrerons, que nous en trouvons une définition plus précise :

> « Dans des classes où l'organisation du travail se caractérise par cette subtilité et cette complexité (Brousseau N. & Brousseau G, 1987) [il s'agit de la subtilité et de la complexité des organisations sociales], certains gestes magistraux gagnent en importance : ceux par lesquels l'enseignant évoque les situations, en général adidactiques, où les connaissances des élèves se sont construites, et par lesquels il leur permet, à travers cette évocation, la réactivation de ces connaissances. Dans ce qui suit, j'ai nommé de tels gestes des gestes d'indication. »

Le cœur de la thèse de G. Sensevy réside dans la fabrication et le fonctionnement d'un dispositif institutionnel, le *Journal des fractions*, permettant de faire dévolution aux élèves d'une partie des dimensions topogénétiques et chronogénétiques de l'enseignement ; en particulier la dévolution de gestes d'indication, afin que soit travaillée collectivement la mémoire didactique.
Un des moyens évoqués pour mener à bien ce travail consiste à « emblématiser » certaines productions d'élèves :

> « *Emblématiser* une production d'élève, cela consistera à institutionnaliser (à rendre visible par et pour l'institution) cette production comme emblème, c'est-à-dire à la constituer comme élément de la mémoire didactique de l'institution-classe.
> Assertion 3. La gestion collective de la mémoire et du temps didactiques repose sur un processus d'emblématisation. »

On retrouve dans ce travail, et de manière tout à fait explicite, la problématique des « situations de rappel » : « Ces gestes [d'indication] ne sont pas, en général, formellement identifiés : pourtant, ils pourraient l'être, et servir à organiser des situations spécifiques, dérivées des situations de rappel. » écrit G. Sensevy[96]. Il s'agit d'instrumenter les gestes d'indication qui ne sont pas toujours identifiés par les élèves, soit du fait de l'enseignant, soit parce que des élèves ne savent pas les percevoir, à l'aide d'un dispositif qui renforce leur

---

[96] Commentant l'étude faite par Halbwachs de la mémoire familiale, Namer (1994) est amené à distinguer deux types de langage pour l'expression de la mémoire collective familiale. Le second sert dans *une* famille seulement où il décrit un savoir caché ésotérique. Le premier est, quant à lui, social car il décrit *la* famille universelle : « Si la mémoire collective est toujours une signification partagée, c'est qu'elle se sert d'un langage social pour rendre compte de son universalité ; si la mémoire collective est un savoir caché ésotérique, c'est qu'elle se sert d'un langage pour le groupe seulement, pour rendre compte du sens partagé du secret de l'esprit de famille. » p. 349. On ne peut s'empêcher de dresser un parallèle entre cette description et celle du langage utilisé dans la classe, souvent « langage pour le groupe seulement », et pour lequel les degrés plus ou moins variables d'adhésion à « l'esprit de famille », selon la position occupée ou le moment du temps didactique vécu, conduisent peut-être à considérer « les gestes de ce langage » comme ésotériques.

aspect ostentatoire : l'emblématisation dont la fonction déclarée est, clairement, de « rendre visible ». Cette ostension est, comme dans les « situations de rappel », assumée conjointement par les élèves, à travers leur production dans le *Journal des fractions*, et par l'enseignant qui choisit certaines productions et les propose à la classe. Celle-ci les retravaille à son tour, les soumet au débat, etc. Il s'agit ainsi de construire une mémoire ostensive à propos des fractions, sous la double responsabilité de l'enseignant et des élèves ; le partage de cette responsabilité avec les élèves, ou pour reprendre les termes de Mercier (1992) « le partage de l'intention d'enseigner », constituant le moyen d'une meilleure dévolution de cette mémoire, celle-ci faisant alors office de milieu que l'on va interroger, de manière privée ou publique, pour apprendre.

Une différence majeure apparaît cependant par rapport aux « situations de rappel » décrites par M.-J. Perrin-Glorian. C'est, à la différence de ces dernières, la possibilité, fournie par le dispositif et donnée aux élèves, de *travailler conjointement* leurs mémoires *pratiques* et la publication revendiquée de ces mémoires pratiques (tout au moins d'une partie d'entre elles, tant il est vrai qu'il est difficile d'expliciter une pratique), donc leurs mémoires *ostensives* personnelles, ceci afin de faire ensuite émerger une mémoire ostensive officielle, pour la classe. En effet, la description donnée par Sensevy (1994) pp. 207-264 permet de dégager quelques spécificités intéressantes du dispositif *Journal des fractions*. Tout d'abord, à partir de questions assez générales, du type « Qu'est-ce qui vous a semblé le plus intéressant, ces derniers temps, dans le domaine des fractions ? Où en êtes-vous ? Qu'aimeriez-vous étudier sur les fractions ? », sont produites des réponses dites de « première génération ». Celles-ci permettent un travail personnel et ostensif, car il doit être présenté pour être donné à voir, de certaines couches de la mémoire pratique. Citons quelques exemples qui permettent d'illustrer cette double dimension :

> - « Aussi, quand on donne par exemple : 2/3+4/3 on garde le même dénominateur. Mais si on a : 2/3+7/6= ? ? Je *ne me souviens plus*[97] comment on fait ! Je crois que c'est : 2/3+7/6=4/6+7/6=11/6 Mais je n'en suis pas tout à fait sûre ! » Élodie pp. 224-225.
> - « *Avant*, j'avais posé cette question : 2-3/4= ? 3-4/5= ? 6-3/5= ? 9-8/5= ? Je *pense avoir trouvé* la solution :
>
> | | | | |
> |---|---|---|---|
> | 3/4=0,75 | 2-0,75=1,25 | 4/5=0,8 | 3-0,8=2,2 |
> | 3/5=0,6 | 6-0,6=5,4 | 8/5=1,6 | 9-1,6=7,4 » Audrey pp. 225-226. |
>
> - « Le *travail* le plus intéressant est celui où au tableau il y avait 29,7 sur 42, et il fallait trouver une approximation. Patrick avait trouvé 0,75. Voici un exemple du *procédé* :
> 29,7/42≈30/40=3/4=0,75 » Sarah p. 228. (*passages en italique soulignés par nous*)

Puis, le maître réalise un choix des productions de première génération, par l'intermédiaire de critères que Sensevy (1994) explicite. Ce choix permet, par le renvoi à la classe des questions retenues, de réaliser des productions d'élèves de deuxième génération. L'intervention du maître dans ce choix correspond ainsi à une organisation de la mémoire ostensive pour la

[97] Sensevy (1994) note, p. 225, que le souvenir évoqué par Élodie n'est pas relatif à un objet institutionnel présent pour le maître dans la classe (l'addition des fractions de dénominateurs différents n'a pas été enseignée). L'extrait du travail d'Élodie ne permet pas de connaître le lieu où elle a rencontré la question. Risquons l'interprétation suivante : c'est le travail personnel d'Élodie mené dans l'institution du « journal des fractions » qui lui a permis la rencontre et la résolution du problème qu'elle pose et dont elle garde le souvenir. Elle s'est enseignée à elle-même, et attribue à la classe, structure la plus en vue pour assurer cette fonction enseignante à laquelle, d'ailleurs, le « journal des fractions » est attaché, et par une conversion institutionnelle de cette pratique, ce qu'elle a elle-même étudié.

classe. Elle lui fournit un passé commun visible, et donc connaissable par tous, à travers la mise en commun de certaines productions des élèves, assumant ainsi la même fonction que celle où l'enseignant trie les réponses orales produites dans une classe selon la méthode courante qui consiste à « faire participer la classe », pour jeter les bases du devenir de l'étude. Par les nouvelles questions qui deviennent celles de tous, cette réorganisation réalise un nouveau milieu institutionnel pour la classe qui donne la possibilité, s'il est converti en situation adidactique d'action par des élèves[98], de retravailler leurs mémoires pratiques relatives à des types de tâches du thème des fractions. Ces productions de deuxième génération permettent ensuite l'organisation d'un débat ascendant qui conclut une période de travail.

Dans la classification que Brousseau (1996) donne des différents types de contrat didactiques, notamment dans la typologie des « contrats fortement didactiques portant sur un savoir “nouveau” », ce type de dispositif d'enseignement renvoie aux contrats constructivistes. Citons quelques traits de ce type de contrats tels que le définit Brousseau (1996), et qui s'appliquent au dispositif :

> « … les situations qui conduisent l'élève à l'apprentissage de connaissances ne sont plus des situations “naturelles”. Le professeur organise le milieu et lui délègue la responsabilité des acquisitions. […] Ce milieu peut d'ailleurs être effectif ou fictif, il est souvent l'un et l'autre suivant diverses conditions ergonomiques. […] L'élève est supposé rationnel ou au moins cohérent, (en particulier relativement fidèle) et économique. […] En fait, la cohérence n'est souvent que locale et l'élève s'accommode des contradictions par des assujettissements distincts à des situations différentes. »

Sensevy (1996) cite un exemple de cette accommodation, ou plutôt de cet accommodement, à des assujettissements distincts pour des situations différentes. Il s'agit du débat initié par Amandine, qui a écrit dans son propre journal : « la fraction 4/3 montre quelque chose d'impossible, que sur 3 parties, il y en a 4 d'hachurées ». Dans le débat, Ronan écrit : « D'une certaine façon, Amandine a raison si la fraction se rapporte à un stock de marchandises, ou l'argent de l'État, ou encore des oiseaux dans une volière… ». Audrey, quant à elle : « Peut-être que c'est vrai. En tout cas ça marche avec le problème de Patrick. ». Ronan encore : « Je pense que la fraction est possible dans certaines conditions. Si l'on veut utiliser 4/3 dans un problème, une équation, il faut que la situation de ce problème aille avec la fraction 4/3. » Quant à l'opinion d'Amandine, après débat, elle devient : « Tout au contraire. Sur une surface réelle, la fraction peut être impossible et possible… ».
Brousseau (1996) précise, à propos de ces contrats, que l'enseignant se manifeste par « des stratégies de régulation qui échappent pour l'instant à nos moyens d'investigation. » Nous avons ici un exemple où ce choix est explicité : « La préoccupation de cette élève semblait minoritaire dans la classe [il s'agit d'Amandine et de la fraction 4/3]. Cependant, j'avais choisi de faire figurer cette question… à cause de la difficulté du problème des fractions supérieures à 1, que la fraction/partage classiquement enseignée ne permet pas de traiter. »
À travers cette information, arrive, de façon tout à fait explicite, la personne de l'enseignant en tant qu'organisateur du milieu pour la classe. Plus particulièrement, c'est la fonction de sa

[98] Sensevy (1994) mentionne : « Il y a ainsi conversion d'un problème posé par un pair en problème que l'on cherche à se poser soi-même, qui finit par devenir technique que l'on s'efforce de maîtriser. » p. 254.

mémoire des faits, et des effets des choix didactiques possibles, qui est donnée à voir, en lui servant ici à prendre une décision provisoire de dérégulation du système en introduisant certains objets dans le milieu institutionnel qui va être dévolu, et en vue d'une régulation didactique à venir.

Le *Journal des fractions* apparaît comme une nette amélioration des « situations de rappel ». Alors que ces dernières ne permettaient qu'une co-construction de la mémoire ostensive, renvoyant dans l'univers des possibles l'éventualité d'une reprise, assumée alors par l'élève seul, du travail de la mémoire pratique, le dispositif du journal des fractions enclenche une dialectique du travail de la mémoire ostensive et de la mémoire pratique. Cette dialectique engage, et à la fois soulage, ce travail des couches de mémoire pratique.

Il l'engage car les questions de première génération telles que « Où en es-tu ? Qu'aimerais-tu ? Quelle question te poses-tu ? », qui sont donc formulées à l'aide de non-ostensifs, de concepts comme « en être », « aimer », « se poser des questions », tout cela sur *les* fractions, appellent des réponses d'ordre mathématique qui, dans de nombreux cas comme on l'a vu, s'expriment sous forme de mise en œuvre de techniques réglées par des manipulations d'ostensifs. Les réponses écrites des élèves constituent alors, comme nous l'avons montré en 2. 4. 4., des occasions d'objectiver les derniers niveaux de leurs mémoires pratiques. Les productions de deuxième génération jouent elles aussi ce rôle, mais avec un aspect d'explicitation en vue de répondre aux questions sélectionnées qui, dans un double mouvement, objective cette mémoire pratique, certes, parce qu'il faut la communiquer, mais aussi ce faisant, l'objective pour soi : c'est une occasion donnée de se re-présenter sa pratique, de la « repasser ».

Ce travail est soulagé par un double dispositif inclus dans le *Journal des fractions*. En effet, la sélection menée par le maître, parce qu'il « sait avant » (les élèves) quelles sont les questions susceptibles de faire avancer et d'enrichir l'étude des élèves, oriente la direction du travail de mémoire. Ainsi la construction d'épisodes de la biographie didactique des élèves, est organisée par la multiplication des occasions de retravailler sa mémoire pratique. La mise à disposition des élèves d'emblèmes et de gestes d'indication contribue fortement à soulager ce travail de la mémoire pratique, elle constitue d'utiles raccourcis pour l'évocation des situations, et la mobilisation des connaissances adéquates. Ainsi, la constitution d'emblèmes tels que « la fraction-triangle », « la méthode de Patrick », « le problème de Grégory », etc., réalise la mise à disposition des élèves d'efficaces outils qui permettent d'engager un travail de mémoire, dont l'entrée est supportée par l'institution, et non par la personne. À ce jour, le *Journal des fractions* reste, à notre connaissance, la seule mise en œuvre revendiquée et analysée d'un dispositif pensé pour lier mémoire et apprentissage, pour soulager la mémoire afin de provoquer des apprentissages, et où les apprentissages vont venir réorganiser la mémoire. Sans doute, les organisations de situations a-didactiques réalisées par G. Brousseau dans des séquences d'enseignement longues (par exemple dans le travail sur les décimaux), réalisent-elles le travail de mémoire. Ce sont cependant des dispositifs lourds, qu'il est impossible dans le cadre d'un enseignement ordinaire. Le *Journal des fractions* en revanche, qui est essentiellement mené à travers la mise en place d'un dispositif de classe enclenchant un processus dialectique entre la mémoire pratique et la mémoire ostensive, répond au problème soulevé par Mercier (1998a), en donnant les conditions du travail de l'idonéité du rapport des élèves aux objets institutionnels pertinents.

2. 7. 3. La mémoire didactique de l'enseignant

2. 7. 3. 1. La problématique du travail de J. Centeno

C'est sur le thème de la mémoire didactique de l'enseignant que se situe la plus grande contribution, versée par J. Centeno, à l'étude des phénomènes de mémoire en didactique des mathématiques. Les deux cas précédemment rencontrés se préoccupaient de l'étude de dispositifs, observés fortuitement par le chercheur lors de l'observation de séances en classe pour les « situations de rappel », ou pensés et analysés avant d'être mis en œuvre puis de nouveau analysés dans le cas du *Journal des fractions*. Il s'agit maintenant, dans ce dernier cas, d'étudier en quoi l'enseignant est dépositaire de la mémoire du système, et comment certains gestes mobilisant ou non la mémoire, et qu'il est amené à faire en classe, provoquent ou non des phénomènes d'apprentissage.

Dans sa communication à la VI^{e} École d'été de didactique des mathématiques, J. Centeno (1991) définissait l'objet de son étude sur la mémoire par rapport aux divers types de mémoire pouvant être rencontrés dans le cadre d'une relation didactique. En ce qui concerne l'élève, elle identifiait :

> « *Une mémoire privée*, mémoire du sujet psychologique, qui va lui permettre de reconnaître les choses. […] Cette mémoire est soumise à des lois étudiées par les psychologues. […] Cette mémoire n'est pas notre objet d'étude. Bien que le résultat attendu de toute situation d'apprentissage sera une modification de cette mémoire, et, qu'en même temps elle n'est pas sans connexion avec les autres mémoires de l'élève.
> […]
> *Une mémoire officielle* [qui] est celle qui va lui permettre de se servir des connaissances et des savoirs *exigés* dans la classe. […] Ce serait une mémoire de ce qui est institutionnalisé. Ce n'est pas non plus proprement notre objet d'étude.
> *Une mémoire provisoire* (mémoire du travail) spécifique de la classe et commune au maître et aux élèves. […] Cette mémoire enregistre des faits qui vont servir à l'aménagement didactique *mais qui ne sont pas identifiables à la mémoire officielle*. Cette mémoire est une partie de notre objet d'étude. »

Elle définissait aussi deux autres types de mémoire : celle du maître et celle du système.

> « De même, pour le maître, on pourrait parler de sa mémoire privée, de sa mémoire culturelle, professionnelle, etc. et de sa mémoire *provisoire*. Celle-ci est une partie de notre objet d'étude.
> Il faudrait tenir compte aussi d'une *mémoire du savoir*. […]
> *La mémoire du système didactique* ne coïncide avec aucune de ces mémoires. … cette mémoire est celle dont le système se sert pour organiser la mémoire officielle de l'élève. En particulier la mémoire du maître est une partie de la mémoire du système didactique. »

Au travers cette classification et en excluant, nous aussi, de notre champ d'étude la mémoire du sujet psychologique, nous retrouvons les trois types de mémoire retenus jusqu'ici : mémoire pratique, mémoire du savoir et mémoire ostensive.

La mémoire pratique de l'élève, (mais ce terme s'applique, de manière plus large, à toute personne engagée dans une activité relevant des mathématiques, donc aussi au maître) est, dans cette description, discriminée en deux parties clivées par la phase d'institutionnalisation : une mémoire *officielle*, mémoire de ce qui est institutionnalisé, et donc partie de la mémoire pratique institutionnellement attendue, et une mémoire *provisoire* ou *de travail*, partie de la mémoire pratique avec laquelle les élèves travaillent avant la phase d'institutionnalisation. On peut concevoir, que ces deux mémoires contiennent des éléments de mémoire ostensive, dans la mesure où la mémoire pratique, puisqu'il s'agit d'un système d'apprentissage scolaire, donc de groupe, peut, bien entendu, se montrer, se dire, se voir ; ne serait-ce que dans l'écriture, la parole ou la gestuelle publiques qui accompagnent la pratique privée donnée à voir. Par exemple, en reprenant le clivage « avant/après institutionnalisation » mentionné par J. Centeno, les moyens de la pratique sont « donnés à voir », ou plutôt sont susceptibles d'être rencontrés, dans le contexte de la situation, par des phases d'action, de formulation et de validation, avant l'institutionnalisation et, en tout cas, sur un support matériel ayant une certaine « officialité » (cahier, livre, tableau, etc.) après celle-ci.
La mémoire du savoir recoupe la définition que nous en avons donnée.

La mémoire du système didactique est définie comme étant « celle dont le système se sert pour organiser la mémoire officielle de l'élève ». C'est donc la partie relevant de la mémoire qui permet l'existence du milieu, ce milieu étant une condition nécessaire d'un apprentissage possible pour l'élève. La mémoire de l'enseignant apparaît comme ayant une intersection non vide avec cette mémoire du système, et comme organisatrice d'une partie du milieu, dans la mesure où elle est caractérisée comme étant « ce qui le conduit à modifier ses décisions en fonction de son passé scolaire commun avec les élèves, sans pour autant changer son système de décision. […] Il faut qu'il puisse *mobiliser*, *utiliser* ou *évoquer avec eux* des faits de classe qui ne sont pas des objets d'enseignement mais qui importent pour l'apprentissage. » Cette dernière partie, fonctionnelle, de la définition de la mémoire de l'enseignant, indique que c'est bien dans le cadre de la mémoire ostensive, celle qui montre et se montre, dit et se dit, évoque et s'évoque publiquement, et qui permet ainsi en retour l'organisation du milieu en vue de sa dévolution, que cette « mémoire didactique de l'enseignant » est à replacer[99]. La mémoire de l'enseignant apparaît ainsi comme un système de régulation de cette mémoire ostensive indispensable pour la constitution du milieu évoqué, et qui est peut-être nécessaire pour l'engagement de l'élève dans des phases d'action dans un milieu effectif. C'est d'ailleurs en mentionnant cette fonction régulatrice que J. Centeno, dans sa thèse (1995), donne la définition d'un système à mémoire :

> « Nous dirons qu'un système possède une mémoire lorsqu'il a des dispositifs lui permettant de réguler l'intervention du passé dans le présent. » p. 154.

[99] J.-L. Lemoigne (1977, 1990) établit un lien entre mémoire, organisation et communication : « La modélisation d'une mémoire implique la différenciation d'un flux d'informations spécifiques dans le système, informations qui porteront en particulier les bandes représentant les programmes. L'identification de l'organisation d'un système entraîne ainsi celle d'une *communication* d'informations : d'un réseau de communication. » p. 172. La mémoire ostensive conjugue simultanément, par sa nature, la communication, et par sa fonction, l'organisation du milieu.

La mémoire de l'enseignant est ainsi un de ces dispositifs de régulation du passé. L'apprentissage de l'élève est alors caractérisé, suivant en cela l'inspiration fondatrice s'appuyant sur la théorie des jeux, comme l'acquisition de la possibilité de faire des choix plus ou moins adaptés dans un ensemble de chemins offerts par le milieu qui lui est dévolu :

> « L'**apprentissage de l'élève** se traduit par le fait qu'il est rendu capable de faire certains choix parmi les voies possibles offertes par le système enseignant à travers une situation d'enseignement qu'il lui propose. Ces voies sont celles que le système a décidées à l'avance. Et donc la liberté du sujet-élève est chaque fois dans le choix des chemins qui lui sont présentés. Elle est pourtant entièrement contenue dans le système enseignant. Chaque fois que le système enseignant (le maître) lui donne l'occasion de répondre l'élève a un choix possible : s'il a appris il choisira un chemin adapté à la situation, s'il n'a pas appris il en choisira un moins adapté. » pp. 158-159.

2. 7. 3. 2. Les effets

Il est impossible de dresser ici une recension exhaustive des phénomènes, des limites et des pathologies, liés à cette mémoire didactique de l'enseignant, ainsi que de ses effets sur les systèmes didactiques, sur l'apprentissage, etc. tels que les a étudiés J. Centeno. De ce point de vue, l'apport que constitue son travail à l'étude de la mémoire didactique est un préalable incontournable, tant par les bases qu'il jette en extension de la théorie des situations[100], que par la richesse des observations et des analyses qu'il contient. Citons simplement quelques points.
J. Centeno (1995) montre d'abord que la conversion des expériences de l'élève en régularités, signes de l'apprentissage, nécessite des prises de décision de l'élève qui s'appuient sur une mémoire plus large que celle du savoir, par exemple une mémoire du contexte (pages 193-194). Or la charge de cet appel à la mémoire peut être soulagée, pour l'élève, par l'intervention de l'enseignant[101]. Celle-ci prend, nous semble-t-il, la forme d'une mémoire ostensive dont les modalités d'expression sont répertoriées par J. Centeno : la répétition, la mise en perspective de ce qui a déjà été fait, le rappel « d'accidents », la « mise en histoire » du savoir à travers des personnes, etc. *A contrario*, J. Centeno étudie dans sa thèse, les effets d'une absence de mémoire de l'enseignant. Pour cela, elle met en place, à l'école J. Michelet de Talence, un dispositif à travers lequel des maîtres différents se succèdent dans l'enseignement d'un thème, mais sans avoir la connaissance de ce qui a été enseigné auparavant : ce dispositif prive donc le maître de la possibilité de recourir, pour enseigner, à l'utilisation d'une mémoire ostensive. Dans sa communication à la VI^e^ école d'été de didactique, elle en conclut :

> « La mémoire du maître est incontournable dans la mesure où un enseignement tente de s'appuyer sur l'activité de l'élève […] »

---

[100] Par exemple, la modélisation par la théorie des jeux est, à cette occasion, dépassée par Brousseau & Centeno (1991) : « […] il ne pouvait y avoir enseignement sans que se produisent des ruptures de contrat didactique, c'est-à-dire des changements dans les règles du système. Il est donc illusoire de vouloir représenter l'action de l'enseignant par un jeu où il aurait pour antagoniste la situation a-didactique de l'élève sur laquelle il interviendrait selon les règles d'un automate fini. Il serait donc nécessaire de modéliser la relation didactique par un automate plus complexe. »
[101] C'est, comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, ce qu'a montré et réalisé Sensevy (1994).

En effet, dans ce type d'enseignement s'appuyant sur l'activité de l'élève, celui-ci apprend en se rendant à des raisons, spécifiques du savoir et de sa place dans la nouvelle organisation par rapport à l'ancienne, et non à des causes qui réfèrent à une pratique sociale qui lui est imposée du dehors et qu'il doit imiter. Ce type d'enseignement, bâti sur l'activité de l'élève et les raisons d'apprendre, peut alors prendre deux formes afin que l'élève apprenne effectivement : la première est didactique, la seconde a-didactique. Les deux requièrent l'utilisation de la mémoire ostensive : la première parce que « l'enseignant explicite lui-même ses intentions, dit ce qu'il veut enseigner », la seconde parce qu'alors l'engagement de l'élève dans la situation a-didactique dévolue nécessite que « tout est à la charge de l'élève à ce moment-là », qu'« en général, il ne le peut et le professeur doit l'aider en reprenant la situation d'apprentissage et en la rationalisant, en montrant l'enjeu des savoirs anciens et l'intérêt du savoir nouveau », c'est-à-dire en faisant un rappel sélectif de certaines connaissances ou savoir, qu'il réorganise à travers l'ostension.
Centeno (1995) montre aussi certains effets de l'utilisation de la mémoire ostensive par l'enseignant. Certains d'entre eux aboutissent à des phénomènes qui peuvent être vus, pour certains élèves, comme une « fabrication d'un "faux passé" » dans la mesure où il y a « standardisation du passé », et où ils n'ont pas vécu en personne les faits évoqués. Cependant, cette reconstruction, opérée par la mémoire ostensive, peut aussi fournir pour les élèves des occasions de réorganisations « après-coup » qui permettent l'apprentissage.

En suivant la modélisation que nous avons proposée, on peut voir aussi la mémoire de l'enseignant comme relevant de la mémoire pratique : c'est d'une part la mémoire de sa pratique d'enseignant, mémoire consciente s'exprimant à travers les souvenirs qu'il a gardés des situations didactiques dont il a été partie prenante, et aussi, d'autre part, mémoire pratique dans le sens où elle se rapporte aux gestes, plus ou moins conscients, de cette pratique, à ses habitus professionnels.
Il pourrait sembler résulter, de l'analyse issue de l'entrée par l'enseignant, qu'a choisie Centeno, dans la problématique de la mémoire, une sorte de brouillage du modèle que nous proposions, qui pourrait alors apparaître comme non-consistant, deux de ses termes posant problème : mémoire pratique et mémoire ostensive. Ce serait alors oublier que ce modèle est arrimé à une analyse institutionnelle : il n'a de sens qu'en référence à l'institution sur laquelle il porte. Or ce sont, pour la mémoire de l'enseignant, au moins deux institutions qui sont présentes dans l'analyse, et qui sont d'ailleurs constamment mentionnées en théorie des situations. Il s'agit en premier lieu, et c'est peut-être la raison pour laquelle cela apparaît d'une manière tellement visible qu'on en oublie les autres, de la classe, dans laquelle l'enseignant accomplit les gestes de sa pratique dans la position qui est la sienne. Il s'agit en second lieu, et parmi celles qui sont évoquées par Brousseau (1996), à travers « un schéma des différents assujettissements "externes" de l'enseignant », d'institutions plus lointaines qui pointent déjà dans la modélisation du milieu en niveaux emboîtés que donne Brousseau (1990), par exemple dans le niveau du « professeur préparant son cours ». Elles sont tout à fait explicites dans le modèle que donne Margolinas (1995), et auquel renvoie Brousseau (1996), dans les niveaux « sur-didactiques » S+1, S+2 et S+3 pour lesquels le professeur P occupe des places qui sont

respectivement identifiées par la fonction qu'il remplit : P-projeteur, P-constructeur et P-noosphérien. Lorsqu'on sait que dans cette dernière modélisation, le milieu d'un niveau est la situation du niveau précédent, elle-même constituée d'un milieu, de positions d'élèves et de professeur, on comprend que le changement d'institution qui correspond au changement de niveau, et l'emboîtement des institutions, n'apparaissent plus comme l'objet même de l'étude. Il en résulte que la mémoire pratique du professeur, dans le sens de sa pratique didactique, est mobilisée dans d'autres institutions que la classe, qu'elle s'y exprime selon des modalités et des dimensions différentes qui restent à analyser, si l'on suit Margolinas (1995), lorsqu'il est dans les positions où il bâtit des milieux de construction, de projet ou des milieux didactiques. Passant d'une institution à une autre, notamment des niveaux « sur-didactiques » au niveau didactique de l'institution dans laquelle le professeur pense son action sur le système didactique au système didactique lui-même dans lequel il agit, cette mémoire pratique est soumise à des processus de *conversion didactique*[102] qui restent à décrire. Cette conversion est pointée par Centeno (1995), mais seulement du point de vue de l'élève :

> « La relation didactique peut se concevoir comme un “convertisseur de mémoire” qui transforme de l'historicité de l'élève en formes de savoir. C'est dire que le vécu de l'élève est fait d'une évolution de son rapport personnel aux objets de savoir enseigné et que la relation didactique (par l'effet du contrat) tend à provoquer et faciliter cette évolution. » p. 203.

Le travail de Centeno est antérieur à la modélisation proposée par Margolinas (1995), aussi ne peut-il ni suivre, bien sûr, la théorisation ultérieure proposée, ni même se placer dans l'horizon de ces institutions extérieures auxquelles le professeur est assujetti, pour étudier sa mémoire : il s'agit essentiellement d'une étude du « système enseignant » en situation, dans la classe, et de ses caractéristiques, « avec ou sans mémoire », ou des décisions qui relèvent de sa mémoire et qu'il est amené à prendre en fonction du comportement didactique des élèves. L'étude de la conversion de la mémoire pratique du professeur à sa pratique en classe, selon ses assujettissements externes, reste à faire, même si le problème est repéré par Centeno (1995) :

> « Dans la réalité, nous trouvons des bouts de systèmes, puisque les moyens de gestion du maître ne sont pas systématisés. Il n'a pas de système général, le maître se sert parfois des indices, mais son action n'est pas forcément régulière. En effet, les mêmes observations provoquent des réactions complètement différentes selon son humeur. Il n'est pas toujours conscient des décisions didactiques qu'il prend à la suite d'une action d'élève. Nous pouvons dire que la part du savoir du maître dans ce type de gestion est faible. » p. 186.

Nous butons là sur le problème souvent repris, notamment lors des VI^e^ et VIII^e^ École d'été de didactique des mathématiques, de la modélisation de l'enseignant. Une entrée possible du point de vue de la mémoire de l'enseignant réside sans doute dans l'utilisation de la

[102] Il s'agit bien de *conversion* et non de *transposition*, dans la mesure où elle est soumise à des contraintes à la fois externes et internes au sujet, ici le professeur, et non à des contraintes externes s'appliquant à un objet, par exemple le savoir. Il nous semble, par cette remarque, rester fidèle au sens originel que donne au mot Chevallard (1996), dans sa lettre du 1^er^ juin 1989, où sa réfutation du terme de *complémentarité* l'amène à en préciser le sens : « La notion de conversion que j'emploie généralise, *de ce point de vue*, le concept freudien, en ce que le siège des contraintes considérées peut maintenant être quelconque, et trouver sa “matérialité” dans une organisation *inter*subjective à différents niveaux de complexité – même si, dans la chaîne des conversions, on aboutira bien, en fin de parcours, à une inscription (ou à un certain type d'inscription) *en un certain sujet*. » p. 62.

modélisation présentée dans notre travail pour l'analyse des institutions externes à la classe et auxquelles il est assujetti, et de son articulation à l'étude des phénomènes de conversion liés à sa personne, pour saisir *in fine* le fonctionnement didactique de cette dimension mémorielle attachée à la position enseignante, à l'intérieur de la classe. C'est donc un vaste chantier qui est ouvert, et pour lequel tout, ou presque, reste à faire ; l'observation ou l'analyse de ces phénomènes de conversion n'ayant, à notre connaissance, pas été menées pour le professeur du point de vue de la didactique.

TROISIÈME PARTIE

DES INSTITUTIONS POUR OBSERVER ; UN PREMIER RÉSULTAT SUR L'ORGANISATION DE LA MÉMOIRE PRATIQUE

Présentation de la troisième partie

Après avoir construit, en recourant à la fois à des données empiriques et à des éléments théoriques, un cadre théorique pour la mémoire en didactique des mathématiques, il est nécessaire de s'interroger sur la validité de cette manière de faire. En fait, cette dialectique de l'empirique et du théorique, qui se résout dans la production de nouveaux éléments théoriques venant justifier les phénomènes empiriques dont ils rendent compte, se retrouve aussi bien dans les sciences sociales, sciences historiques de l'interprétation selon la définition qu'en donne Passeron (1991), que dans les sciences dites « dures » comme les mathématiques.
Cependant, consistance et complétude semblent pouvoir être plus facilement atteintes par ces dernières car elles échappent, pour partie, à l'historicité de l'objet auquel elles s'appliquent. Nous sommes donc conduits à discuter du problème de l'historicité, et secondairement de la reproductibilité, relativement à la possibilité de rendre compte, de manière complète et non-contradictoire, des phénomènes mémoriels qui se rapportent à l'étude des mathématiques. Pour cela, nous faisons de nouveau appel à des éléments théoriques explicitement cités qui, outre le rôle justificatif qu'ils remplissent malgré l'alourdissement du style qu'ils induisent, assurent aussi la fonction… d'ostensifs, c'est-à-dire d'outils qui se donnent à voir pour l'accomplissement du travail du premier chapitre de cette troisième partie.

La discussion méthodologico-théorique qui a été menée, conjuguée à l'analyse d'une observation ancienne portant sur un phénomène identifié en première approche comme étant d'ordre mémoriel, permet de dégager ensuite une voie pour l'observation. Elle est trouvée dans la constitution « d'institutions pour l'observation » qui réalisent un décalage, à la fois temporel et portant sur les pratiques, par rapport à l'institution didactique observée. Ce décalage rend tout à la fois possibles la création et l'observation de phénomènes mémoriels chez les élèves, interprétés comme conséquences de leur assujettissement à des institutions didactiques en certains moments de leur temps propre.

Appliquant cette méthodologie du recueil d'observations empiriques, nous rendons compte, pour conclure cette partie, d'une observation menée sur deux élèves. Elle porte sur un phénomène d'oubli imputable à leur mémoire pratique relative à la résolution d'un certain type d'équations logarithmiques. Le modèle construit dans la deuxième partie, et qui s'appuie notamment sur le rôle fondamental des ostensifs pour le travail des mathématiques, montre leur rôle tout aussi déterminant dans l'organisation de la mémoire et les phénomènes didactiques qui en découlent ; ceux-ci étant souvent désignés sous les termes d'oubli et d'anticipation dans le quotidien de la pratique enseignante.

3. 1. Éléments théoriques à fonction méthodologique

3. 1. 1. La dialectique théorique - empirique

Aussi loin que l'on puisse remonter dans l'étude moderne des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, il nous semble pouvoir discerner, à la base de toute tentative pour entraîner l'adhésion à la justesse des thèses avancées, une dialectique du recueil de données (observées, expérimentées) et de la théorisation. Cet appel à des données empiriques, attestant d'une rencontre avec le réel (ou tout au moins avec une partie de ce réel), et tirées de l'expérience du monde physique ou du monde des hommes, déborde le seul cadre de l'étude des hommes s'adonnant à l'étude des mathématiques, pour s'appliquer à un domaine plus vaste, qui recouvre les sciences de l'homme et une partie des sciences de la nature.

Un premier exemple, historique, est fourni par Platon dans le *Ménon* : l'expérience est rapportée sous la forme d'un corpus[103] de propos échangés entre Socrate, un esclave, et Ménon. Les réponses de l'esclave qui, grâce à la maïeutique développée par Socrate, réussit à résoudre le problème du carré d'aire double de celle d'un carré donné, sont présentées comme permettant de soutenir la thèse socratique bien connue :

> « Ainsi l'âme, immortelle et plusieurs fois renaissante, ayant contemplé toutes choses, et sur la terre et dans l'Hadès, ne peut manquer d'avoir tout appris. Il n'est donc pas surprenant qu'elle ait, sur la vertu et sur le reste, des souvenirs de ce qu'elle en a su précédemment. La nature étant homogène et l'âme ayant tout appris, rien n'empêche qu'un seul ressouvenir (c'est ce que les hommes appellent savoir) lui fasse retrouver tous les autres, si l'on est courageux et tenace dans la recherche ; car la recherche et le savoir ne sont au total que réminiscence. » pp.180-181.

L'expérience réalisée, prêtée à Socrate et relatée par Platon, *contient* aussi, à la différence de la méthode courante qui consiste *à produire à partir* du corpus la validation théorique, la conclusion de la justesse de la thèse :

> « Socrate : Que t'en semble, Ménon ? A-t-il exprimé une seule opinion qu'il n'ait tiré de lui-même ?
> Ménon : Aucune ; il a tout tiré de son propre fonds.
> Socrate : Et cependant il ne savait pas, nous l'avons reconnu tout à l'heure.
> Ménon : C'est vrai.
> Socrate : C'est donc que ces opinions se trouvaient déjà en lui. N'est-ce pas vrai ?

---

[103] Sur l'origine du mot « corpus », issu de la linguistique et lié à une méthode d'analyse, la méthode distributionnelle d'analyse structurale, on peut se reporter à Chevallard (1982) et à la critique qu'il fait de sa transposition dans d'autres domaines. Citons par exemple : « […] l'"ascèse" du "corpus – et – rien – que - le corpus" peut, dans la perspective positiviste – empiriste si spontanément répandue, se trouver facilement investie d'une réputation d'hyper scientificité fascinante et d'une aura de pureté méthodologique, à la fois âge d'or et terre promise de tout travail scientifique. » p. 28. C'est dans le sens de « recueil concernant une même matière » (définition du Larousse classique) que nous l'utilisons ici ; le débat se déplace alors du côté de ce qui fait le « même » et la « matière ».

Ménon : Oui. » p. 186.

Un deuxième exemple, relatif lui-aussi à la nécessité d'un corpus expérimental étayant un résultat théorique, est fourni par Lebesgue (1934, 1975) et concerne un certain domaine du savoir mathématique. Lebesgue voyait en effet l'arithmétique comme étant fondée sur le recueil pratique de résultats d'expériences répétées :

> « *Ce nombre est considéré comme le résultat de l'opération expérimentale de dénombrement parce qu'il en est le compte-rendu complet.* Un résultat expérimental sert à dispenser d'autres expériences : les règles des quatre opérations nous dispensent des opérations de dénombrement pour certaines collections que l'on peut former à partir de collections déjà dénombrées. À l'occasion de ces règles on constate divers faits que l'on énonce ordinairement comme théorèmes mais dont les prétendues démonstrations sont en réalité des vérifications expérimentales, par exemple, le théorème : un produit est indépendant de l'ordre des facteurs, lesquelles dérivent toutes de cette constatation générale : le nombre attaché à une collection ne dépend pas de l'ordre dans lequel on range, en les comptant, les objets de la collection. » p. 3.

De plus, note Lebesgue, la répétition de cette expérience un très grand nombre de fois, depuis que l'Humanité s'adonne à la pratique du dénombrement et à la résolution des problèmes qui s'y rattachent, fournit le cadre dans lequel la « théorie » arithmétique reste pertinente, et délimite les frontières au-delà desquelles il est déraisonnable de la mobiliser :

> « L'arithmétique, elle, n'utilise qu'un très petit nombre d'expériences, dont chacune a été répétée un nombre prodigieux de fois par chaque homme, depuis qu'il y a des hommes. Aussi nous savons, sans hésitation, dans quels cas l'arithmétique s'applique, dans quels cas elle ne s'applique pas. Dans ces derniers cas, l'idée d'appliquer l'arithmétique ne nous effleure pas un instant : […] deux et deux font quatre ; affirmons-nous. « Dans un verre je verse deux liquides, dans un autre deux liquides. Je verse le tout dans un vase, contiendra-t-il quatre liquides ? – C'est de la mauvaise foi, dites-vous, ce n'est pas une question d'arithmétique. » » pp. 5-6.

Cette expérience, répétée, de la pratique comme interrogation du réel, qui toujours conduit, sous certaines conditions, aux mêmes réponses, a pu permettre d'expliquer l'adhésion, sur des siècles, à la justesse de certaines axiomatiques, telle l'axiomatique euclidienne ; au point qu'une expérience dont le résultat aurait infirmé cette axiomatique, aurait sans doute été qualifiée de défectueuse dans les conditions ou les outils de sa réalisation. C'est ce qu'explique Fraïssé (1982) :

> « Nous savons tous que la première en date des axiomatiques fut celle d'Euclide, pour la géométrie élémentaire, et que, jusqu'au début du XIX^e siècle, cette axiomatique fut considérée comme vraie à la fois d'un point de vue expérimental (modèle parfait de l'espace physique) et d'un point de vue rationnel (seule géométrie logiquement consistante). […] Il semble que, si un expérimentateur du début du XIX^e siècle avait mesuré, par une méthode optique, les trois angles d'un triangle physique avec une très grande précision, et s'il avait obtenu une somme indiscutablement différente de l'angle plat, on aurait conclu à une erreur de son dispositif ou à une propagation tordue de la lumière, mais on n'aurait certainement pas mis en cause le caractère euclidien de l'espace physique. »

Dans la suite de son exposé relatif au développement des axiomatiques, Fraïssé (1982) note qu'avec l'apparition des géométries non euclidiennes, notamment celles de Riemann et de Lobatchevski, on assiste alors à une dissociation entre vérité expérimentale relative à l'espace physique et vérité théorique ; cette dernière s'appuie sur la consistance logique, c'est-à-dire sur le fait que son utilisation n'entraîne pas de contradiction interne à la théorie. Cependant, l'absence de contradiction peut parfois « seulement » relever, au sein de la théorie, d'un postulat vérifié seulement par la pratique expérimentale de la théorie[104].

Ces deux derniers exemples montrent qu'il est difficile de dissocier, y compris dans les sciences dites « dures », les deux pôles d'une dialectique constitutive de la production de savoir : l'empirique et le théorique[105]. Sans théorie, pas d'identification possible du fait à l'intérieur du corpus empirique, ni même de possibilité de constitution de corpus ; et sans la construction d'un corpus quelle valeur pour une assertion théorique, ou encore quelle validité et quelle possibilité d'être d'invalidée ?[106]
La question de la valeur, de la validité, de la validation, tout comme celle de la pertinence, renvoie à la question de l'existence d'une instance qui va prononcer le jugement. La question de la valeur et de la pertinence est tranchée, en tout état de cause, par l'usage du résultat théorique ou expérimental obtenu, donc par le groupe social qui s'adonne aux pratiques à l'intérieur desquelles le résultat peut trouver place, c'est-à-dire par la communauté scientifique qui s'y rapporte. La question de la validité renvoie au paradigme à l'intérieur duquel est plongée la communauté scientifique à laquelle le résultat s'adresse. Celle de la validation est, d'après Johsua (1994), plus difficile à régler, selon que le résultat relève du domaine des sciences de la nature ou de celui des sciences humaines :

> « Les premières sont redevables de processus de validation où la réfutation expérimentale joue tôt ou tard un rôle décisif. Pour que ceci soit possible, il faut que la liste des facteurs pertinents pris en compte puisse être produite, en nombre fini, du moins en tendance. De cette manière, on peut aussi définir l'identité, ou du moins la similarité des situations expérimentales. Dans les sciences humaines, du fait de l'historicité des situations produites, ce type de réfutation fonctionne plus ou moins à l'intérieur d'un paradigme donné, mais ne peut servir à départager des paradigmes concurrents. Cela revient en définitive à admettre que la maîtrise du type de réduction théorique produite dans les deux cas est constitutionnellement différente… ».

Ainsi, la validation qui, dans le domaine des sciences de la nature, est assurée par la non-réfutation expérimentale et par la production de la liste des facteurs à prendre en compte pour l'établissement du résultat, se heurte dans le domaine des sciences humaines au problème de l'historicité. Celui-ci est, nous semble-t-il, à prendre en compte sous la forme de deux

---

[104] Ainsi Fraïssé note-t-il, à propos de la « récursivité » : « La notion de *relation récursive* (sur les entiers naturels) est due à Gödel (1931, complétée en 1934), d'après une suggestion d'Herbrand. Elle précise la notion usuelle, mais vague, de *relation calculable* ; l'affirmation "récursivité = définition rigoureuse de la calculabilité" est due à Church (1936) et d'ailleurs connue sous le nom de *thèse de Church* ; elle est **vérifiée par l'expérience** : depuis plus de quarante ans, toutes les relations calculables connues se sont révélées être récursives. » (souligné en gras par nous).

[105] Althusser (1967) note : « Naturellement, il n'y a pas d'analyse empirique *pure*. Tout analyse, même empirique, suppose un minimum de références théoriques, sans quoi il serait impossible de présenter ce qu'on appelle des faits : car on ne saurait pas pourquoi on les accepte et reconnaît comme des *faits*. » p. 66. C'est ce qu'écrit, sous une autre forme, Chevallard (1982) : « Toute objectivation suppose une *formulation*, dont le contrôle expérimental (en termes de vérification ou de falsification, peu importe ici) puisse faire sa pâture ; soit donc, sinon une théorie, du moins une *amorce* de théorisation. Mais le contrôle expérimental lui-même *suppose plus que cela* : en général il *ne peut rien dire* d'une formulation isolée, d'un *isolat théorique*, parce que nous ne savons pas alors quelles *formes* concrètes pourrait prendre un tel « contrôle », quels « faits » et quels « corpus » de faits pourrait autoriser ce contrôle. » p. 14.

[106] C'est ce qu'indique Bachelard (1934) : « Quel que soit le point de départ de l'activité scientifique, cette activité ne peut pleinement convaincre qu'en quittant le domaine de base : *si elle expérimente, il faut raisonner ; si elle raisonne, il faut expérimenter.* » p. 7.

dimensions : historicité des sociétés ou des hommes auxquels le résultat s'adresse, donc historicité des paradigmes et des théories d'une part[107], et historicité des sociétés ou des hommes sur lesquels il porte, donc historicité des situations qui ont fourni la construction des corpus d'autre part.
Sous l'aspect de la première dimension (historicité de la société à laquelle il s'adresse), une réponse au problème est à trouver du côté de la théorie qui a permis la construction du fait et l'établissement du résultat : celle-ci doit être publique, explicitée, afin que soit montré comment elle a permis la constitution du fait et que soit donnée la possibilité de vérifier la consistance du résultat à l'intérieur de la théorie exposée.
Sous l'aspect de sa deuxième dimension (historicité de la société sur laquelle il porte), la question débouche sur la reproductibilité de la constitution du fait, ou tout au moins de sa prédiction de reproductibilité, vue alors comme un critère fort de la validation du résultat, compte tenu de l'historicité du fait, qui inclut peut-être son unicité. Un critère plus faible de validation est obtenu en inscrivant celle-ci, elle-aussi, dans une dimension historique : tant qu'un fait expérimental au sein de la théorie, ou une nouvelle théorie, ne viennent pas infirmer le résultat, celui-ci reste validé.

L'analyse qui précède s'accorde assez bien avec les conclusions que tire Johsua (1996), discutant de la notion de « résultat » en didactique des mathématiques, à travers l'étude de sept exemples pris dans des champs distincts de la didactique des mathématiques. Il mentionne en effet que :

> « - *Un résultat en didactique est un bloc composé d'un cadre théorique explicite, et de données empiriques*. »

Nous retrouvons ici tout à la fois, d'une part, cette dualité « théorique – empirique » signalée dès le point de départ et, d'autre part, la nécessité de l'explicitation théorique.

> « - À l'intérieur de ce bloc, il est nécessaire que le résultat *résiste, qu'il soit stable*. »

Est ici soulignée la nécessité de recourir aux critères de validation, fort ou faible, qui s'expriment soit par la reproductibilité ou la prédictivité de reproductibilité, soit par la non-réfutation[108].

> « - Mais pour qu'il soit vraiment considéré comme un résultat, il faut qu'il puisse aussi se dégager notablement du cadre où il a été produit. »

---

[107] Il est intéressant de noter que, sur ce point encore, il est difficile de départager les sciences « dures » des sciences humaines. C'est ce qu'indique Chevallard (1996) dans une lettre du 1er mai 1989 du colloque épistolaire : « La validation est toujours, en dernier ressort, l'affaire d'une *communauté de recherche*, qui seule peut valider une "validation expérimentale", ou, en mathématiques, une "démonstration". Celles-ci ne sont jamais que des constructions dont le caractère probant *est offert à l'examen de la communauté de recherche*, à qui il revient de les valider ou de les invalider. Elles ne peuvent jamais *en elles-mêmes* constituer une validation. » p. 46.
[108] Sur ce point, il est intéressant de relever ces propos de Johsua (1996) : « Je défends ici l'idée contre-intuitive que la *charge de la preuve* appartient méthodologiquement non à celui qui conduit la recherche, mais à celui qui en critique la stabilité. »

C'est alors la contribution du résultat à l'avancée théorique qui est ici évaluée, en dernière instance, par la communauté scientifique à qui il est présenté. Par suite, une conséquence logique en est :

> « … la marque principale d'un résultat en didactique, *c'est de renforcer le paradigme où il s'abrite.* »

3. 1. 2. Développement du problème de l'historicité des sciences humaines

L'historicité pose un problème redoutable aux sciences de l'homme, à l'intérieur desquelles ce travail veut faire œuvre de production de savoirs « empirico-rationnels » ; ceux-ci relevant, d'après Passeron (1991), d'un « […] *type de scientificité* [qui] *est celui des sciences empiriques de* l'interprétation[109] […] ». Pour Passeron (1991), ce problème se laisse décrire de la manière suivante :

> « […] l'unité qui s'impose à toute analyse épistémologique de ces sciences est celle qui tient à la spécification spatio-temporelle de leurs assertions les plus générales : les phénomènes leur sont donnés dans le développement du monde historique qui n'offre ni répétition spontanée ni possibilité d'isoler des variables en laboratoire. Même méticuleusement organisées, la comparaison et l'analyse ne fournissent ici qu'*un substitut approximatif de la méthode expérimentale* puisque leurs résultats restent indexés sur une période et en un lieu. […]. Rien de comparable à la position des sciences de la nature qui, lorsqu'elles sont confrontées à une tâche de type "historique", pour expliquer une configuration ou un événement singuliers (par exemple, un état du ciel astronomique ou un accident de chemin de fer), peuvent appuyer leur reconstitution de l'enchaînement d'états successifs sur un *corpus* constitué de lois physico-chimiques valables indépendamment des coordonnées spatio-temporelles de la consécution singulière à expliquer. » p. 25.

Il nous semble pouvoir trouver dans ce qu'Althusser (1982, 1994) a appelé « Le courant souterrain du matérialisme de la rencontre », ou encore « Le matérialisme aléatoire », un positionnement de la question, dont les développements sont malheureusement restés inachevés, et aussi une clé d'entrée pour le problème de l'historicité, donc de la reproductibilité aléatoire des faits et des phénomènes. À l'origine de cette théorisation se trouve le concept de *déviation* repris de l'idée de *clinamen* chez Lucrèce et Épicure : une infinité d'atomes tombent parallèlement dans le vide et une déviation infinitésimale et imprévisible survient, qui va faire qu'un atome va percuter un autre qui, de proche en proche, et par une sorte de réaction en chaîne, va provoquer un agrégat d'atomes qui vont constituer un monde. Il n'y a plus à rechercher, dans ce modèle, la Raison ou la Cause de l'origine du monde. C'est la voie ouverte à un matérialisme de la rencontre, de la contingence, qui se différencie du matérialisme hérité du XIX^{e} siècle, rationaliste et téléologique. S'en suit une remise en ordre chronologique de ces concepts hérités du matérialisme classique. En effet :

> « Le monde peut être dit *le fait accompli*, dans lequel, une fois le fait accompli, s'instaure le règne de la Raison, du Sens, de la Nécessité et de la Fin. Mais *cet accomplissement du fait* n'est que pur effet de la contingence, puisqu'il est suspendu à la rencontre aléatoire des atomes due à la déviation du *clinamen*. Avant

---

[109] Passeron (1991) donne la définition suivante de l'interprétation : « Est interprétation, dans une science empirique, toute reformulation du sens d'une relation entre des concepts descriptifs qui, pour transformer ce sens (l'enrichir, le déplacer ou le simplifier), doit faire intervenir la comparaison de cette relation avec des descriptions empiriques qui ne supposent pas exactement le même "univers du discours" que la relation ainsi interprétée. » p. 401.

> l'accomplissement du fait, il n'y a que *le non-accomplissement du fait*, le non-monde qui n'est que l'existence *irréelle* des atomes. » p. 542.

Une conséquence radicale concerne alors, pour Althusser, la philosophie qui ne peut plus être :

> « […] l'énoncé de la Raison et de l'Origine des choses, mais théorie de leur contingence et reconnaissance du fait, du *fait* de la contingence, du fait de la soumission de la nécessité à la contingence, et du fait des formes qui "donne forme" aux effets de la rencontre. » p. 542.

Si l'on veut bien transposer cette dernière sentence du philosophe au raisonnement anthropologique, on devra reconnaître que celui-ci ne peut parler que postérieurement à la contingence advenue. Certes, des structures contraignantes ont pu être établies, au cours du développement historique des sociétés, afin que, comme le dit Althusser, « *l'état de rencontre soit imposé* aux hommes ». Tel est le cas de l'École qui, au-delà de cette fonction d'organisation de l'état de rencontre d'hommes (des petits d'hommes en général), est une institution bâtie pour que les hommes rencontrent, aussi et surtout, un savoir. Mais cette rencontre est, à son tour, soumise à la contingence : il faut que qu'il y ait *prise*, que la rencontre tienne, et que ce lien assure la possibilité d'autres rencontres à leurs tours aléatoires. Il est possible de tirer, pour ce qui nous occupe dans ce travail, deux leçons de ce matérialisme de la rencontre, de l'aléatoire.

La première est relative à la rencontre de l'élève et du savoir ; rencontre aléatoire qui, bien que l'état de rencontre ait été imposé, se produit souvent hors de l'espace-temps prédéfini pour la rencontre. C'est une partie du travail de Mercier (1992, 1995, 1998a) à travers l'étude « d'épisodes de la biographie didactique d'un élève » qui montre que, parfois, les élèves s'enseignent à eux-mêmes, à l'insu du professeur et hors du temps didactique, pour peu qu'ils rencontrent leur ignorance d'un élément de savoir et établissent une interaction avec un milieu a-didactique assez riche pour leur permettre d'apprendre à son propos. C'est ce point que reprend Mercier pour développer le concept d'épisode de la biographie didactique :

> « Nous dirons qu'un épisode de la biographie didactique d'un élève (ou épisode biographique) signe, par principe, "le fonctionnement adidactique d'une relation didactique, pour cet élève au moins, relativement à un objet de savoir pour lequel cet élève a rencontré de l'ignorance comme un besoin de savoir, et des moyens de satisfaire ce besoin" (Mercier 1995) »

Mais rien ne garantit que l'épisode aura lieu ; rien non plus ne garantit qu'ayant eu lieu pour un élève, il pourra être reproduit pour un autre, car rien n'assure que rencontre et prise puissent se produire dans des espace-temps didactiques différents, structurés de manières différentes, par des sujets différents. Mercier (1998a) peut donner des conditions nécessaires pour que cette rencontre ait des chances de se produire :

> « Puisque les épisodes didactiques travaillent l'adéquation du rapport personnel au rapport institutionnel à un objet et l'idonéité (du rapport personnel des élèves aux objets de savoir pertinents pour la formation du rapport à un objet enseigné), l'étude des rapports institutionnels aux savoirs, fondée sur *l'écologie mathématique* du savoir enseigné, peut identifier a priori une niche pour certains épisodes didactiques et nous engager à la recherche des habitats correspondants (les lieux possibles de cet épisode). »

Elles ne sont pas pour autant suffisantes : la rencontre peut ne pas avoir lieu ou, autrement dit, la niche ayant été identifiée, il se peut que l'habitat soit vide du locataire qu'on pensait y trouver.
La seconde leçon est d'ordre épistémologique et méthodologique. Elle concerne la reproductibilité du fait et son observation ; l'un et l'autre sont, aussi, tout autant aléatoires. Car d'une part, la reproductibilité suppose qu'un même espace-temps du sujet puisse être reconstruit, pour un autre sujet. D'autre part, l'observation suppose, quant à elle, que l'observateur, pour parvenir à pénétrer l'espace-temps interrogé, ait réussi à obtenir, à l'aide d'un dispositif approprié, un décalage entre l'espace-temps didactique, celui de l'observateur et celui du sujet observé. Il peut ensuite, par une confrontation différentielle, faire émerger l'un ou l'autre des espaces-temps interrogés, didactique ou propre au sujet, sur lequel l'observation pourra alors porter.
Du côté de la reproductibilité du fait, et pour justifier l'assertion de son aspect aléatoire, mais aussi pour dégager l'espace d'une connaissance possible, il nous faut retourner à la théorisation althussérienne du matérialisme de la rencontre, qualifié de la manière suivante :

> « […]le matérialisme de la rencontre est non celui d'un sujet (fût-il Dieu ou le prolétariat), mais celui d'un processus, sans sujet mais imposant aux sujets (individus ou autres) qu'il domine l'ordre de son développement sans fin assignable. » pp. 552-553.

Il en résulte la pluralité des mondes possibles, compte tenu de la pluralité des sujets possibles pour ces mondes. Ainsi la rencontre ayant eu lieu, on peut simplement dire que :

> « […] n'importe quoi ne peut pas produire n'importe quoi, mais des éléments voués à leur rencontre et, par leur affinité, à leur "prise" les uns sur les autres […] » p.565.

On peut ainsi étudier les déterminants qui ont fait que la rencontre a pris, par exemple : le « potentiel d'affinité » des éléments pris dans la prise, indirectement la structure de la rencontre d'où est résultée la prise, puis une fois que la prise a eu lieu, quelles sont les configurations qui en résultent et comment elles interagissent. Ceci dégage un espace de l'étude de la rencontre, de la prise et de son devenir. Ainsi pourra-t-on déduire qu'ayant étudié la structure d'une rencontre, ayant disposé des éléments supposés dotés du « potentiel d'affinité » compatible avec cette structure, ayant tenté de produire le *clinamen* idoine, il est *seulement du domaine du possible* que la rencontre et la prise aient lieu. Car dans cette alchimie des conditions initiales, un élément relève de l'aléatoire et du distinctif : l'élément sur lequel cette alchimie opère. Dans le monde des hommes, il s'agit d'éléments produits d'histoires singulières, ce qui *a priori* ne garantit nullement leur « potentiel d'affinité », ni leur « potentiel d'adéquation » à la structure. Cette rencontre reste alors irréductiblement aléatoire, mesurée en masse et statistiquement, souvent à l'aide d'un modèle gaussien qui fait que, par exemple, sous certaines conditions historico-sociales, presque 80 % d'une classe d'âge parviennent à acquérir des connaissances jugées suffisantes pour atteindre les classes terminales, ou encore que sous certaines conditions de température et de pression, $6{,}023\times10^{23}$ molécules de n'importe quel gaz, se rencontrant de façon tout à fait aléatoire, occuperont toujours le même volume de l'espace.

La tentation est alors grande de réunir un nombre statistiquement significatif d'observations de ces occurrences aléatoires, de les faire converger, et d'en déduire la structure de la rencontre et de sa prise. C'est cette voie qu'indique Passeron (1991) lorsque, dans l'avant-propos de son ouvrage, il revendique, d'entrée de jeu, une scientificité pour la « théorie interprétative », et exhibe pour cela le recours « *au critère* des exemplifications empiriquement multipliées et sémantiquement conjointes ». Si l'objectif apparaît louable, et si tendanciellement le chercheur doit s'efforcer de le satisfaire, ne serait-ce que pour pouvoir entrer dans le paradigme de la « théorie interprétative », il se heurte à un redoutable problème historique et méthodologique. S'il s'agit, comme indiqué précédemment, d'obtenir un nombre significatif d'observations du fait et de fournir le cadre sémantique, donc la théorie, qui va le constituer en phénomène dont la sémantique saura rendre compte, il faut immédiatement constater qu'existent alors deux types d'observations, à moins que ce ne soit deux types de faits se prêtant à deux types d'observations différentes : ceux qui obéissent à une certaine régularité ou qui sont prévisibles, et ceux qui adviennent rarement ou de manière imprévisible. Fournir comme critère « les exemplifications empiriquement multipliées et sémantiquement conjointes » ne saurait donc, par essence, s'appliquer à l'observation de type scientifique (au sens de Passeron) de cette deuxième catégorie. Devrait-on alors se résigner à ne point les observer, ou à les observer sans prétendre en retour dégager en une certaine scientificité les fruits de l'observation ? Il ne semble pas que les hommes se soient, au cours de l'histoire de la recherche scientifique, résigner à une telle fatalité : dans le seul domaine médical, il existe des phénomènes rares, comme certaines pathologies, pour lesquels la recherche n'a pas renoncé pour autant, même si l'échantillon soumis aux essais cliniques de la médication sera forcément réduit, et il existe aussi des phénomènes et des traitements difficilement reproductibles, tels ceux qui sont relatifs à l'inconscient. La science médicale n'a pas pour autant renoncé à leur étude, et c'est sans doute le défi en face duquel se trouvent confrontées les sciences de l'homme, ou tout au moins, pour ce qui nous occupe, la didactique des mathématiques.

3. 1. 3. Conséquences méthodologiques

Le paragraphe 3. 1. 1. qui précède nous a permis de dégager quelques critères pour attester ici, en première approche, de la validité des résultats exposés. Ceux-ci ne peuvent, selon cette analyse, être strictement distingués entre résultats théoriques d'une part, et expérimentaux – empiriques d'autre part. Ainsi, il n'aura pas échappé que la construction du modèle de mémoire, qui a été menée dans la deuxième partie de cette thèse, est issue de la dialectique d'un cadre qui emprunte au moins à deux sources théoriques, l'anthropologie – sociologie de la mémoire d'une part et la didactique des mathématiques d'autre part, et d'un cadre bâti de l'apport d'un corpus de données empiriques, recueillies sur le terrain, ou plutôt sur divers terrains ayant en commun de faire tous partie du même domaine : celui de l'étude des mathématiques. Il est donc nécessaire de passer au crible de ces critères tout à la fois quelques résultats théoriques produits, essentiellement le modèle proposé, et le cadre expérimental qui a permis d'établir les faits.

Cependant, toute forme d'exposition induit un découpage, qui ne respecte ni le temps ni la forme de la constitution de la matière à exposer ; le travail présenté ici ne saurait y échapper, qui a déjà utilisé des données observées sans cependant avoir exposé les modalités de leur recueil. Satisfaisant à cette contrainte inhérente à l'exposition, nous ne pouvons en ce point poursuivre selon un schéma linéaire qui voudrait qu'à une méthodologie, posée une fois pour toutes, succèdent la donnée et l'analyse des faits empiriques recueillis, et à partir desquels nous tirerions des éléments nouveaux de savoir. Plusieurs raisons en sont la cause.

Tout d'abord, la production des faits et de leur interprétation, dont l'aspect problématique a été développé aux paragraphes 3. 1. 1. et 3. 1. 2., nécessitera une méthodologie aux formes multiples que nous ne pourrons donc développer, selon le type de corpus recueilli, qu'au fur et à mesure de l'avancée dans la thèse : ce sera le cas, en particulier, lorsque nous exposerons les observations « de terrain » sur lesquelles nous nous appuyons dans les troisième, quatrième et cinquième parties. Mais, nous aurons aussi recours par la suite, comme nous l'avons d'ailleurs déjà fait dans les parties précédentes, à une forme particulière de corpus, constituée d'ouvrages, manuels scolaires ou ouvrages plus fondamentaux, qui exposent un savoir mathématique. Il s'agira alors d'analyser ce savoir mathématique, et nous ne pourrons pour cela que nous référer à une méthodologie qui peut paraître bien peu visible, mais qui n'est pas pour autant moins fondamentale : celle qui permet de porter jugement sur la pratique mathématique exposée et qui n'est le produit que… de la pratique mathématique, précisément ! Autrement dit, si l'on cherche à justifier le choix du « recueil » de tel ou tel ouvrage mathématique, il ne nous sera possible d'apporter réponse qu'en montrant la nature des mathématiques qu'il contient, et dont nous fournissons l'analyse à l'aide d'outils théoriques issus de la didactique des mathématiques, du savoir mathématique lui-même, ou de son analyse historique, sans plus. Ces dernières affirmations peuvent paraître renvoyer à un univers tautologique ; elles nous semblent pourtant résulter des *Propositions, scholies et définitions* que Passeron (1991) propose, en conclusion de son ouvrage, et qui constituent une brillante tentative de formalisation de la méthode pour les sciences historiques à l'intérieur desquelles nous plaçons les sciences de l'éducation et la didactique des mathématiques. Citons notamment les propositions du chapitre 2. 2. :

> « 2. 2. La vulnérabilité et, donc, la pertinence empiriques des énoncés sociologiques ne peuvent être définies que dans une situation du prélèvement de l'information sur le monde qui est celle de l'observation historique, jamais celle de l'expérimentation. »
> « 2. 2. 2. Le contexte d'une mesure ou d'une observation portant sur le monde historique ne peut être épuisé par une série finie de propositions qui énonceraient les traits pertinents du contexte pour la validité de la mesure ou de l'observation considérée. »
> « 2. 2. 3. Les analyses qui permettent de généraliser les constats empiriques d'une enquête au-delà de son contexte singulier relèvent d'un raisonnement qui ne peut être que "naturel", en ce sens qu'il articule comparativement des constats opérés dans des contextes dont l'équivalence n'est justifiée que par la typologie qui les apparente, inscrivant ainsi les assertions sociologiques dans une méthodologie de la présomption, distincte d'une méthodologie de la nécessité. » pp. 366 & 368.

Le raisonnement « naturel » est, pour le cas des ouvrages mathématiques choisis, ce que nous préférons nommer « l'expérience pratique des mathématiques », qui fonde la possibilité d'une généralisation de l'analyse à une « classe d'équivalence » dont nous posons l'existence *a priori* et dont nous analysons certains « représentants » à travers le choix que nous faisons.

Par ailleurs, les parties 3. 1. 1. et 3. 1. 2. ont établi la nécessité de satisfaire à des principes de consistance et de complétude théoriques. Or ces deux dimensions sont elles aussi à référer à l'historicité, et ne peuvent trouver leur validation dans l'ici et maintenant de l'exposé de cette thèse. Nous ne pouvons en effet présenter que des fragments de consistance, en montrant que le modèle exposé n'est contradictoire ni avec lui-même, ni avec les deux théories didactiques sur lesquelles nous nous appuyons. La complétude, quant à elle, est à ce jour hors de portée puisque, si elle doit certes tourner son regard du côté des phénomènes de didactique antérieurement produits, elle est aussi une attente qu'un phénomène mémoriel nouveau, dont le modèle proposé ici ne pourra rendre compte, vienne l'infirmer. C'est donc dans un temps autre que celui où nous nous trouvons que ces dimensions seront satisfaites.
Un critère de validation consiste, comme il a été dit, à rechercher la reproductibilité de la constitution du fait. Appliquant immédiatement le principe de décalage temporel précédemment établi, cette reproductibilité peut aussi être trouvée, d'une manière qui peut paraître paradoxale, dans une sorte « d'*ante* - production » du fait. Nous pouvons donc tourner le regard, comme il était dit précédemment, du côté des phénomènes didactiques antérieurement produits. Autrement dit, nous pouvons confronter notre modèle aux phénomènes obtenus à travers la collecte antérieure de corpus, issue d'autres situations observées, et par d'autres, et réalisée à l'aide des théories préexistant à notre modèle. Cette confrontation a déjà été menée, à travers la visite que nous avons faite en 2. 7. des travaux portant sur la mémoire en didactique des mathématiques, et elle n'a révélé ni incompatibilité théorique ni invalidation empirique ; ce qui constitue un fragment de la complétude que nous évoquions précédemment. Nous ne pouvons donc guère aller plus loin sur ces points, et nous sommes contraints de nous en remettre au jugement des personnes habilitées à parler et à juger, en sciences de l'éducation, en mathématiques et en didactique des mathématiques.

Dans la suite de cette partie, nous exposerons, comme il a été dit, les divers aspects méthodologiques, donc « phénoménotechniques »[110], mis en œuvre pour la collecte des corpus, et dont des extraits ont déjà été utilisés pour la construction théorique de la deuxième partie. La rencontre avec d'autres extraits de corpus sera l'occasion de faire fonctionner le modèle théorique de la mémoire établi dans la deuxième partie, afin d'engendrer de nouveaux résultats ou de nouvelles interprétations.

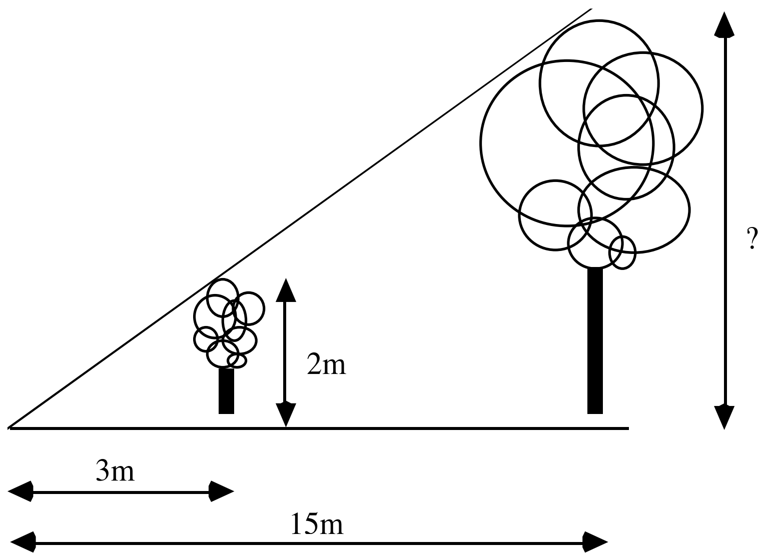
[110] Bachelard (1934, 1987) : « La véritable phénoménologie scientifique est donc essentiellement une phénoménotechnique. Elle renforce ce qui transparaît derrière ce qui apparaît. Elle s'instruit par ce qu'elle construit. » p. 17. La technique de production et d'observation des faits est incorporée dans la théorie qui se construit des phénomènes ainsi engendrés.

3. 2. Temps institutionnel, temps personnel, mémoire pratique.

Avec ce chapitre, nous inaugurons une série d'observations, menées dans des classes courantes de l'enseignement secondaire français ou à partir de dispositifs annexes mis en place à l'extérieur de ces classes, mais dans les locaux des établissements desquels elles dépendent, afin de recueillir les observations des effets de l'enseignement et de l'apprentissage sur des classes entières ou des élèves singuliers. Il s'agit tout d'abord, dans ce chapitre, de reprendre et de prolonger, à partir d'observations postérieures, le travail de DEA (Matheron 1994) qui inclut le principe germinatif de ce travail de thèse.

3. 2. 1. Retour sur une observation ancienne

Au départ de la recherche, se trouve la passation d'un item de la II^{e} Enquête internationale sur l'enseignement des mathématiques, réalisée durant l'année scolaire 1982-1983 auprès d'élèves de quatrième et de troisième, par des professeurs de mathématiques d'un lycée marseillais. L'item est le suivant :



Le dessin ci-dessus montre comment Pierre utilise le petit arbre pour trouver la hauteur du grand. Quelle hauteur va-t-il trouver ?

A 10 mètres B 12 mètres C 14 mètres D 17 mètres E 20 mètres

Ces deux professeurs avaient gardé le souvenir d'un phénomène étonnant : les élèves parvenaient à trouver la bonne réponse, alors même que le savoir mathématique qui justifie la

technique de calcul, le théorème de Thalès, ne leur avait pas été enseigné[111]. Les documents de l'époque qu'ils avaient conservés, et relatifs aux observations, confirmaient leurs dires. Le travail mené dans le cadre de ce DEA consista à vérifier le phénomène avec d'autres élèves, enseignés dans un nouveau programme[112], mais qui, comme le précédent, n'abordait qu'en classe de 3e l'enseignement du théorème de Thalès, et à tester diverses hypothèses pour son explication.
Divers problèmes du même type, huit en tout, fabriqués en faisant varier diverses variables comme le type d'opérateur multiplicatif, le type de transformation (projection ou homothétie) qui paraissait être le plus en vue, selon la position de la figure dans la feuille, furent proposés à 64 élèves de quatrième et troisième, du même établissement qu'en 1982-1983, avent que le théorème de Thalès n'ait encore été enseigné. La réussite globale fut de 70 % environ sur l'ensemble des huit problèmes, réussite significative à 0,05. Le phénomène était donc attesté.
Alors que ce DEA était déjà rédigé, il nous fut possible d'accéder, auprès du Centre International d'Études Pédagogiques du Ministère de l'Éducation Nationale, aux résultats de l'enquête internationale qui concernait huit pays : la Belgique flamande, la Colombie britannique, l'Ontario, la France, le Japon, la Nouvelle-Zélande, la Thaïlande, et les États-Unis. On sut alors qu'il s'agissait de l'item 197 de l'enquête longitudinale (et non de la transversale, sans qu'on sache exactement quelles différences se cachaient derrière ces termes), dont le contenu était officiellement relatif à la « similitude des figures planes ». L'enquête confirma qu'il n'avait été passé en France que par des élèves de quatrième, donc qui n'avaient pas encore rencontré de programme de mathématiques relatif à l'enseignement du théorème de Thalès. Cet item avait été passé dans sept des huit pays, le Japon faisant exception, et dans chacun d'eux en pré-test, en début d'année, et en post-test en fin d'année. Les résultats de l'enquête en France confirmaient les résultats obtenus dans le DEA : en pré-test, 42 % de bonnes réponses, 34 % de mauvaises et 24 % de non-réponses, tandis qu'en post-test ces nombres devenaient respectivement 55 %, 29 % et 16 %. Il s'agissait donc bien d'un phénomène global touchant à l'organisation de l'enseignement des mathématiques en France.
L'explication du phénomène était à rechercher dans l'enseignement antérieur de la proportionnalité, notion enseignée dès l'École primaire. Or, pour mettre en évidence ce phénomène engageant la proportionnalité et son enseignement, il avait fallu construire et faire passer auprès de la même catégorie d'élèves ne connaissant pas encore le théorème de Thalès de nouveaux problèmes, mélangés à d'autres contenant des informations surabondantes, et que l'on pourrait désigner comme étant des problèmes « aberrants ». Ceux-ci différaient « simplement » des précédents du fait qu'il était faux d'utiliser la proportionnalité, justifiée dans les autres cas par le théorème de Thalès, les droites modélisant ces derniers problèmes n'étant pas parallèles. Le « stock » d'élèves de quatrième disponibles pour les tests s'amenuisant, neuf d'entre eux seulement avaient eu à traiter deux de ces problèmes « aberrants », pour lesquels d'ailleurs les professeurs avaient scrupule à engager leurs élèves sachant, bien sûr, qu'ils ne pourraient leur fournir de réponse correcte en retour… Il se trouva

[111] Le programme alors en vigueur était le programme qui a été enseigné de 1978 à 1988 en quatrième et de 1979 à 1989 en troisième. L'enseignement du théorème de Thalès relevait du programme de troisième.
[112] Ce programme couvrit la période de 1988 à 1998 pour le programme de quatrième et de 1989 à 1999 pour celui de troisième. Les observations dont nous rendons compte ont été réalisées en 1994 et en 1995.

que sur ces neuf élèves, sept donnaient la réponse indue 10m en utilisant une technique relevant de la proportionnalité et que, parmi ces sept, trois d'entre eux la citaient explicitement pour justifier leur calcul.
Par ailleurs, sur les dix élèves qui avaient à résoudre un problème aux données numériques surabondantes, mais où l'on pouvait justifier la proportionnalité par le théorème de Thalès, seuls trois d'entre eux parvenaient à la réponse exacte. L'explication relevait donc effectivement de l'enseignement de la proportionnalité et de la nature du contrat didactique établi à son propos : la donnée de trois nombres et la recherche d'un quatrième engagent, pour ces élèves, une modélisation par la proportionnalité. Ce point était confirmé par une étude portant sur des nombres à trouver dans des cases vides d'un tableau, qui n'est pas « de proportionnalité » car il est modélisable par une suite arithmétique, mais pour lequel des élèves, du CM2 aux terminales A (littéraire) et D (sciences expérimentales), évoquaient la proportionnalité.
Nous n'irons pas plus loin dans l'étude de l'instauration du contrat didactique sur la proportionnalité. Nous nous limitons à souligner que ces résultats ouvraient la voie à l'étude de la mémoire des sujets d'une institution. En effet, l'idée pointait déjà que c'était l'institution qui influait sur l'expression de la mémoire de ses sujets, qu'il y avait un jeu dialectique entre les personnes et les institutions auxquelles elle sont assujetties, à propos des manifestations mémorielles que l'on a trop volontiers tendance à attribuer aux seules personnes. Cette idée s'appuyait sur trois observations, assez curieuses, et corrélées au phénomène observé.
Tout d'abord, le type de problème qui avait permis de démarrer l'étude est traditionnellement présenté, dans les manuels scolaires en usage dans les classes de Collège, comme étant une application du théorème de Thalès : il fait donc officiellement appel, du point de vue de l'institution des classes du secondaire, aux souvenirs relatifs à l'enseignement du théorème de Thalès. Or, voilà que des élèves qui ne le connaissent pas parviennent à le résoudre ! C'est donc que ces élèves mobilisent d'autres types de souvenir. Mais alors, puisque l'institution prétend que ce type de problème est associé au théorème de Thalès, et que les élèves ne le résolvent qu'après son enseignement, les élèves, après enseignement, oublieraient-ils réellement ou feindraient-ils d'oublier, par une sorte de fiction institutionnelle, les connaissances anciennes qui leur permettaient de le traiter avant enseignement ? En tout état de cause, c'est un important travail de réorganisation des souvenirs que l'on percevait et qui transparaissait derrière l'enseignement du théorème de Thalès.
Un deuxième point était lui-aussi assez troublant et confirmait les tours et détours de mémoire que la situation laissait supposer. Il se rapportait au type d'enseignement proposé, à travers les « activités » d'un des manuels de Collège les plus utilisés pour le programme de troisième de cette période : l'ouvrage de la collection Pythagore. Celui-ci inaugurait le chapitre consacré à la « Propriété de Thalès » par une activité intitulée « L'île mystérieuse », typique de la technique d'ostension déguisée en vogue dans l'enseignement au Collège. Il s'agissait d'étudier un texte, extrait précisément de l'ouvrage de J. Verne *L'île mystérieuse*, dans lequel un ingénieur montre comment il parvient à mesurer la hauteur d'une muraille, à l'aide d'une perche qu'il ajuste pour que son sommet soit aligné avec le sommet de la muraille et son œil. Dans le manuel, et suivant le principe qui veut que l'élève soit actif, un schéma, que les élèves doivent compléter en reportant les longueurs, illustre la situation. Puis, toujours selon le

procédé d'ostension déguisée par lequel, *in fine*, on attribuera le résultat à l'élève, les élèves doivent retranscrire, « avec des notations plus modernes, la démonstration donnée par Jules Verne : Il établit donc la proportion suivante :

$$15:500 :: 10:x$$

$$500\times10=5000$$

$$\frac{5000}{15} = 333{,}33 \text{ »}$$

Enfin, la troisième et dernière question de cette activité demande « la hauteur de la muraille en mètre (un pied vaut 30cm) », le texte de J. Verne ignorant manifestement le système métrique. Ainsi, pour enseigner le théorème de Thalès, cet ouvrage s'appuie sur la connaissance qu'ont les élèves de la résolution par la proportionnalité de ce problème, qui est du même type que celui de la II^{e} enquête internationale sur l'enseignement des mathématiques. Cette connaissance apparaît comme un « allant de soi » sur lequel l'enseignant peut s'appuyer. On est donc face à la situation paradoxale suivante : les rédacteurs de ce manuel savent qu'ils peuvent compter sur une connaissance des élèves pour pouvoir enseigner le théorème de Thalès, présenté comme nouveau, ainsi que ses conséquences, au nombre desquelles se trouve cette connaissance ancienne elle-même, mais présentée comme servant à résoudre un problème nouveau. Dans ce cercle vicieux, on a le sentiment qu'élève et enseignant jouent une sorte de pocker-menteur, où l'un et l'autre doivent faire croire à l'autre et l'un qu'ils ne savent pas ce que l'un et l'autre savent… Ainsi le professeur prestidigitateur peut, dans la même leçon, mettre en scène une certaine connaissance, la faire disparaître, comptant peut-être sur l'oubli des élèves, pour la faire ressurgir par la suite, enrobée de nouveaux atours, attendant peut-être en retour l'émerveillement du public élève devant la découverte d'un nouveau monde inconnu ! La découverte d'un tel tour de passe-passe aurait pu relever de l'épiphénomène local, conséquence de l'imagination didactique débridée des rédacteurs du manuel, et indigne qu'on y prête davantage d'intérêt, si simultanément nous n'avions eu connaissance d'une cassette vidéo d'une séquence d'enseignement du théorème de Thalès commanditée par l'INRP en 1992-1993. Le même scénario s'y jouait, mais cette fois-ci avec de véritables acteurs. Le professeur mettait en scène l'épisode fondateur, le rôle principal n'étant plus tenu par un ingénieur explorant une île mystérieuse, mais par Thalès lui-même mesurant, grâce aux rayons parallèles du soleil, la hauteur de la pyramide de Kheops. On peut alors voir, dans le déroulement de la séance, que la proportionnalité est tout de suite convoquée, notamment par les élèves, et qu'elle constitue la connaissance sur laquelle professeur et élèves vont se rabattre, oubliant même la condition portant sur le parallélisme des droites !

Un troisième point, et non des moindres, vient de l'institution commanditaire de l'enquête. Voilà un résultat, statistiquement établi, qui indique clairement que les élèves connaissent par avance la résolution d'un problème qu'ils sont supposés ignorer, et pour lequel un enseignement est organisé, et qui « oublie » de le porter à la connaissance des premiers intéressés, rédacteurs de programme, enseignants, etc. ! Il aura fallu le souvenir personnel de deux enquêteurs de cette époque, pour que soit exhumé, plus de dix ans après, ce résultat… qui ne figure même pas dans la publication officielle des résultats de l'enquête !

3. 2. 2. De nouvelles observations

Les observations du DEA en appelaient de nouvelles qui ne furent menées qu'en fin d'année scolaire 1994-1995, bonne volonté des professeurs bénévoles oblige ! La période permettait d'être sûr que les élèves avaient effectivement étudié le théorème de Thalès dans les classes de troisième testées mais, en contrepartie, l'effectif d'élèves ayant passé les problèmes est relativement faible : 19 élèves dans une classe et 7 seulement dans l'autre, une troisième faible, à effectif allégé, ayant sciemment été constituée ainsi dans l'établissement. Les problèmes testés étaient au nombre de trois : le problème de l'item, formulé dans les mêmes termes pour le premier, pour le deuxième le même problème, mais avec des arbres parallèles non verticaux, enfin un problème « aberrant » dans lequel les arbres ne sont pas parallèles. Le texte de l'énoncé, repris *in extenso* de l'item de la II^{e} enquête internationale, était accompagné, comme cela avait été le cas lors des passations précédentes, de la question suivante : « Vous êtes-vous servi de connaissances mathématiques étudiées cette année ? Avant ? Jamais ? Expliquez. » On trouvera en annexe ces trois problèmes et les justifications relatives à leurs constitutions.
La consigne de passation était de partager la classe en tiers équilibrés en élèves bons, moyens et faibles, et de faire passer un des trois problèmes dans chaque tiers ; cette consigne a été modifiée dans la classe à faible effectif, où tous les élèves étaient qualifiés de faibles, et pour laquelle chacun des 7 élèves a passé les 3 problèmes. Dans la classe de 19 élèves, 5 élèves ont passé le premier problème, 7 élèves ont passé le second et 7 le problème « aberrant » ; le professeur a indiqué le niveau de chaque élève sur les feuilles après les avoir ramassées.

Dans la première classe, de 19 élèves, les résultats sont les suivants :
- pour le premier problème : les 5 élèves ont trouvé la bonne réponse, 10m, en utilisant le théorème de Thalès que tous nomment. Une bonne élève, après avoir résolu le problème avec le théorème de Thalès, propose une variante juste pour laquelle elle utilise simultanément les théorèmes de Pythagore et de Thalès. À la question concernant le niveau où les connaissances utilisées ont été enseignées, les réponses sont les suivantes : « Je me suis servi des connaissances apprise cette année » ; « Je me suis servie de Thalès, étudié cette année. J'aurais pu aussi appliquer le théorème de Pythagore d'une manière plus complexe », suit alors la deuxième démonstration que nous évoquions précédemment ; « Je me suis servi de connaissances mathématiques étudiées cette année comme Thalès » ; « Oui, je me suis servie de connaissances mathématiques étudiées cette année car le théorème de Thalès a été étudié cette année et pas avant » ; « Je me suis servie de connaissances mathématiques étudiées cette année ».
- pour le deuxième problème : les 7 élèves ont trouvé la bonne réponse, 10m, en utilisant le théorème de Thalès nommé par 6 d'entre eux. La seule élève, faible, qui ne le nomme pas, écrit, après avoir désigné par des lettres les points remarquables de la figure : « on a [ED]//[BC] $\frac{DE}{BC} = \frac{AC}{AE}$ »,

ce qui correspond à une écriture fausse du deuxième rapport. Mais une nouvelle inversion d'écriture dans la détermination de la quatrième proportionnelle compense l'erreur initiale et la conduit à la réponse convenable. Elle écrit « Je me suis servie de certaines de mes connaissances de $4^{ème}$ et de $3^{ème}$ ». Les autres réponses sont les suivantes : « Je me suis servis des connaissances étudiées cette année. Thalès était au programme de $3^{ème}$, nous ne l'avons pas étudié avant. » ; « Oui, le théorème de Thalès », « Oui, j'ai étudié "Thalès" » ; « Je me suis servi de mes connaissances mathématiques étudiées cette année : le Théorème de Thallès » ; « J'ai utilisé mes connaissances de l'année dernière, concernant le théorème de Thalèse » ; « Cette année ».
- pour le troisième problème, que nous avons ici qualifié « d'aberrant », sur les 7 élèves à qui il est distribué, une seule élève, qualifiée de moyenne par le professeur, rend la feuille, les 6 autres déclarant ne pas savoir le faire. Cette élève écrit « IMPOSSIBLE » à la place réservée à la réponse concernant la détermination de la hauteur de l'arbre. À la question relative au niveau des connaissances mobilisées, elle répond : « Non, on ne peut pas faire ce problème. On pourrait le résoudre avec le théorème de Thalès si les 2 arbres étaient parallèles ».

Dans la deuxième classe de 7 élèves faibles, et comme signalé précédemment, tous les élèves ont passé les 3 problèmes ; il semble par ailleurs qu'ils aient été traités par les élèves dans l'ordre que nous avons adopté pour les énumérer. Nous donnons donc, dans un premier temps, le travail réalisé par chaque élève pour l'ensemble de trois problèmes :
- l'élève1 mentionne, pour le premier problème, les théorèmes de Thalès et de Pythagore : l'application du théorème de Thalès lui permet d'écrire correctement la proportion $\frac{15}{3}=\frac{x}{2}$, mais il ne va pas plus loin dans son calcul ; le théorème de Pythagore est appliqué correctement mais ne permet pas de conclure. Il note : « Je me suis servi des connaissances de Thalès mais ne les ayant jamais aprise je n'est pas su donc j'ai essayé les connaissance de pythagore ». Dans le deuxième problème, où les arbres ne sont pas perpendiculaires au sol, il écrit le théorème de Thalès, parvient à la proportion

$$\frac{15}{3}=\frac{x}{2}$$

et, contrairement au premier problème, réussit à en tirer x=5×2=10. Il note : « Je me suis servis des connaissance aprise avec mon frère cette année ». Il ne rend pas la feuille correspondant au problème « aberrant ».
- l'élève2 mentionne, dans le premier problème, les théorèmes direct et réciproque de Thalès, ainsi que le théorème de Pythagore. Il écrit correctement les rapports des longueurs et parvient à trouver, par la méthode des « produits en croix », la bonne réponse. Il note, en réponse à la question sur les connaissances utilisées : « un petit peu de cette année mais surtout de l'année dernière parce que nous avons étudié thalèce et pythagore pendant la moitier de l'année. » Pour le deuxième problème, il répond sommairement : « l'arbre fait toujours 10m qu'il soit penché ou droit car les longueurs étant toujours les mêmes. » Enfin, il ne traite pas le

problème « aberrant », mais il rend cependant la feuille.

- l'élève3 désigne par des lettres les points remarquables de la figure dans le premier problème, mais B et D nomment le même point. Il écrit « théorème de Thalès » et une égalité fausse de trois rapports de longueurs. Il ne donne aucune réponse numérique. À la question sur les connaissances, il répond : « Oui. Avant. C'est le théorème de Thalès ». La même tentative infructueuse le conduit à écrire une égalité fausse de deux rapports après avoir écrit : « On applique le théorème de Thalès » dans le deuxième problème ; il mentionne aussi le théorème de Pythagore, mais écrit une égalité dans laquelle on lit un cosinus. Aucune réponse n'est donnée à la question sur les connaissances et la feuille du troisième problème n'est pas rendue.
- l'élève4 dessine à l'échelle 1/100 la figure correspondant au premier problème. Il mesure la longueur correspondant à la hauteur demandée et note en face d'elle 9,9. Il ne répond pas à la question portant sur le moment où les connaissances utilisées ont été enseignées. Pour le deuxième problème, il reproduit exactement la même figure que pour le premier, ne tenant pas compte que les arbres ne sont plus perpendiculaires au sol. Il mesure la longueur cherchée et note 9,6 ; ici non plus, il ne répond pas à la question portant sur le moment où les connaissances utilisées ont été enseignées. La même figure est encore utilisée pour le problème « aberrant », pour lequel il donne la réponse 10m. À la question portant sur le moment où les connaissances ont été enseignées, il répond : « jamais. Car je l'ai fait par deduction grace a mon intelligence ».
- l'élève5 utilise la même technique que l'élève précédent pour les deux premiers problèmes, mais il gradue deux axes orthogonaux qui sont les supports des côtés d'un triangle rectangle. Pour le premier problème, il mesure 10,9 qu'il arrondit à 11m ; pour le second, où les axes sont encore orthogonaux, il mesure 9,8 et arrondit à 10m. Aux questions relatives au moment où les connaissances ont été enseignées, il ne répond pas pour le premier problème, répond « oui » au second, et enfin, pour le troisième qu'il ne traite pas, il répond « Je ne peux pas car je ne connais pas la formule qui donne ce résultats. »
- l'élève6 tente, pour le premier problème, d'utiliser les relations trigonométriques dans le triangle rectangle, ce qui l'amène à écrire un cosinus égal à 2 ; elle tente alors d'utiliser le théorème de Pythagore. Cela la conduit à écrire AB=$\sqrt{261}$, après avoir conjecturé que la longueur cherchée valait 6 ; cette longueur est par ailleurs notée BC. Elle justifie les connaissances utilisées : « Je me suis servie de la leçon faite cette année sur les cosinus-sinus et tangeante ». Elle traite ensuite le problème « aberrant » en répondant : « il à trouvé comme à l'autre exercice, 6m », puis à la question sur les connaissances utilisées : « Je me suis servit de ma mémoire et je me suis souvenut que l'exercice présédent etait exactement le même avec la même question formulée d'une autre façon. » Le deuxième exercice est enfin abordé. La réponse apportée à la question de la longueur est : « 6m comme les 2 exercices précédant. », tandis que la réponse à la question sur les connaissances est : « Je me suis servie de ma mémoire car les 2 exercices précédant sont exactement les même c'est donc le même résultat. »
- l'élève7 note un grand point d'interrogation au milieu de la feuille du premier exercice après avoir écrit $\frac{AB}{BC}=$. Il écrit : « 15-3=12 12×3=36 il fait 36 métrés » pour le second. Il ne répond pas aux questions sur les connaissances utilisées et ne rend pas le

troisième problème.

3. 2. 3. Analyse des réponses

Nous traitons tout d'abord des résultats obtenus dans la première classe composée de 19 élèves. Ils seront confrontés à ceux obtenus pour le DEA, notamment en ce qui concerne le problème « aberrant » : ces derniers ayant été obtenus auprès d'élèves qui n'avaient pas reçu d'enseignement officiel sur le théorème de Thalès.

Il est assez remarquable que sur les 12 élèves de cette classe ayant passé les deux premiers problèmes, 11 citent explicitement le théorème de Thalès pour leur résolution. Tous trouvent la bonne réponse en utilisant une technique issue de l'application du théorème de Thalès. 11 le nomment explicitement dans la technique de résolution, et non pas seulement dans la question relative aux connaissances utilisées. L'élève qui ne le nomme, ni dans la technique de calcul, ni en réponse à la question portant sur les connaissances utilisées, rédige cependant une formulation qui évoque son application : « [ED]//[BC] $\frac{DE}{BC} = \frac{AC}{AE}$ ».

L'élève qui propose deux techniques de résolution, la première étant la technique « canonique » utilisant le théorème de Thalès, rédige une deuxième démonstration utilisant correctement le théorème de Pythagore qu'elle cite et qui s'applique ici puisque les arbres sont perpendiculaires au sol, ainsi que le théorème de Thalès qu'elle cite encore.

Dans le cas des problèmes passés avant enseignement du théorème de Thalès (on se reporte ici aux résultats de Matheron, 1994, pp. 61-78), les techniques utilisées par les 45 élèves, parmi 64, qui conduisaient à une réponse exacte, se décomposaient de la façon suivante : 22 citent explicitement la proportionnalité, 5 citent le cosinus dans un triangle rectangle (cas des arbres perpendiculaires au sol), 17 ne citent ni la proportionnalité, ni le cosinus, mais utilisent des techniques s'y rapportant, 1 utilise un graphique.

On peut donc, en rapportant les techniques utilisées après enseignement du théorème de Thalès à celles utilisées avant, conclure que l'enseignement du théorème de Thalès condamne, pour les élèves, la mise en œuvre des techniques antérieures relevant de la proportionnalité et enseignées dans les premières classes du Collège (6^e et 5^e), ou celles relevant du cosinus enseigné en 4^e. De plus, le théorème de Thalès, élément technologique, est explicitement cité (par 11 élèves sur 12) pour justifier la technique mise en œuvre, alors qu'avant enseignement, il se trouve environ 40 % des élèves pour ne pas justifier, ne serait-ce qu'en citant l'élément technologique, la technique qu'ils utilisent. Il y a sans doute ici un effet d'adhésion au contrat didactique qui veut qu'à ce niveau, après avoir pratiqué depuis quelques années le raisonnement démonstratif, il soit d'usage de montrer que la situation vérifie les hypothèses d'un théorème et de citer ce théorème, chose encore plus aisée lorsque celui-ci porte le nom emblématique d'un mathématicien.

Un deuxième point est, lui-aussi, assez important. S'il ne se trouve sans doute aucun enseignant pour donner, dans ses classes, un problème « aberrant » tel que celui que nous

avions proposé, il faut cependant souligner qu'avant enseignement, sur 9 élèves à qui le problème avait été donné, 7 donnait la réponse indue, 10m, en utilisant des techniques relevant de la proportionnalité ; 3 d'entre eux la citaient, d'ailleurs, explicitement. Or, sur les 7 élèves de cette classe auxquels est proposé ce problème, 6 ne répondent pas et 1 affirme que, tel que proposé, il s'agit d'un problème impossible. Elle ajoute qu'il serait faisable, grâce au théorème de Thalès, « si les 2 arbres étaient parallèles ».
L'enseignement du théorème de Thalès invalide donc la mise en œuvre de la modélisation par la proportionnalité qui était utilisée auparavant par la majorité des élèves dans une situation où elle ne peut s'appliquer. Les élèves savent désormais reconnaître que son utilisation est erronée.

Les résultats de la passation par les 7 élèves de la classe faible paraissent moins probants si on les rapporte à l'analyse précédente. Cependant, les élèves semblent se répartir en deux catégories : ceux, au nombre de 3, qui font référence au théorème de Thalès de manière explicite et s'engagent dans une technique qui en relève, et les 4 autres qui pour deux d'entre eux utilisent un graphique, pour un autre le théorème de Pythagore et, pour le dernier propose des opérations, sans lien logique visible avec l'énoncé, sur les nombres de l'énoncé.
Pour ces 3 premiers élèves, comme pour les 11 de l'autre classe, l'entrée dans l'un des deux premiers problèmes appelle le souvenir du théorème de Thalès. C'est donc cette couche de la mémoire pratique qui est convoquée, à l'issue de l'enseignement dispensé dans le courant de l'année. Celle qui était relative à la mise en œuvre des techniques antérieurement enseignées sur la proportionnalité n'est plus appelée de manière immédiate. Elle sera mobilisée, ou pas – c'est le cas pour deux de ces trois élèves, dévoilant ainsi l'aspect toujours problématique pour eux des techniques relevant de la proportionnalité - mais dans un second temps, lorsqu'il faudra par exemple « calculer les produits en croix », et ceci toujours postérieurement aux écritures du théorème de Thalès et de la proportion portant sur les longueurs, ces dernières étant souvent écrites à l'aide de lettres que l'élève a pris l'initiative de rajouter à la figure de l'énoncé. Pour ces 3 élèves, comme pour les 7 de l'autre classe qui n'engagent pas le théorème de Thalès dans le cas du problème « aberrant », la connaissance du théorème de Thalès leur « interdit » de commettre l'erreur de leurs aînés qui, ne le connaissant pas encore, utilisaient de manière erronée la proportionnalité ; deux d'entre eux ne rendent pas la feuille et un la rend sans y avoir rien écrit.
Pour les 4 autres élèves, qui apparaissent de manière atypique en regard des 22 autres, l'enseignement du théorème de Thalès ne semble pas s'être traduit par un apprentissage, eu égard à leurs productions sur ces trois problèmes. Mais, une analyse tenant compte des couches de mémoire pratique travaillées, nous permet d'affiner ce que l'on peut mettre derrière le terme d'apprentissage. Tout d'abord, la donnée du problème et de sa figure n'appelle pas une couche qui serait relative au théorème de Thalès, ni au plan de la technique, ni au niveau d'explicitation demandée par la question posée relative aux connaissances utilisées. De ce point de vue, l'enseignement du théorème de Thalès, ne s'est pas traduit par un travail de la mémoire donné de manière évidente à voir à l'observateur de ces productions. Pour deux élèves, la résolution de ce problème est l'occasion de mobiliser des souvenirs relatifs aux échelles. Cependant, ils se différencient l'un de l'autre. Tandis que l'élève4

applique cette technique quelle que soit la position des arbres l'un par rapport à l'autre, et quitte à les « redresser » lorsqu'ils ne sont pas perpendiculaires au sol, l'élève5, quant à lui, n'ose pas utiliser le procédé lorsque les arbres ne sont pas parallèles. Il écrit alors : « je ne peux pas car je ne connais pas la formule qui donne ce résultats ». Est-ce l'effet d'un travail relatif au théorème de Thalès ou portant sur les échelles ? Il est difficile d'aller plus loin dans l'interprétation, compte tenu du faible corpus disponible sur cet élève. Pour l'élève6, la figure (arbres perpendiculaires au sol) et l'énoncé du premier problème ont permis de rappeler des connaissances relatives au triangle rectangle : les relations trigonométriques, qu'elle mentionne en réponse à la question relative aux connaissances utilisées, et le théorème de Pythagore. Mais cette élève ne peut aboutir dans chacune de ses deux tentatives, puis, ayant cru trouver la réponse du premier problème (elle trouve 6m), elle associe cette réponse aux deux autres problèmes qu'elle identifie comme étant du même type. La production de l'élève7, qui écrit une soustraction et une multiplication avec les nombres de l'énoncé, révèle une forme d'adhésion au contrat didactique, proche de *la forme* prise par l'expression de l'effet « âge du capitaine ».

Avant de terminer avec ces analyses de réponses fournies par des élèves de 1995, nous avons voulu les tester de nouveau, sur une élève de l'année 2000, afin de nous rassurer en vérifiant qu'ils résistaient à l'usure du temps… Les programmes ont depuis lors changé : l'enseignement du théorème de Thalès est démarré en 4e depuis la rentrée 1998, même si le nom n'apparaît pas officiellement dans les programmes[113], et seulement dans le cas d'un rapport d'homothétie positif. Il se poursuit en 3e avec l'étude du cas négatif, depuis la rentrée 1999. Les trois problèmes ont été passés en respectant l'ordre par une élève de 3e qui a étudié les cas positif et négatif. La résolution du premier est immédiatement enclenchée de la manière suivante : « On peut utiliser la configuration de Thalès ». Suivent alors l'écriture de la proportion avec les valeurs numériques, le calcul des « produits en croix » et la réponse correcte 10m. La réponse à la question sur les connaissances étudiées et utilisées est la suivante : « Oui, du théorème de Thalès étudié depuis la 4e je crois ». Le deuxième problème n'appelle que ce commentaire : « Même méthode que précédemment si les arbres sont couchés en restant tout les 2 parallèles. Donc 10m ». La réponse à la question sur les connaissances est la suivante : « Cette année ou l'année dernière, pareil que tout à l'heure ». Enfin, pour le problème « aberrant » ne figure qu'un laconique « Je ne sais pas faire ». Le tout n'a duré qu'une dizaine de minutes.

3. 2. 4. Interprétation des résultats à visée théorique

3. 2. 4. 1. Signe, écologie des savoirs transposés, contrat

[113] Cette absence laisse place à tout un espace de liberté pour sa désignation dans la pratique didactique courante. Dans le document d'accompagnement des programmes du cycle central, un terme apparaît en page 7 : l'expression « dans la situation de Thalès pour le triangle ». Un autre, page 10 du même document, mentionne « la propriété de Thalès ».

Deleuze (1964), analysant le rôle des signes dans l'œuvre de Proust, pouvait écrire :

> « Apprendre concerne essentiellement les *signes*. Les signes sont l'objet d'un apprentissage temporel, non pas d'un savoir abstrait. Apprendre, c'est d'abord considérer une matière, un objet, un être comme s'ils émettaient un signe à déchiffrer, à interpréter. Il n'y a pas d'apprenti qui ne soit "l'égyptologue" de quelque chose. On ne devient menuisier qu'en se faisant sensible aux signes du bois, ou médecin, sensible aux signes de la maladie. La vocation est toujours prédestination par rapport à des signes. Tout ce qui nous apprend quelque chose émet des signes, tout acte d'apprendre est une interprétation de signes ou de hiéroglyphes. L'œuvre de Proust est fondée, non pas sur l'exposition de la mémoire, mais sur l'apprentissage des signes. » pp. 10-11.

Reprenant à notre compte l'analyse de Deleuze sur les prémisses de l'apprentissage, c'est du côté des *signes*, et de l'apprentissage de leur *interprétation* par les élèves, inscrite dans la temporalité, qu'il faut rechercher l'explication du phénomène observé. Mais cette explication n'est possible que dans un cadre, celui de la didactique des mathématiques.
Celui-ci, en une première ébauche, peut se laisser décrire à gros traits : un enseignant, un enseigné et un savoir. Or ce modèle ne paraît pas, en première approximation, tout à fait adapté à la situation que l'on souhaite analyser ici. Le premier terme, l'enseignant, n'est pas physiquement présent, quant au troisième, le savoir, il ne semble pas qu'il le soit davantage puisque c'est précisément au deuxième terme, l'enseigné, qui est réputé l'avoir appris, qu'il est demandé de le mettre en œuvre pour produire une réponse : le savoir est présent dans des limbes, ni matérialisé, ni actualisé au départ de la situation. Si la clé du problème paraît être à rechercher du côté d'un seul des trois termes, l'enseigné, c'est cependant grâce à un détour par les deux autres que l'on va tenter de l'atteindre.

La théorie anthropologique du didactique, dès ses premiers travaux de 1980, a mis en évidence l'importance du processus par lequel un savoir, désigné comme étant à enseigner, va devoir subir des transformations, plus précisément des transpositions, pour pouvoir vivre dans l'institution qui a pour mission de l'enseigner. Artaud (1997) rappelle les trois types de conditions nécessaires, identifiés par la théorie de la transposition didactique, pour qu'un savoir mathématique ait des chances d'exister dans une institution didactique :

> « Tout d'abord, les mathématiques enseignées doivent être compatibles avec leur environnement social, en particulier avec la sphère de production des mathématiques, d'une part, avec l'institution des "parents", d'autre part. Ensuite, les mathématiques enseignées doivent pouvoir être présentées séquentiellement, les notions mathématiques se succédant sur l'axe temporel linéaire du temps didactique (chronogénèse). Enfin, elles doivent définir deux rapports institutionnels, l'un en position de professeur, l'autre en position d'élève (topogénèse). »

À l'intérieur de l'institution dans laquelle se trouve le savoir transposé, on peut alors identifier son ou ses « habitats » ainsi que sa « niche »[114], ce qui ouvre la voie à une étude de l'écologie des objets mathématiques dans une institution donnée. Ainsi va-t-on pouvoir, en première analyse sur l'objet « théorème de Thalès » dans les classes actuelles de Collège, localiser ses

---

[114] « Habitat » et « niche » sont définis par Chevallard (1989) : « Plus précisément l'analyse de *l'écologie institutionnelle du savoir S* conduit à établir, étant donné un objet O^s, ce que sont ses *habitats*, soit les "endroits" où on le trouve, et les objets $O^{s'}$, avec lesquels il y entre en association ; et ce qu'est, en chacun de ses habitats, sa *niche écologique*, soit ce que sont l'ensemble des *interrelations* que l'objet O^s considéré y entretient avec les objets associés $O^{s'}$, ainsi que la *structure* et les *fonctions* des ces interrelations. »

habitats à l'intérieur de la géométrie de 4e et 3e. Une investigation plus serrée montrerait qu'en 4e, si l'on suit à la lettre le document d'accompagnement du programme, il ne vit qu'à proximité immédiate d'un triangle[115]. On ne le trouve pas accompagné d'axes coupés par plus de deux sécantes, par exemple, encore moins associé à des projections (il énoncerait alors la conservation de l'abscisse). Cela se fit, pour d'autres transpositions, en d'autres institutions, pour d'autres temps et d'autres lieux où son habitat était différent[116]. Ces mêmes documents d'accompagnement de 1997 permettent d'ébaucher une exploration de sa niche, c'est-à-dire de ce qu'il fait en son habitat, d'envisager quel est son métier : il produit des coefficients de proportionnalité à appliquer, et définit le cosinus[117].
Par ailleurs, à l'intérieur de l'institution didactique, se noue une relation, en grande partie implicite, qui lie les deux autre pôles du système, l'enseignant et l'enseigné, en fixant les places et les gestes attendus d'eux à l'endroit du troisième, le savoir. Cette relation porte le nom de contrat didactique[118].

C'est, par l'intermédiaire de cette double entrée, par le savoir transposé et son écologie d'une part, et par l'assujettissement des élèves au contrat didactique d'autre part, que nous pouvons envisager l'interprétation, qui nous occupe. Les résultats de la IIe enquête internationale obtenus sur l'item, et surtout leur fluctuation, selon les pays, mais aussi entre pré-test et post-test à l'intérieur des pays, montrent des écarts importants. À moins de verser dans une sorte de racisme didactique qui amènerait à déclarer que les belges flamands (64 % de bonnes réponses en pré test) sont ontologiquement beaucoup plus doués que les américains (40 % de bonnes réponses seulement) pour apprendre à connaître les effets d'une similitude plane, on voit mal, en effet, comment expliquer ces différences autrement que par des variations, sur le savoir enseigné et son organisation, et sur les attentes des uns et des autres à propos de cet enseignement et cet apprentissage ; ce dernier point renvoyant aussi aux attentes sociales et à la place qu'accorde la société à son École, dans chaque pays concerné.

Au départ, et au cours de l'apprentissage, comme le note Deleuze (1964), il y a le signe et son interprétation : « tout acte d'apprendre est une interprétation de signes ou de hiéroglyphes ». Pour cet item, comme pour les problèmes qui le reprennent en « durcissant » l'interprétation du signe, puisque n'y figure pas la possibilité de choisir la bonne réponse à l'intérieur d'une liste de cinq réponses proposées, ce signe peut se laisser décomposer selon de multiples dimensions. Nous pouvons en identifier cependant deux, plus importantes que les autres : la figure d'une certaine réalité, et un texte suggérant qu'il existe un procédé pour obtenir la

---

[115] « Dans la situation de Thalès pour le triangle, tous les résultats de proportionnalité sont présentés à partir de la situation obtenue en faisant couper deux sécantes par deux parallèles ; le point d'appui pris sur la situation d'un triangle avec les milieux de ses côtés, en autorisant une justification partielle, en facilite l'introduction. » mentionnent les commentaires.
[116] Pour une étude de ces cas, voir Matheron (1993)
[117] Les commentaires précisent, respectivement en pages 10 et 7 : « En classe de 4e, de tels coefficients [de proportionnalité] sont appliqués dans l'étude de certains problèmes : propriété de Thalès en géométrie, […] », et « De tels résultats [il s'agit des résultats mentionnés en note 25] permettent de définir le cosinus d'un angle aigu ».
[118] L'étude du concept de contrat didactique est notamment menée, de manière approfondie, par Brousseau (1986a) et Chevallard (1988b).

hauteur cherchée. Dans l'énoncé des problèmes que nous avons fait passer (rappelons qu'ils se trouvent en annexe), l'absence d'un choix parmi cinq réponses possibles données renforce l'attente de la production du procédé, et signifie que l'on ne se contentera pas d'une réponse non justifiée. Cet aspect est encore renforcé par la question relative aux connaissances utilisées. Cette interprétation renvoie donc au contrat didactique qui fixe les attentes à propos du traitement du problème. Sans contrat, pas d'interprétation du signe, ou même encore, pas de signe, si tant est que le signe ne vaut, précisément, que par ce qu'il « fait signe », donne du sens. Le signe est donc « objet d'apprentissage temporel », soumis à la temporalité des groupes sociaux grâce auxquels l'apprentissage opère.

Quelle est donc cette interprétation du signe, donc ce bloc constitué du signe et du contrat didactique, avant l'étude du théorème de Thalès ? Il faut ici distinguer deux types de temporalité : celui des institutions et celui des personnes. Pour les institutions, l'enquête menée montre une sorte de rupture par rapport au parcours temporel standard suivant la chronologie des institutions didactiques.

Comme mentionné dans le DEA, des instituteurs nous avaient indiqué la présence de ce problème de hauteur d'arbre dans certains manuels du primaire, pour illustrer la proportionnalité. Mercier (1998b) mentionne : « l'enquête montre que la figure ci-dessous est présente (sous une forme plus ou moins raffinée quant à la ligne de visée des sommets des deux arbres, statues ou piquets) dans des ouvrages de l'enseignement primaire, comme exemple d'usage de la proportionnalité ». Il indique notamment que l'exemple se trouve dans l'ouvrage de M.-A. Johsua & C. Maurin (1993) au chapitre *Proportionnalité*. Puis, on le trouve comme application du théorème de Thalès dans divers manuels de 3^{e} édités en 1993. C'est le cas sous forme d'activité dirigée dans l'ouvrage Transmath édité chez Nathan, pour lequel l'objectif est de « savoir utiliser le théorème de Thalès », et dans le manuel Pythagore de Hatier qui note, dans sa rubrique « entre nous » : « comprendre qu'il n'y a rien de plus pratique qu'une bonne théorie » et « savoir abstraire à partir d'une situation concrète pour retrouver un modèle mathématique connu et efficace ». C'est encore le cas, mais sous forme d'exercice, à la suite du chapitre sur le théorème de Thalès, dans le manuel de l'IREM de Strasbourg, ainsi que dans les manuels édités par Belin et par Hachette.
On ne sait donc pas si la connaissance de la résolution de ce problème est effectivement attendue des élèves par l'institution « École primaire » ; peut-être l'a-t-elle été dans certaines classes du primaire fréquentées par des élèves ayant passé l'item de l'enquête internationale ou les problèmes qui leur ont été soumis lors de notre propre enquête, il est difficile de l'affirmer avec certitude. On peut faire l'hypothèse qu'elle l'est, cela n'influera pas sur la suite de l'analyse. Par contre, pour l'institution des classes de 3^{e} de 1993, et désormais celle de 4^{e}[119] depuis 1998, il est considéré comme exercice ou activité d'application du théorème de Thalès, donc est à situer à la charge de l'élève, éventuellement guidé par le professeur et d'autres élèves dans une activité dirigée, mais seulement *après* son enseignement. Ces modalités

[119] Il apparaît, par exemple, dans des manuels de 1998 : dans le manuel Pythagore comme activité dont l'objectif est « appliquer la propriété de Thalès à un vieux problème », comme exercice dans le manuel de la collection Triangle, dans une variante avec l'ombre de l'arbre comme exercice dans le manuel Cinq sur cinq.

différentes du contrat institutionnel, établies à partir de la programmabilité du savoir transposé le long du fil du temps didactique, sont incluses dans une temporalité institutionnelle.

Pour les personnes, ici des élèves soumis à des contrats didactiques, qui passent les problèmes dans des salles de classe où ils sont surveillés par leur professeur de mathématiques, les choses en vont tout autrement. Un problème pour un élève n'a pas du tout le même sens que pour un mathématicien qui *se donne* un problème ou un programme de recherche. Dans ce second cas, il n'est pas dit que le problème ait une solution, ne serait-ce qu'à l'échelle de la vie humaine. Pour un élève par contre, la situation est autre puisque le problème lui *a été donné*. Il en résulte, par clause implicite du contrat didactique, que tout problème a, obligatoirement, une solution et qu'elle lui sera donnée ultérieurement par le professeur ; ceci indépendamment de l'aboutissement fructueux ou non de la recherche menée par l'élève. De plus, une autre clause veut que cette solution lui soit accessible à partir du savoir qui a été enseigné ; à charge pour l'élève de l'avoir appris et de parvenir à l'utiliser judicieusement pour construire la solution du problème[120]. Pour l'élève, l'interprétation du signe prend un tout autre sens : elle revient à rechercher, dans l'écologie du savoir *déjà* appris - donc enseigné - le chemin qui permettra de trouver la procédure menant à la solution. Se dessine alors la voie empruntée par ce que nous avons nommé la mémoire pratique, et une possible formalisation dans ce cas précis.

Le travail de la mémoire pratique se fait à partir d'une interprétation du signe qui peut se résumer en une dialectique entre les deux termes du couple (adhésion au contrat didactique ; écologie du savoir transposé). L'écologie du savoir transposé définit les chemins qui conduiraient à certains objets de savoir, ou encore un ensemble de chemins « empruntables » à l'intérieur de cet écosystème. Il y a ainsi *a priori*, à l'intérieur d'une institution, et étant donné une transposition didactique et les contrats didactiques qui lui sont associés, un univers des cas possibles d'autorisation et de fermeture de ces chemins, donc un ensemble de structures d'interaction d'objets de savoir possibles. L'assujettissement des élèves à un système didactique, avec ses clauses particulières relatives au contrat, s'analyse alors comme un univers des cas probables. Le travail antérieur des couches de mémoire pratique va, au moment de l'engagement de l'élève dans la recherche du problème, donc au moment de l'interprétation des signes, si tant est que des signes puissent être identifiés, permettre ou interdire l'engagement dans ces chemins, permettant d'accéder ou non à tel savoir.

Ce schéma permet d'expliquer les résultats obtenus avant et après l'étude du théorème de Thalès.
Avant l'étude, il est certain que les élèves ont déjà rencontré des *situations* graphiques (agrandissement de figures, changement d'échelles, etc.), et numériques (recherche d'un

[120] Ces clauses sont énoncées par Chevallard (1988b) : « Le contrat comporte en effet une clause "régionale", valable pour tous les problèmes proposables dans le cadre didactique-scolaire, aux termes de laquelle : 1. un problème proposable (légitimement) possède une réponse et une seule (acceptable au sens du contrat) ; 2. pour parvenir à cette réponse a) toutes les données proposées doivent être utilisées, b) aucune autre indication n'est nécessaire, et c) l'utilisation pertinente des données fournies se fait selon un schème mettant en jeu des procédures familières, au stade considéré (opérations arithmétiques, anciennement règle de trois, méthode de fausse position, etc.), règles qu'il s'agit alors de mobiliser et de combiner de manière adéquate – ce qui constitue d'ailleurs le véritable champ d'action de l'élève, sa marge de manœuvre et d'incertitude. » pp. 12-13.

quatrième nombre quand on en connaît déjà trois) qui renvoient à la manipulation de complexes d'ostensifs liés à la situation « tableau de proportionnalité », elle-même contenue dans le non-ostensif « proportionnalité ». Poser un problème au sein d'une institution didactique revient, dans tous les cas, et comme il a été dit, à indiquer aux élèves qu'il existe, du point de vue du savoir mathématique, une organisation dont ils doivent retrouver la trace, et qui lie le problème à la mise en œuvre d'ostensifs pertinents pour ce problème, et qui leur a été enseignée. C'est donc un signe à interpréter et qui va mobiliser, pour les élèves, certaines organisations d'ostensifs. De ce point de vue, tous, parmi les 83 élèves testés dans le travail de 1994, donnent une réponse résultant de l'activation, plus ou moins pertinente, d'un complexe d'ostensifs, qu'ils soient scripturaux ou graphiques : aucun ne rend feuille blanche. L'étude des réponses données en 1994 aux problèmes « aberrants » (arbres non parallèles), passés par 9 élèves, et aux problèmes surchargés d'information chiffrée (arbres parallèles mais 5 données portant sur des longueurs et 1 sur un angle), passés par 10 élèves, avait permis de conclure que c'étaient les données chiffrées qui semblaient faire signe, et non la figure : 7 élèves sur 9 avaient trouvé la réponse fausse 10m en utilisant une technique relative à la proportionnalité dans le problème « aberrant », et 7 élèves sur 10 ne parvenaient pas à la réponse exacte 10m dans le problème « surchargé ».

Autrement dit, face à la même situation graphique qui indique ostensiblement une similitude, ce n'est, avant étude du théorème de Thalès, que la donnée ostensive de 3 nombres et la demande de calcul d'un quatrième qui fait signe. L'item de la II^{e} enquête internationale ne testait donc pas, dans le cas français, les connaissances des élèves sur les similitudes planes, contrairement à ce qu'indiquait officiellement sa rubrique « contenu ». Par une extension osée de ce résultat, on pourrait presque conclure que la donnée ou pas de la figure n'influera pas sur les réponses des élèves…

Ce n'est que d'un point de vue institutionnel que les réponses exactes des élèves à l'item, et aux problèmes passés en 1994, pouvaient constituer d'autres signes - interprétables, quant à eux, à partir de l'écologie des objets enseignés et du contrat institutionnel propres à l'enseignement secondaire – attestant un apprentissage silencieux, souterrain dans le champ du théorème de Thalès ou des similitudes.

Après l'étude du théorème de Thalès, un résultat remarquable en terme d'apprentissage est constitué du fait que les élèves refusent, soit en ne rendant pas la feuille, soit en la rendant vierge, soit en mentionnant que c'est impossible ou qu'on ne sait pas faire, de s'engager dans une technique relative à la proportionnalité, lorsque la situation ne le permet pas. C'est le cas pour les 7 élèves de 3^{e} testés en 1995 dans la première classe de 19, pour les 3 élèves parmi les 7 de la classe faible, testés à la même époque et qui évoquent le théorème de Thalès dans les problèmes « possibles », pour l'élève de 3^{e} testée en 2000. On peut donc en déduire que l'écologie des savoirs étudiés, et le contrat didactique, ont été perturbés par l'étude du théorème de Thalès. Cette étude a *mis en garde* des élèves sur les différentes configurations liant droites parallèles et proportionnalité. Sans doute, à travers cette étude, ont-ils été engagés dans un ensemble de gestes consistant à repérer, soit dans l'énoncé écrit, soit dans la construction géométrique donnée, le parallélisme des droites. Ce parallélisme constitue alors le signe qui peut être interprété comme demande de la mise en œuvre d'autres gestes,

commandés par l'énoncé du théorème de Thalès[121], en tant que non-ostensif à fonction technologique.
Le signe graphique est interprété comme autorisant l'énoncé du théorème de Thalès qui enclenche, en retour, la mise en œuvre de la technique consistant à écrire la proportion. L'interprétation du signe est une conséquence de l'étude ; la lecture de la tâche demandée, et donc de la situation donnée, permet la discrimination. Me demande-t-on un calcul de longueur en me disant qu'il y a des droites parallèles ? Me demande-t-on si des droites sont ou non parallèles, alors m'a-t-on donné assez de nombres pour le savoir ? etc.

3. 2. 4. 2. Conclusion

Ainsi, l'étude du théorème de Thalès consiste, en règle générale, en la production d'une typologie des couples (tâche-situation ; organisation d'ostensifs) : un univers des possibles. Poser un problème dans lequel il y a non-parallélisme des droites (les arbres), et demander le calcul d'une longueur, constitue un couple (tâche-situation ; organisation) qu'il faut rechercher ailleurs que dans l'univers des possibles du théorème de Thalès. Il en résulte alors les non-réponses des élèves, la stratégie consistant à rechercher dans une autre direction que le théorème de Thalès apparaissant trop coûteuse, ou n'ayant pu aboutir.
Cette analyse permet d'envisager sous un jour nouveau, nous semble-t-il, la question de « l'épaisseur » de l'activité et des concepts mathématiques. La définition d'expressions telles que « comprendre », « donner du sens » pour un individu, résulte ici de son assujettissement à une institution didactique qui va définir, en dernière instance, ce qui relève, pour la personne comme pour l'institution, du domaine du possible ou pas.
Il n'y a donc pas « d'oubli » de connaissances qu'auraient en propre possédées les élèves, avant d'avoir été engagés dans l'étude du théorème de Thalès, mais il y a seulement certaines associations, possibles à un moment donné, qui ne peuvent plus être réalisées, actualisées, lors d'un autre moment, après son étude. Parler d'oubli serait en effet supposer que certaines connaissances étaient déjà présentes « dans la tête » des élèves, ce qui n'est pas le cas. L'engagement des élèves dans un problème mobilise leur mémoire pratique constituée des associations (tâche-situation ; ensemble d'ostensifs).

L'étude de la mémoire pratique peut se mener selon deux directions corrélées, et pour lesquelles on retrouve la problématique classique des études sur la mémoire : celle du rappel, du souvenir, et celle de l'oubli. L'un et l'autre sont à référer non au sujet épistémique, mais à la personne dans ses divers assujettissements, antérieurs ou présents, relatifs aux institutions d'étude des savoirs. C'est surdéterminé par des effets de contrat, contrat nécessaire pour que l'engagement et les règles de développement de l'activité mathématique perdurent, qu'il faut rechercher ses phénomènes de rappel et d'oubli.
L'étude menée dans ce chapitre sur les problèmes relatifs au théorème de Thalès a permis, avant tout, et de manière inattendue, de montrer des phénomènes de rappel, qui se manifestent

[121] Il est remarquable que tous le citent, très souvent accompagné d'« une ritournelle » telle que : « comme les droites sont parallèles, alors d'après le théorème de Thalès… ».

de façon différenciée selon les types de contrats liés aux organisations mathématiques sur lesquelles ils portent. Il s'agit maintenant de décrire des phénomènes qu'on pourrait raccrocher à l'oubli, et de déterminer le type d'écologie du savoir transposé et le type de contrat qui permettent l'interprétation des signes qui, *in fine*, et selon leurs assujettissements, va provoquer des oublis pour les personnes.

3. 2. 5. Interprétation des résultats à visée méthodologique

La méthode utilisée dans ce chapitre indique une direction possible pour ce type d'étude. Il n'aura pas échappé que la pratique consistant à faire travailler par des élèves des problèmes relevant, aux yeux de l'institution, de savoirs non encore appris, paraît en décalage par rapport à la norme courante ; un peu à la manière des problèmes « absurdes » qui ont donné naissance à l'effet « âge du capitaine ». Il s'agit pourtant d'intégrer fructueusement l'idée selon laquelle les temps institutionnels et les temps personnels sont en principe décalés ; la personne, ici l'élève, courant toujours après le temps de l'institution, le rattrapant parfois, ne l'anticipant qu'exceptionnellement. C'est ce décalage qui peut constituer une entrée pour l'étude de la mémoire pratique. En effet, son expression n'est finalement, sauf cas rarissime de créativité mathématique, que l'actualisation, ici et maintenant, d'assujettissements plus ou moins heureux à des institutions passées.
Ces problèmes, dans les conditions de leur passation, ont ainsi constitué une institution inédite, créée pour la recherche didactique, et non pour l'enseignement, à laquelle sont venus s'assujettir les élèves testés[122]. C'est tout naturellement le respect du contrat lié à l'étude qui est apparu. Les élèves ont coutume de s'y assujettir, par exemple, au moment de l'évaluation. L'une des clauses du contrat stipule qu'un problème posé à l'élève doit être considéré, par les partenaires de la relation didactique, comme étant « faisable », donc n'engageant que des savoirs qui ont été préalablement étudiés. Le respect de cette clause par les élèves, dans une institution où cela n'a pas lieu d'être, permet d'établir un décalage, et d'objectiver, afin de l'étudier, ce qui serait demeuré invisible, transparent, non exprimé, dans une autre institution, parce que relevant des « pensées interdites » de cette institution. Dans le cas étudié dans ce chapitre, nous avons ainsi pu avoir accès à la prise d'indices par les élèves parmi les signes du texte de l'énoncé d'un problème, puisque la reconnaissance de ces indices commande l'activation de certaines couches de leur mémoire pratique. C'est précisément parce que ces indices engagent les élèves sur une « mauvaise voie », que le fait de constater que des élèves se trouvent sur cette voie erronée permet de révéler au chercheur la prise d'indices. Dans les situations « normales » soumises au contrat didactique, elle demeure transparente, invisible,

[122] C'est ce que note, dans une double critique, Bourdieu (1993) : « L'opposition traditionnelle entre les méthodes dites quantitatives, comme l'enquête par questionnaire, et les méthodes dites qualitatives comme l'entretien, masque qu'elles ont en commun *de reposer sur des interactions sociales qui s'accomplissent sous la contrainte de structures sociales* (souligné par nous). Les défenseurs des deux catégories de méthode ont en commun d'ignorer ces structures, ainsi d'ailleurs que les ethnométhodologues, que leur vision subjectiviste du monde social porte à ignorer l'effet que les structures objectives exercent non seulement sur les interactions (entre des médecins et des infirmières par exemple) qu'ils enregistrent et analysent, mais *aussi sur leur interaction avec les personnes soumises à l'observation ou à l'interrogation* (souligné par nous). » p. 1391.

bien qu'activant des couches de mémoire pratique, mais apparaît ici au grand jour, parce que cette mémoire n'est pas adéquate.

Cet exemple constitue une réalisation de décalage institutionnel provoqué sur une des dimensions constitutives d'une institution, la pratique, et le contrat qui lie les acteurs de cette pratique. Il existe cependant une deuxième dimension institutionnelle, incontournable pour l'étude de la mémoire et de ses manifestations sous formes de rappels ou d'oublis, et relative au temps de l'institution. L'enjeu est donc alors, pour des pratiques institutionnelles normalisées, de provoquer des décalages institutionnels temporels, afin de mesurer les décalages de pratique escomptés.
Il paraît donc indispensable de créer, pour cela, des institutions d'observations attenantes aux dispositifs observés, afin de pouvoir saisir les effets de ces derniers sur les personnes qui s'y soumettent. Ainsi, le chapitre suivant sera-t-il relatif à une institution à laquelle viendront s'assujettir des élèves, afin de provoquer un décalage institutionnel basé sur la temporalité, pour en mesurer des effets éventuels relatifs aux pratiques. Ce faisant, il s'agit bien d'observer des phénomènes relatifs à la mémoire pratique, puisque relatifs à des engagements d'élèves dans des pratiques, ce qui suppose des rappels ou des oublis de techniques antérieurement disponibles afin d'accomplir ces pratiques.

3. 3. Description et discussion du dispositif d'observation

3. 3. 1. Un dispositif institutionnel pour l'observation

À la lumière des observations du précédent chapitre, nous avons souligné la nécessité, pour l'observation de phénomènes mémoriels, d'un dispositif que nous avons appelé institution d'observation. Cette dénomination obéit à une nécessité méthodologique fondée sur la volonté de la réalisation d'un décalage des pratiques, et donc du contrat sous lequel elles sont accomplies, ainsi que d'un décalage des temporalités, afin précisément de mettre en évidence des effets mémoriels personnels particuliers.
La notion de « personne » est présente, et définie, dès les premiers moments de l'élaboration anthropologique fondée par Chevallard. Ainsi :

> - « L'articulation des divers assujettissements que l'individu concret contracte - dès la naissance - produit la personne, qui est le nexus où coexistent les différents assujettissements institutionnels, et où se négocie la position du sujet en ses divers assujettissements. Par cette négociation, l'assujettissement (dont le point de départ est dans l'institution) fait place au rapport de la personne à l'institution. » (Chevallard, 1988c, p. 54).
> - « Une personne X est assujettie à une foule d'institutions. Je poserai ici l'axiome qu'une personne n'est en fait rien d'autre que *l'émergent d'un complexe d'assujettissements institutionnels*. Ce qu'on nomme "liberté" de la personne apparaît alors comme l'effet obtenu en jouant *un ou plusieurs assujettissements institutionnels contre d'autres.* » (Chevallard, 1992, p. 91).

Les personnes observées (les élèves) sont « naturellement » assujetties à de multiples sous-institutions du système didactique, en lesquelles elles accomplissent des pratiques relatives au même objet mathématique : par exemple, sur l'objet logarithme, des activités en classe, durant le cours, ou bien dans des moments d'évaluation, ou des recherches d'exercices à la maison, recherches pouvant être menées seul, avec des camarades de classe, avec l'aide de quelqu'un d'extérieur, etc. Elles sont ainsi soumises aux effets institutionnels liés au temps et aux pratiques : effet du temps sur les pratiques, des pratiques sur le temps de ces pratiques, effet de la nature de l'institution sur les pratiques, de l'existence ou non de certaines institutions pour un certain type de pratiques. Par exemple, nous avions ainsi observé, dans les première et deuxième parties de cette thèse, le cas de deux élèves ayant créé pour elles mêmes une « institution des fiches » pour certaines pratiques de l'étude.
Une remarque doit être faite en ce point. Toutes ces sous-institutions sont à rattacher au même système didactique qui les entretient et désigne les objets de leur intérêt. Les personnes, les élèves, qui en deviennent des sujets, sont soumises alors à des processus de conversion didactique d'assujettissements externes et au poids du contrat qui porte sur la pratique des objets d'un écosystème de savoirs. Il s'agit de créer une institution d'observation en laquelle la pratique consistera pour les personnes qui la fréquenteront, des élèves volontaires, à expliciter certains éléments de leurs pratiques d'étude. Autrement dit, par l'assujettissement à cette institution d'observation, d'accéder à des dimensions de la personne qui relèvent de ses assujettissements à d'autres institutions pour l'étude. C'est ainsi, par exemple, que nous avons eu accès à la connaissance de cette institution pour l'étude, que nous avions nommée

« l'institution des fiches ». La pratique, dirigée par l'observateur, qui consiste à parler de ce que l'on fait dans ces autres institutions pour l'étude, fournit un accès à des fragments d'assujettissements que ces institutions d'étude induisent pour les personnes. Cet accès n'est pas immédiat, bien sûr. Il est fait d'éléments épars, pris dans les épisodes des pratiques d'étude qui se disent. Il doit donc être dirigé, analysé, interprété par l'observateur. Il n'est pas suffisant, par exemple, de savoir que des élèves constituent des fiches pour étudier, encore faut-il parvenir à connaître en quoi cette pratique consiste, quels en sont les gestes, ceux qui en autorisent ou en interdisent d'autres, leur adéquation avec ceux qui sont requis dans le système didactique, etc.

Comme toute institution, cette institution pour l'observation repose sur une pratique qui se déroule selon un temps qui lui est propre. Elle consiste à exposer des pratiques qui se déroulent, ou se sont déroulées, dans d'autres institutions. Le temps pour les dire est fait de moments qui renvoient aux dispositifs de l'institution d'observation.
Un des éléments du dispositif, qui paraît parfois transparent tant il peut sembler trivial, consiste à répondre aux questions posées par l'observateur, à ses demandes d'explicitation, à la contrainte d'opérer des retours sur les propos tenus, etc. Les questions de l'observateur sont dirigées par l'analyse des éléments obtenus lors de précédentes observations, par le cadre théorique sur lequel le dispositif s'appuie, par la connaissance que l'observateur a de ce qui a été enseigné dans le système didactique, de ce qui va y advenir, etc.
D'autres éléments du dispositif ont une matérialité qui les rend davantage visibles : par exemple, lorsque les élèves sont invités à parler sur une séquence d'enseignement filmée qu'ils sont en train de visionner, il est possible d'arrêter le temps du discours sur un épisode de la séquence filmé, ou sur un détail, ou de revenir en arrière, etc.
L'institution d'observation crée dans ces deux cas un décalage temporel par rapport à la pratique spécifique de l'institution observée : le système didactique. Ce décalage peut être obtenu dans deux directions : relativement aux pratiques déjà accomplies dans le système didactique et les dispositifs d'étude, lorsqu'on voudra s'attacher à l'observation de phénomènes mémoriels, ou bien relativement à celles non encore accomplies, lorsqu'on voudra attester d'éventuels phénomènes d'anticipation sur le temps didactique non encore advenu. La majorité des observations « de terrain » utilisées dans la suite de cette thèse sont réalisées de cette manière, selon les deux modalités que nous venons de donner de ce dispositif d'observation. Nous expliciterons leurs spécificités au fur et à mesure que nous les rencontrerons.

L'observation décrite dans ce chapitre est réalisée à partir d'une institution dont la fonction première est de permettre d'obtenir un décalage temporel, afin de mesurer, pour des personnes dans la position d'élèves à l'intérieur de l'institution didactique à laquelle elles sont assujetties[123], d'éventuels décalages liés aux pratiques, à leur souvenir ou leur oubli.

---

[123] La notion de « position » fait partie des notions fondamentales de l'approche anthropologique en didactique. Nous choisissons d'en donner la définition fournie par Chevallard (1992) : « Jusqu'ici j'ai implicitement présenté l'institution I comme un espace "homogène". En réalité, parmi les objets de I, il existe une catégorie particulière d'objets que j'appelle *positions au sein de I*, et dont je noterai P_I l'ensemble. Étant donné alors un objet institutionnel O, il existe - contrairement à ce que j'ai feint de dire jusqu'ici -, non un rapport institutionnel

Nous avons, dans un premier temps, recueilli un corpus de données dans une classe de Terminale S en train d'étudier une partie du chapitre relatif au « logarithme népérien ». Ce corpus a été obtenu en filmant une classe ordinaire d'un lycée, dans laquelle le professeur de la classe dirigeait l'étude, comme il avait l'habitude de le faire. Précisons que ce professeur expérimenté, volontaire pour l'observation, avait eu le temps de s'habituer à la présence de l'observateur durant ses cours, puisqu'il l'avait accueilli dans sa classe une fois par semaine, l'année précédente, durant quelques mois. Il continuera d'ailleurs de l'accueillir l'année suivante, pendant les séances relatives à l'enseignement du logarithme et de l'exponentielle. Ce corpus ne prétendait pas verser sa contribution à la quête de l'exhaustivité. Par exemple, nous n'avons ni recueilli les cahiers sur lesquels ont travaillé la trentaine d'élèves de cette classe, ni enregistré les conversations privées entre élèves lors de ces séances, ou entre le professeur et certains élèves. Le corpus est cependant suffisant pour cette observation, dans la mesure où nous avons accès à la pratique institutionnelle à un moment du système didactique, pratique donnée à voir à tous, parfois en opposition à celles engagées par certains élèves, et dans la mesure aussi où il est perçu par les élèves de l'institution d'observation, comme rendant compte de façon satisfaisante de ce qui a été montré à tous dans la classe. Les élèves qui viennent dans l'institution d'observation ont précisément pour tâche de décrire ce qui n'a pu être recueilli, parce que cela concerne leur pratique privée lors de la constitution du corpus.

Deux séances de deux heures consécutives ont fait l'objet de l'observation, mais chaque fois une seule des deux heures a été filmée : celle qui correspondait à l'enseignement du thème. Après qu'un certain temps, un mois et demi environ, s'est écoulé, la cassette vidéo de ces deux séances a été montrée à deux élèves de la classe réunis dans une salle de leur lycée. Il leur a été demandé de commenter, durant la projection et en présence de l'observateur, les souvenirs que le film suscitait en eux, de dire les questions qu'ils s'étaient posées au moment de la séance et au fur et à mesure de son déroulement, de dire s'ils avaient su faire les activités proposées et comment, etc. Ces réactions et dialogues avec l'observateur, qui posait des questions aux élèves afin de solliciter la discussion de la séance, ont été enregistrés sur magnétophone tout au long de la projection de la cassette vidéo.
Puis, les trois corpus ainsi recueillis ont été retranscrits dans leur intégralité afin de les analyser.

3. 3. 2. Le choix d'une observation clinique

Au moment où le dispositif a été mis en place, en février 1998, nous ne connaissions ni la thèse de F. Leutenegger, fin 1998[124], ni les travaux d'Y. Clot publiés en décembre 1999[125]. Cependant, par bien des points, il est possible de trouver des similitudes entre ce dispositif

---

unique $R_I(O)$, mais, pour chaque position p au sein de I, un rapport institutionnel à O *pour les sujets de I en position p*. Je note ce rapport $R_I(p, O)$. » p. 90.

[124] *Contribution à la théorisation d'une clinique pour le didactique, trois études de cas en didactique des mathématiques*, thèse présentée à la Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Éducation de l'Université de Genève.

[125] *La fonction psychologique du travail*, PUF, Paris, décembre1999.

institutionnel d'observation et les méthodologies décrites dans ces deux ouvrages. Ceux-ci se revendiquent tous deux d'une approche clinique : d'une « clinique de l'activité » pour Clot (1999), d'une « clinique pour le didactique » pour Leutenegger (1998). Le cheminement de Clot, qui le conduit à l'adoption d'une méthodologie clinique, est celui d'un psychologue du travail amené, pour pouvoir rendre raison des phénomènes qu'il observe, à se démarquer vigoureusement de la méthodologie expérimentaliste de laboratoire sur laquelle repose la majorité des travaux de la psychologie cognitive. Son choix s'appuie sur le postulat que :

> « […] la singularité peut être objet d'étude dès lors qu'on rattache l'intelligence d'une situation à l'unité subjective d'une expérience et pas seulement aux représentations fonctionnelles que, par ailleurs, cette expérience suppose. Les critères de généralité qui définissent la science comme le domaine du répétable et du prédictif doivent, dans cette perspective, être revisités […] » p. 133.

Nous avons discuté ce dernier aspect épistémologique, relatif à la prédictivité et la reproductibilité, au tout début de cette partie de la thèse. Par ailleurs, à la racine du choix de l'approche clinique fait par Clot (1999), nous retrouvons, dans le passage suivant, le même positionnement que celui décrit en inaugurant ce chapitre, incluant la dimension institutionnelle de laquelle il est impossible d'extraire la personne si l'on veut étudier convenablement son action :

> « L'analyse psychologique du travail est toujours l'analyse d'un sujet, d'un groupe ou de plusieurs, *dans une situation ou dans un milieu*. » Clot (1999), p. 133. (souligné par nous)

Mais il est important de souligner quelques conséquences liées à la prise en compte de cette dimension institutionnelle, bien que non présentes dans l'analyse donnée par Clot (1999), afin d'éclairer le choix de l'observation clinique qui est fait ici. L'objectif de cette observation clinique est de parvenir à atteindre certaines dimensions du rapport personnel d'un élève à un certain objet que nous pourrons nommer, sans plus de précision, « résolution d'équations logarithmiques en Terminale S ». Il peut paraître de peu d'intérêt, d'une part, de tenter d'avoir accès à la connaissance singulière d'un individu, et, quelque peu prétentieux d'autre part, d'affirmer que celle-ci, au-delà du cas singulier, nous instruit sur les rapports de personnes qui ont été, elles aussi, sujets d'un grand nombre d'institutions communes ; autrement dit, que le résultat de l'observation du rapport d'un élève singulier à un objet donné peut être étendu à beaucoup d'autres élèves de sa classe.

3. 3. 3. L'observation de la personne comme accès à l'observation de l'institution

On se heurte en effet, en ce point, à la force du courant idéologique dominant qui, dans sa déclinaison sociologique, se désigne lui-même parfois sous l'appellation d'« individualisme méthodologique ». Boudon (1979, 1997) donne la définition suivante, pour ce qui concerne le principe de l'individualisme méthodologique :

> « Ce principe signifie (au sens large où je le prends ici) que le sociologue doit se faire une règle de méthode de considérer les *individus* ou acteurs individuels inclus dans un système d'interaction comme les atomes

logiques de son analyse. Pour exprimer le même principe de manière négative, le sociologue ne peut se satisfaire d'une théorie qui considérerait des agrégats (classes, groupes, nations) comme les unités les plus élémentaires auxquelles il soit nécessaire de descendre. Plus précisément, l'assimilation d'un groupe à un individu n'est légitime que dans le cas où un groupe est organisé et explicitement muni d'institutions lui permettant d'émettre des décisions collectives. » p. 82.

Le point de vue que nous adoptons prend l'exact contre-pied du principe de l'individualisme méthodologique : les « atomes logiques » sont bien ici des « agrégats » et l'individu, ou plutôt la personne, est assimilée au groupe dont elle va permettre de rendre compte. Parce qu'une personne, observée sur certaines pratiques déterminées, accomplies en des institutions déterminées en lesquelles d'autres qu'elles ont aussi été assujetties pour réaliser les mêmes pratiques, peut être considérée comme représentant ces autres personnes, parce qu'elles sont définies pour chacune d'elles comme « émergent d'un complexe d'assujettissements institutionnels », il en résulte qu'étudier cette personne permet d'étudier les effets institutionnels imprimés selon des modalités voisines pour un grand nombre de ces autres personnes. Ce point de vue pourrait s'exprimer dans les formes suivantes : ce n'est pas l'agrégation d'individus qui crée la structure, c'est la structure qui marque les personnes qui s'y assujettissent. Assujettissement dont on peut retrouver les traces chez un individu pris au hasard. La personne observée, « personne » étant pris au sens large puisqu'il s'agit ici de deux élèves, peut alors être considérée, selon certaines conditions, comme « représentant de la classe d'équivalence » d'autres personnes « vérifiant la relation », c'est-à-dire liées par le partage d'une même propriété commune. Ces conditions sont trouvées, pour le travail exposé ici, dans le cadre de l'approche anthropologique en didactique développée par Chevallard.
La question est délicate dans la mesure où il n'existe pas de « pur sujet » d'une institution, comme le souligne Chevallard (1992) :

« À cet égard, les institutions sont toujours "flouées" par leurs sujets. Là où elles s'attendent à trouver de *purs sujets*, qu'elles croient entièrement façonnés par elles, elles rencontrent des *personnes*, qui leur apparaissent toujours, peu ou prou, comme de *mauvais sujets*. En particulier, le rapport institutionnel $R_I(p, O)$ *n'est le rapport personnel d'aucune personne*, sujet de I en position p : conformité n'est pas identité. » p. 91.

Cependant, existent malgré tout de « bons sujets » de l'institution, sans lesquels sans doute l'institution ne pourrait prétendre à la pérennisation, et sur lesquels portera l'observation ; ce sont ceux que nous avons qualifiés de « représentants de la classe d'équivalence » des personnes que nous voulons observer. Ou plutôt, pour être plus précis, certaines personnes occupent parfois leurs positions institutionnelles en bons sujets, en produisant les gestes institutionnels adéquats. Autrement dit, l'observation clinique de ces personnes peut nous fournir des observables qui, parce qu'ils procèdent des effets de l'assujettissement des personnes à l'institution d'étude, peuvent être étendus au groupe des sujets :

« Une personne x en position p dans I, *i.e.* un sujet de I en position p, sera regardée comme un *bon sujet* de I si ses rapports personnels $R(x,o)$ sont conformes aux rapports institutionnels correspondants, $R(p,o)$, où o est un objet institutionnel de I tel que $R(p,o)\neq\varnothing$. Comment ces rapports $R(x,o)$ se donnent-ils à voir, afin que puisse être porté un jugement, et prononcé un verdict, relatifs à leur conformité institutionnelle ? […] Je dirai que la position p est caractérisée par un répertoire de *gestes*, que son occupant, x, doit accomplir dans le cadre d'un certain nombre de *dispositifs*. Le latin *gestus* signifie, au figuré, "prendre sur soi, se charger volontairement de" et donc "exécuter, faire". C'est dans ce sens large, et non dans le sens restreint plus courant ("mouvement du corps"), que le mot est pris ici : on doit le rapprocher du verbe *gérer* et du substantif

> *gestion*, de même origine, et de quelques autres encore. […] La personne x en position p dans I rencontre l'ensemble des objets o auquel elle a affaire dans le cadre de dispositifs où elle accomplit certains gestes qui activent ces objets o. C'est à travers ces gestes, et à travers eux seulement, que, dans I, on pourra apprécier son rapport personnel à o, et le déclarer conforme, ou non conforme, ou insuffisamment conforme, etc. D'où le fait, notamment, que $R(x,o)$ pourra être trouvé conforme dans I, et non conforme dans telle autre institution I' à laquelle x est par ailleurs assujetti, tout simplement parce que x est amené à activer o, dans I', à travers des gestes absents du répertoire institué dans I. » (Chevallard, 1996, pp. 84-85).

Comment être certain d'observer des « bons sujets » devient alors la question importante. Certains gestes d'étude sont observables, d'autres non, et ils correspondent à des épisodes biographiques chez les élèves qui les font être, à certains moments de la vie de l'institution plus ou moins « bon sujets ». En ce point, nous ne pouvons alors que nous référer à ce que la personne chargée d'évaluer, dans l'institution didactique, la conformité du rapport personnel aux objets étudiés déclare.

L'observation portera donc sur des personnes réputées être de « bons sujets », c'est-à-dire des élèves ayant été présentés comme de « bons élèves » par le professeur de la classe, donc des personnes x qui, dans la position p d'élèves de cette classe, sont déclarées par leur professeur comme ayant des rapports personnels conformes relativement à l'institution-classe I.

Dans l'institution d'observation, le contrat voudra que les « bons sujets » disent leurs gestes de « bons sujets ». Mais, dans cette institution d'observation, les gestes qui sont évoqués sont relatifs à l'institution I au temps t, alors que les personnes sont désormais des « bons sujets » de I mais au temps t', avec $t'>t$. L'observation portera donc sur ce qui est dit être les gestes pour t dans I, alors que l'on se trouve en t'. La comparaison de ce qui se dit en t' avec ce qui s'est réellement fait en t permet d'accéder alors à la dimension mémorielle de la pratique, à travers « la dynamique de la personne en son rapport aux diverses institutions, soit son histoire concrète » (Chevallard 1988c).

Comme il s'agit, dans le cas du dispositif d'observation, de rendre compte du point où la dynamique institutionnelle relative au temps a conduit les personnes singulières observées, mais que d'autres personnes ont, comme celles observées, été soumises à des rapports à ces mêmes diverses institutions différenciées à partir de leur dimension temporelle (puisqu'il s'agit du même groupe-classe mais à des moments différents), il est donc possible d'attribuer les effets mémoriels à la dynamique institutionnelle et de les étendre aux personnes, même non observées, qui y ont été soumises. Le cas des « mauvais sujets » est alors vu comme relevant d'assujettissements relatifs à des institutions allogènes à l'institution dont on observe la dynamique, c'est-à-dire à la classe dans sa dynamique temporelle. L'étude de ces institutions allogènes, ou, ce qui revient au même, de l'incapacité à s'assujettir à l'institution-classe et aux institutions connexes qui vont permettre l'engagement dans l'étude, n'est pas engagée ici. Elle relève de la question de l'échec scolaire que nous ne traitons pas dans cette partie de la thèse.

3. 3. 4. Observateur « expert » ou observateur « naïf » ?

L'approche clinique définie par Clot intègre, comme nous l'avions souligné dans les préalables épistémologiques et méthodologiques, la dimension aléatoire de l'observation des phénomènes, et la nécessité d'une institution qui, un peu à l'image des chambres à bulles de la physique des particules, va recueillir les traces de ces événements aléatoires :

> « […] l'étude est centrée sur les mécanismes vitaux du développement ou, mieux, sur les régimes de production de l'inattendu. Certes, dans cette perspective, l'idée même de reproductibilité de la conduite est récusée. […] Ces mécanismes de production de l'activité ne sont pas directement observables. Nous y avons accès seulement en mettant en place un inventaire des traces qu'ils laissent chez le sujet et dans son milieu technique et social quand il s'est fait son "milieu à lui". En regardant ces traces comme des trappes d'accès aux conflits de l'activité, nous nous servons de ces rhétoriques de l'action que sont les catachrèses instrumentales ou les créations langagières qui fixent à l'extérieur des sujets leur activité. » pp. 139-140.

Les traces que nous observerons ne seront ni des catachrèses, ni des créations langagières, mais des conformités ou des écarts éventuels entre les pratiques qui se disent et celles qui se sont faites. C'est bien en effet des phénomènes de rappel ou d'oubli, liés à la mémoire pratique, que nous voulons observer. Ceux-ci proviennent des réorganisations, opérées ou non à l'occasion du travail d'étude mené dans la durée de l'intervalle entre deux instants du temps didactique. Comme nous l'avions vu dans la deuxième partie, certaines techniques relatives au même type de tâche peuvent évoluer, ou devenir obsolètes et être supplantées par d'autres. La question qui se pose est donc de parvenir à identifier les effets de ces changements pratiques sur les mémoires des personnes qui, assujetties à des institutions dans lesquelles changent ces pratiques, continuent de se livrer à ces pratiques.
Si nous faisons nôtre le constat de nature anthropologique de Clot (1999) selon lequel :

> « Le langage et l'outil conservent la marque des actions sur le monde et du commerce entre les hommes. » p. 140.

nous ne pourrons le suivre lorsque, voulant éviter la complicité entre experts qui se traduirait par une description trop implicite dans sa verbalisation de l'activité, il préconise pour ce « recueil des traces » :

> « C'est pourquoi s'impose à notre sens la présence d'un "non-spécialiste" de la tâche dont la "naïveté professionnelle" puisse faire obstacle à cette complicité, révélant, paradoxalement, l'utilité de la connivence entre experts lorsqu'elle n'est pas laissée à elle-même. » p. 146.

Tout au contraire, dans le cas des « savoirs hautement techniques » tels que définis par Johsua (1998), la connaissance des pratiques relatives à ces savoirs nous paraît un préalable incontournable, au risque de ne rien saisir, ni de ces pratiques (quelle est leur finalité), ni des outils de ces pratiques (comment on les accomplit), ni du langage qui dit ces pratiques (comment on peut les décrire). Dans le cas de ce type de savoirs, « hautement techniques », on ne peut s'improviser « analyste » de pratiques sans les avoir préalablement étudiées, c'est-à-dire sans avoir fréquenté, précisément, *l'école* pour ces pratiques. Plusieurs raisons plaident en ce sens.
Clot porte son regard sur des pratiques qui sont réputées être les pratiques attendues et stables dans l'institution observée ; elle sont accomplies par des personnes vues comme des « bons sujets » pour ces pratiques, par exemple des conducteurs de trains qui décrivent une pratique stabilisée dans l'institution qui les en a déclarés « experts ». Il en va tout autrement pour les institutions didactiques. Leur finalité est l'évolution du rapport au savoir, donc des pratiques

du savoir pour les personnes en position d'élève. Les « praticiens » observés ne sauraient donc être déclarés « experts » des pratiques du savoir : leur rapport au savoir est toujours soumis à un verdict d'adéquation au rapport institutionnel. De surcroît, sur des objets sensibles, ces pratiques évoluent dans l'institution d'enseignement selon le moment où elles y sont observées : parce que c'est précisément une condition pour que la fonction d'enseignement soit remplie par l'institution. Aussi est-il nécessaire que l'observateur connaisse, selon le moment où il les observe, comment l'institution didactique attend que ces pratiques soient accomplies.

Par ailleurs, les pratiques du savoir sont incluses dans des pratiques pour son étude. Nous observons donc, non seulement les pratiques, mais les effets des modifications et des réorganisations portant sur les pratiques et dues à l'étude. Ces effets sont d'origine institutionnelle et s'imposent aux sujets, d'une façon largement indépendante de leurs spécificités personnelles. Dans le cas des observations de Clot, qui ne portent pas sur des institutions didactiques, ces changements peuvent certes être d'origine institutionnelle, mais la chose est moins fréquente : par exemple, les décisions de changement des règles de conduite ou des modèles de trains à conduire n'imposent pas un changement des pratiques des conducteurs à un rythme comparable à celui des institutions didactiques. Les variations observées pour la même pratique selon les sujets sont imputables, dans ce cas, à l'interaction du sujet et de sa pratique. Celles que nous observons chez les élèves peuvent être imputables à la nature de l'assujettissement de la personne à l'étude. Autrement dit, des variations de pratiques peuvent être observées chez les conducteurs de trains parce qu'elle sont dues à des « tours de main » ou « savoir-faire » personnels, alors que dans le cas d'élèves elles peuvent être dues à un plus ou moins grand assujettissement, à des moments donnés, à des pratiques institutionnelles en évolution. Il faut donc que l'observateur soit doté des moyens, nécessaires mais peut-être insuffisants cependant, pour reconstituer la trajectoire de l'élève dans ses assujettissements divers et parfois fluctuants, afin de comprendre les variations pratiques observées.

3. 3. 5. Les réorganisations ne sont pas imputables à l'institution pour l'observation

Nous ne suivrons pas Clot, non plus, lorsque décrivant le dispositif d'observation qu'il utilise pour l'analyse de l'activité, « l'auto-confrontation croisée », il attribue à ce dispositif et à la nécessité pour l'acteur qui s'y soumet de parler l'action précédemment accomplie, le fait que « les activités se réorganisent et se modifient » p. 149[126].

Nous pensons que les élèves réalisant des « activités » mathématiques se soumettent, au contraire, dans l'écrasante majorité des cas, à l'accomplissement de tâches réglées par des techniques spécifiques des institutions d'étude qu'ils ont fréquentées, techniques qui sont précisément *institutionnelles*, c'est-à-dire pour lesquelles un moment spécifique de l'étude a été ménagé, pendant lequel il a été indiqué que ces techniques sont reconnues comme celles

[126] Clot reprend cette idée p. 151 : « L'expérience a une histoire et son analyse *[il s'agit de l'analyse faite par l'acteur dans l'auto-confrontation croisée]* transforme cette histoire. La signification des activités n'est pas constante pour le sujet. »

attendues désormais (dans l'institution)[127]. C'est au contraire parce que l'institution change, et que l'élève, par son travail d'étude, apprend les nouvelles techniques attendues dans les nouvelles institutions auxquelles il est, de fait, assujetti par l'avancée du temps didactique, que « les activités se réorganisent ». Le dispositif, que nous nommons « institution d'observation », n'est donc pas ce qui crée ces « modifications et réorganisations ». Au contraire, parce qu'il s'agit d'une institution rattachée, notamment par le temps et la pratique qui se dit, à l'institution à l'intérieur de laquelle on s'adonne, ici et maintenant, à certaines de ces pratiques, c'est une institution où vont pouvoir se dire les pratiques actuelles et aussi, éventuellement, leur comparaison aux pratiques anciennes. C'est ce point que souligne, dès le début de sa thèse, Leutenegger (1998) :

> « Observer un (des) système(s) *en évolution* suppose *une observation diachronique de ce(s) système(s)* et cela sur une tranche de temps (temps des horloges cette fois) qui reste à définir. » p. 11.

Ne pas négliger *l'institution* pour la clinique nous paraît être un préalable, tant est fréquemment ignorée cette dimension du dispositif, ne serait-ce que, comme le souligne Leutenegger (1998), parce que :

> « […] une *recherche clinique* suppose nécessairement la prise en compte de l'observateur (qu'est le chercheur) en même temps que l'objet qu'il observe. » p. 11.

Cette dimension institutionnelle permet de ne pas oublier l'existence des autres institutions, différentes de l'institution d'observation mais tout autant fréquemment invisibles (ou plutôt non vues), auxquelles est aussi assujetti le chercheur, et qui vont interférer avec l'observation proprement dite et son produit. C'est ce que notait Chevallard (1996) dans sa lettre à R. Amigues du 1er mai 1989, dans laquelle il souligne :

> « […] je désignerai par *contre-transfert épistémologique*, chez le chercheur, l'ensemble du travail, conscient et inconscient, de *questionnement* (travail qui s'effectue à partir de sa position dans les systèmes d'interaction dont il est l'un des acteurs), de *problématisation* à partir des questions reconnues par lui (travail qui aboutit à un tri entre les questions qu'il accepte comme problématiques, dignes d'être prises en compte en tant que questions légitimes de recherche, et les questions qu'il rejette ou scotomise comme hors de son champ de problématisation), et d'*explication* (travail qu'il conduit dans l'espace de théorisation reconnu par lui comme légitime dans sa position de chercheur). » pp. 45-46.

Contrairement à la croyance qui voudrait opposer l'expérimental paré de vertus scientifiques à la clinique qui en serait moins bien dotée, cet abord est en fait général :

> « Tout laboratoire est d'abord un observatoire - une clinique. » p. 45.

Ce qui soulève immédiatement le problème de la reproductibilité :

> « Sa reproductibilité en tant qu'expérience est assujettie à la reproduction du cadre clinique qui lui permet d'exister en tant que telle. » p. 45.

---

[127] L'histoire des mathématiques montre que la « créativité mathématique » par des élèves est rarissime, et les cas connus sont recensés en lettres d'or dans le grand livre des mathématiques car ils ne sont, hélas, bien souvent que le fait d'élèves qui devinrent de grands mathématiciens !

Nous disposons ainsi « d'un cadre clinique », ici une institution d'observation, à laquelle vont venir s'assujettir des personnes, essentiellement des élèves et l'observateur, parfois aussi le professeur de la classe, pour accomplir des pratiques soumises à un contrat, et qui vont se dérouler selon un temps institutionnel propre. Ces pratiques peuvent être de plusieurs ordres, et nous montrerons ultérieurement une institution du même type aux pratiques différentes, mais elles sont toujours annexées à celles qui se déroulent dans « l'institution-classe », ou dans les institutions d'étude annexées à la classe. De même, le temps de l'institution d'observation est en grande partie « calé » sur celui de « l'institution-classe », soit parce que l'observateur va décider de le régler sur le temps de pratiques déjà accomplies dans la classe, et dans ce cas avec un décalage temporel plus ou moins grand qu'il pourra faire varier, soit sur le temps de pratiques non encore accomplies dans la classe. L'institution d'observation réalise ainsi « un certain degré de proximité » avec l'institution observée, tant au niveau des pratiques qu'au niveau de leur temps, qui autorise son questionnement et qui porte, dans le cas qui nous occupe ici, essentiellement sur les positions d'élèves étudiant des pratiques mathématiques. Pour interpréter les réponses en référence au questionnement posé, il est nécessaire de confronter les traces obtenues dans l'institution d'observation, et relatives aux pratiques propres à la classe, avec les pratiques effectives de la classe ; c'est l'objectivation du décalage dont nous parlions au début de l'exposé de cette institution d'observation. Ce décalage, pris comme objet d'étude, peut alors être analysé en le reportant au cadre théorique que nous avons décrit dans la deuxième partie de cette thèse. Ce faisant, cette démarche permet de fournir une interprétation de ce décalage et aussi d'alimenter en retour la construction du cadre théorique.

Nous avions, dans un premier temps, reproché à la définition du dispositif clinique élaboré par Clot (1999) d'inclure comme positive la présence d'un « non-spécialiste » de la tâche. Cette critique mérite d'être discutée, à partir des différences sur la nature des pratiques qui sont l'objet de l'étude clinique. Pour Clot, il s'agit en effet, comme il l'indique lui-même, d'étudier « le réel de l'activité » ; son enquête porte en fait sur l'activité des conducteurs de train qu'il cherche à analyser. Or, une différence est à souligner entre le travail de Clot et celui exposé ici. Il ne s'agit pas pour nous d'étudier l'activité ou la pratique des mathématiques, mais les effets de cette pratique sur la mémoire de cette pratique. Nous disposons en effet, contrairement au sujet de l'observation de Clot, d'une théorie de la pratique mathématique, au sein de la théorie anthropologique du didactique développée par Chevallard, en terme d'organisation praxéologique ; les praxéologies se rapportant aux mathématiques sont désignées comme étant des organisations mathématiques. Il est donc nécessaire, afin de pouvoir raisonnablement parler de cette pratique, d'exposer rapidement la notion d'organisation mathématique. De même, nous devons revenir, afin de pouvoir analyser les différentes fonctions didactiques des phases selon lesquelles les séances observées en classe peuvent se laisser découper, sur la notion d'organisation mathématique et sur les moments de l'étude.

3. 4. La notion d'organisation praxéologique : définition et exemple d'analyse

Nous avons exposé précédemment, en 2. 4. 4, les moyens, les outils, grâce auxquels s'accomplit le travail, l'activité mathématique, et qui ont été distingués et désignés sous les noms d'ostensifs et de non-ostensifs, dans la théorie anthropologique du didactique. Ainsi l'activité mathématique, telle qu'on peut l'observer, se laisse-t-elle décrire en la manipulation d'ostensifs, lesquels, pris dans des blocs de pratiques, vont créer des émergents de pratiques, qui reçoivent le nom de non-ostensifs, et qui, ordinairement, ont pu être désignés comme étant des concepts ou des notions mathématiques, tels par exemple que les fonctions, les vecteurs, la proportionnalité, etc.
Mais la description de la pratique resterait sans doute incomplète, et en tout cas insuffisante pour accéder à son intelligibilité, si on ne se limitait qu'à la description des outils ou à l'évocation des blocs de pratiques dans lesquels on les manipule. Il en va, en effet, des mathématiques comme de toute autre activité humaine. Ainsi, sans doute, le fait d'avoir noté qu'un mécanicien manipule divers types de clés, de tournevis, de marteaux, etc. serait, à n'en pas douter, bien insuffisant pour décrire de façon satisfaisante les activités qu'on regroupe sous le champ de la mécanique automobile. Il existe en effet, d'autres types d'activités, la menuiserie ou le bâtiment par exemple, où les mêmes outils sont également manipulés. On ne peut raisonnablement pas dire, cependant, qu'ils sont engagés dans les mêmes pratiques. Si le champ d'utilisation des ostensifs et des non-ostensifs associés, tels que définis dans l'approche anthropologique en didactique *des mathématiques*, semble plus restreint, il existe, comme pour le cas de la mécanique, d'autres types d'activités que strictement mathématiques, mais sans doute en partie connexes, dans lesquelles on peut les retrouver. Ainsi, par exemple, en va-t-il des non-ostensifs, dérivées, intégrales, équations différentielles, etc. en physique ou en économie, ou bien des non-ostensifs test d'hypothèse, échantillon, intervalle de confiance, etc. en biologie ou en psychologie expérimentale. C'est donc autrement que devront se laisser décrire les pratiques, et en particulier les pratiques mathématiques.

Les derniers développements de l'approche anthropologique en didactique, initiée à l'origine par Y. Chevallard et son équipe (Chevallard 1988a), ont vu émerger le concept d'*organisation praxéologique* (ou plus rapidement de *praxéologie*) comme jouant un rôle de premier plan dans la théorisation, et apportant réponse à la question de la description de la pratique, mathématique ou autre. Ainsi, un des fondements sur lesquels repose *la théorie anthropologique du didactique* repose sur un postulat radical énoncé en ces termes par Chevallard (1997b) :

> « […] on tient ici pour un postulat que *toute action humaine procède d'une praxéologie*, en admettant bien sûr que cette praxéologie puisse être en cours d'élaboration, ou, aussi bien, que sa construction se soit arrêtée – peut-être définitivement, à l'échelle d'une vie humaine ou institutionnelle -, en la figeant dans un état d'incomplétude ou de sous-développement, avec, par exemple, un type de tâches mal identifié, une technique à peine ébauchée, une technologie incertaine, une théorie inexistante. » p. 38.

3. 4. 1. La notion d'organisation mathématique

La théorisation praxéologique a été fructueusement mise en œuvre pour l'analyse de la pratique mathématique (Chevallard 1994b et 1999, Bosch 1994) et de la pratique professorale (Chevallard 1996 et 1997b). Nous ne pouvons ici qu'exposer succinctement la notion de praxéologie, à partir des textes cités et qui constituent une référence théorique incontournable.
À la racine de toute praxéologie se trouvent les notions de tâche, notée t, et de type de tâches, notée T, auquel une tâche appartient. Ce terme de tâche, qui doit être référé à l'institution et à la position qui y est occupée par la personne dont l'activité réalise la tâche, prend un sens plus large que dans le français courant. Ainsi, Chevallard (1996) précise-t-il que :

> « […] "résoudre une équation du second degré" est un type de tâches, mais "fermer le robinet" ou "aller ouvrir la porte", "se laver le visage" ou "saluer quelqu'un", "corriger un paquet de copies" ou "élaborer une manière d'introduire des étudiants de DEUG à la notion d'intégrale" sont autant de types de tâches. » p. 85.

Pour pouvoir « accomplir » des tâches, relevant d'un type de tâches, il existe en principe, dans une institution, au moins une « manière de faire » appelée *technique*, et notée τ. Ici encore, le sens du mot est beaucoup plus large que le sens courant, et Chevallard (1996) situe sa filiation dans le prolongement de l'étude des *techniques du corps* faite par Mauss. Ainsi l'accomplissement d'une tâche d'un type donné nécessite la mise en œuvre d'une technique ; celle-ci est donc associée à des tâches qui peuvent être aussi variées que celles décrites précédemment et qui vont de « la résolution d'une équation » au « salut de quelqu'un ». Ces tâches peuvent être routinières ou, au contraire, problématiques. Ainsi, par exemple, un type de tâches tel que la marche, qui paraît transparent, parce que si routinier que lui associer le terme de technique puisse paraître choquant, peut devenir problématique pour une personne qui, victime d'un handicap survenu après que, petit enfant, elle ait appris à marcher, doit réapprendre une technique qui lui permettra de marcher à nouveau.
Ces techniques sont souvent accompagnées d'un discours, d'une *technologie* notée θ, dont la fonction est, pour Chevallard (1999) :

> « […] de *justifier* "rationnellement" la technique τ, en nous assurant qu'elle permet bien d'accomplir les tâches du type T, c'est-à-dire de réaliser ce qui est prétendu. » p. 226.

À côté de cette première fonction justificative, deux autres fonctions sont aussi remplies par la technologie : elle permet d'expliquer la technique et elle peut produire des techniques.
Enfin, un dernier niveau parachève la notion d'organisation praxéologique, ou praxéologie : le niveau de la théorie, notée Θ, défini par Chevallard (1999) :

> « On passe alors à un niveau supérieur de justification-explication-production, celui de la *théorie*, Θ, laquelle reprend, par rapport à la technologie, le rôle que cette dernière tient par rapport à la technique. » p. 227.

La modélisation s'arrête à ce niveau, le quadruplet $[T/\tau/\theta/\Theta]$ représentant une organisation praxéologique ponctuelle, car organisée autour d'un seul type de tâches, quadruplet suffisant pour rendre compte de l'activité à étudier. En fait, le modèle se complexifie car les organisations praxéologiques peuvent être aussi locales, régionales ou globales, indexées alors respectivement sur des techniques, des technologies et des théories. Le bloc pratico-technique [T/τ] constitue un *savoir-faire*, tandis que le bloc technologico-théorique [θ/Θ]représente un *savoir*. Par ailleurs, la rapide description donnée ici a volontairement bloqué la variable temporelle, ce qui induit que, comme toute pratique dans une institution donnée, la praxéologie, replacée dans sa dynamique, va naître, évoluer, voire disparaître. C'est précisément l'effet de cette dynamique sur les personnes assujetties à l'institution dans laquelle les praxéologies évoluent et, réciproquement, la dynamique des personnes qui atteste de cet effet, que nous tentons d'étudier.

3. 4. 2. La notion d'organisation didactique

La question des praxéologies de l'étude est abordée, dans la théorie anthropologique du didactique, par la notion d'œuvre dont Chevallard (1996) donne la définition suivante :

> « J'appelle œuvre toute production humaine *O* permettant d'apporter réponse à un ou des types de questions *Q*, questions "théoriques" ou "pratiques" qui sont les *raisons d'être* de l'œuvre - et cela sans considération de la "taille" de l'œuvre […] » p. 96.

Dans la mesure où une œuvre constitue une réponse à une question qui peut se laisser décrire sous la forme d'un type de tâches à accomplir, et qui est initialement problématique, une œuvre représente alors une réponse sous la forme d'une organisation praxéologique. Faire étudier des œuvres, tâche dont est investie l'école, revient alors à faire rencontrer des questions pour lesquelles l'œuvre a déjà apporté réponse, et à faire se recréer une réponse dans l'institution d'étude que constitue l'école, donc une organisation praxéologique, qui sera conforme aux attentes relatives à l'œuvre transposée inscrite dans le programme à étudier. L'étude de l'œuvre est réalisée lors de *moments de l'étude*, au nombre de six, pour lesquels nous reproduisons des extraits des définitions données par Chevallard (1999) :

> « Le *premier moment* de l'étude est celui *de la première rencontre* avec l'organisation *O* enjeu de l'étude. […] Le *deuxième moment* est celui de l'*exploration* du type de tâches T_i et de l'*élaboration d'une technique* τ_i relative à ce type de tâches. […] Le *troisième moment* de l'étude est celui de *la constitution de l'environnement technologico-théorique* [θ/Θ] relatif à τ_i. […] Le *quatrième moment* est celui du *travail de la technique*, qui doit à la fois améliorer la technique en la rendant plus efficace et plus fiable (ce qui exige généralement de retoucher la technologie élaborée jusque là), et accroître la maîtrise que l'on en a : ce moment de mise à l'épreuve de la technique suppose en particulier un ou des corpus de tâches adéquats qualitativement aussi bien que quantitativement. […] Le *cinquième moment* est celui de *l'institutionnalisation*, qui a pour objet de préciser ce qu'est "exactement" l'organisation mathématique élaborée, en distinguant notamment, d'une part les éléments qui, ayant concouru à sa construction, n'y seront pas pour autant intégrés, et d'autre part les éléments quui entreront de manière définitive dans l'organisation mathématique visée […]. […] Le *sixième moment* est celui de *l'évaluation*, qui s'articule au moment de l'institutionnalisation : la supposition de rapports institutionnels transcendants aux personnes, en effet, fonde en raison le projet d'évaluer les rapports *personnels* en les référant à la *norme* que le moment de l'institutionnalisation aura hypostasiée. » pp. 250-251-252-253-254.

Précisons que, dans une organisation didactique telle qu'elle peut être observée, ces moments ne sont pas nécessairement tous réalisés, non plus qu'ils ne le sont chronologiquement selon l'ordre d'exposition. C'est ce que précise Chevallard (1996), dès la première exposition de la modélisation des moments de l'étude lors de la VIII^{e} École d'été de didactique des mathématiques de 1995 :

> « Concrètement, les moments se vivent temporellement sous forme de séquences dont la structure peut être très variable : un moment est généralement réalisé *en plusieurs fois* - y compris, paradoxalement, s'agissant du moment de la "première rencontre". Et, bien sûr, l'ordre de survenue des différents moments peut lui-même être quelconque - même si l'on ne sait que trop que, dans une certaine organisation dite traditionnelle de l'étude, le moment technologico-théorique est chronologiquement premier. » pp. 120-121.

Nous pouvons alors analyser, dans un premier temps, et grâce au modèle exposé, les deux séquences observées, et qui seront ensuite projetées à deux élèves de la classe présents lors de ces deux séquences d'un heure chacune. Pour cette analyse, nous nous appuierons sur des extraits (figurant en encadré dans le corps de texte), jugés pertinents pour la compréhension du lecteur, des protocoles des deux séances observées, ainsi que du protocole de l'enregistrement des élèves et de l'observateur lors de la diffusion vidéo des deux séances. Les protocoles complets se trouvent en annexe. Les caractères gras sont utilisés pour transcrire les écritures au tableau.

3. 4. 3. Fragments d'analyse des organisations mathématiques et didactiques des séances des 4 et 5 février 1998

Dans ce qui suit, nous ne donnons pas les analyses complètes des organisations mathématiques et didactiques des cours des 4 et 5 février 1998. Nous nous intéressons seulement à certaines parties de ces analyses utiles pour le travail que nous présentons. Les protocoles des cours étudiés se trouvent, dans leur intégralité, en annexe.

3. 4. 3. 1. Un moment d'institutionnalisation d'une technique

La séance du 4/2/98 est une séance de correction. Elle portait sur les exercices suivants : Résoudre les équations et inéquations :

$\ln(x+1)+\ln(x+3)=\ln(x+7)$

$\ln(x^2+4x+3)=\ln(x+7)$

$\ln(\frac{x+1}{3x-5})\geq 0$

Les deux premiers exercices ont permis à P d'insister, pour l'établissement des solutions, sur l'importance de l'ensemble sur lequel les expressions intervenant dans l'équation sont définies.

La résolution de la première équation a permis de trouver : $x=1$ ou $x=-4$

Et de rejeter –4 qui n'appartient pas à cet ensemble.

Lorsque le premier exercice a été corrigé, la correction du deuxième a donné lieu à l'échange suivant, dont des extraits significatifs, entre P et l'élève au tableau Lyd., sont reproduits ci-dessous (rappelons que le texte **en gras** correspond à ce qui a été écrit au tableau, le texte *en italique*, quant à lui, fournit des indications que la simple transcription de ce qui est dit ou écrit ne pourrait donner) :

15. P : « Bon, alors deuxième équation »
16. Lyd. écrit :

2. ln(x²+4x+3)=ln(x+7)

17. P : « Qu'est-ce que tu peux déjà nous raconter ? Qu'est-ce qui change ? »
18. Lyd. : « C'est l'ensemble de définition qui change »
19. P : « Bon, et ça va donner quoi ? »
20. Lyd. : « Ben -∞,… »
21. P : « Non, non, mais qu'est-ce qui va arriver ? Qu'est-ce qui change ? Est-ce que ça va changer quelque chose aux solutions ? »
22. Lyd. : « Non, les solutions c'est les mêmes, mais elles marchent toutes les deux… »
23. P : « Les solutions de l'équation, tu vas trouver toujours 1 » *P montre l'équation précédente et* **S={1}.**
24. Lyd. : « Non. Y'aura 1 et -4 »
25. P : « Bon. Cette fois-ci, ça va changer parce que le domaine de définition va changer et on traite celle-là (*P montre* **x²+3x-4=**0), alors vas-y montre-le »
26. Lyd. écrit :

Df={x∈R/x²+4x+3>0, x+7>0}

27. P : « Tout le monde a vu ça ? Tout le monde a compris ça ? (*Des élèves répondent oui*) Bien. *En revenant au tableau et à l'adresse de Lyd.* : Oui, alors y'a quelque chose qui existe en mathématiques à la place des virgules (*et P rajoute des parenthèses et des « et » dans les écritures des Df*) »
28. Lyd. écrit :

Df=]-7 ;-3[U]-1 ; +∞[

29 P : « Bon, alors ce polynôme x^2+4x+3, c'est pas la peine qu'on se fatigue pour trouver ses solutions, parce qu'on les connaît déjà hein… (*P montre la précédente équation*). On a vu que x^2+4x+3 c'est (x+1)(x+3) et les solutions c'est -1 et -3, donc ce polynôme-là… (*en direction de Lyd.)* Je voudrais que tu détailles un petit peu »
30. […]
31. P : « x>-7, d'où ce domaine de définition qu'elle a écrit, qui est exact :]-∞;-3[U]-1;+∞[.
[…]
32. (*Lyd. note (E) l'équation*) :

Sur Df (E)⇔ x∈]-∞;-3[U]-1;+∞[.
S={1;-4}

33. P : « Alors, le changement de décor, c'est que Df c'est plus le même. Et donc, cette fois-ci, on va accepter les deux solutions. Donc, l'autre équation avait une solution, celle-ci en a deux. Attention à l'importance de ces problèmes de domaine de définition quand on traite d'équations sur les logarithmes. On verra un exercice tout à l'heure pour illustrer cette histoire-là. Le suivant »

Ces extraits de la séance montrent la classe, ou tout au moins l'élève au tableau, en train d'accomplir un type de tâche T_1 : « résoudre une équation de la forme $\ln A(x)=\ln B(x)$ ou de la forme $\ln A(x)+\ln B(x)=\ln C(x)$, avec $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$ polynômes de degré au plus 2 ».
La technique τ_1 associée à T_1 se laisse décomposer de la manière suivante :
- τ_1^1 : Déterminer l'ensemble sur lequel les écritures des logarithmes ont un sens, ce que l'élève Lyd. nomme l'ensemble de définition

- τ_1^2 : Transformer, si nécessaire, l'équation donnée afin d'obtenir une équation équivalente du type lnP(x)=lnQ(x)
- τ_1^3 : Résoudre dans **R** l'équation P(x)=Q(x)
- τ_1^4 : Ne retenir, comme solutions de l'équation donnée, que les solutions de l'équation précédente qui appartiennent à l'ensemble déterminé grâce à τ_1^1

Les éléments technologiques associés aux τ_1^i sont les suivants :

EQ \o\al(\s\up4(*);\s\up-2(+))

- θ_1^2 : ln$a$+ln$b$=lnab avec a et b>0

EQ \o\al(\s\up4(*);\s\up-2(+)) sur **R**

avec θ_1^1 associé à τ_1^1 et τ_1^4, θ_1^2 associé à τ_1^2 et θ_1^3 associé à τ_1^3.

L'élément théorique Θ_1 est plus lointain. Il renvoie, pour les équations algébriques, à la structure de corps de **R** et, pour ce type d'équation logarithmique, au non-ostensif « isomorphisme ».

Dès le début de la séance, et pour la résolution de la première équation, cette technique τ_1 apparaît, ainsi que l'élément technologique θ_1^2, les autres éléments θ_1^j restant implicites :

1. *Lyd est au tableau et note l'énoncé de l'exercice que P lui dicte* :

ln(x+1)+ln(x+3)=ln(x+7)

Lyd. écrit :

Df={x∈R/x+1>0, x+3>0, x+7>0}

2. P : « Mets le son s'il te plaît ! »
3. Lyd : « L'ensemble de définition est :

Df=]-1 ; +∞[

4. P : « Bon. x doit être supérieur à -1, -3, -7. Donc ça nous donne]-1 ; +∞[«
5. Lyd. : « On sait que lna+lnb=lnab, donc :

ln((x+1)(x+3))=ln(x+7)
⇔ ln(x^2+4x+3)=ln(x+7)
⇔ x^2+4x+3=x+7

6. […]
7. Lyd. :

⇔ x^2+3x-4=0
Δ=

[…]
12. *Sous la dictée de P, Lyd. écrit* :

⇔ x=1 ou x=-4

« -4 il appartient pas au domaine de définition »
13. P : « Bon, bien… »
14. *Lyd. écrit* :

S={1}

θ_1^1 et θ_1^3 ne sont pas évoqués en ce début de séance, bien que θ_1^3 associée au fait que ln est **EQ \o\al(\s\up4(*);\s\up-2(+))** affleure dans les propos de P, plus loin dans la séance, à propos d'un exercice consacré à la résolution d'une inéquation :

40. *L'élève efface S et écrit Df, puis continue :*

$$\ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{3x-5} \geq 1$$

41. P : « Bon, c'est bien. C'est-à-dire que qu'est-ce qu'il a pensé et qu'il a pas écrit ?… »
42. Des élèves répondent : (*incompréhensible*)
43. P : « Il a pensé et il a pas écrit que ça, c'est :

$$\ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right) \geq \ln 1$$

et puis il a pensé mais il l'a pas dit… la fonction logarithme est… »
44. Un élève : « Croissante »
45. P : « Non seulement croissante, mais strictement croissante. On regardera ça tout à l'heure un peu plus en détail, mais quand une fonction est seulement croissante, vous ne pouvez pas déduire ça de ça (*P montre* $\frac{x+1}{3x-5} \geq 1$ *et* $\ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right) \geq \ln 1$).On ne peut le déduire que lorsque la fonction est strictement croissante ; on le regardera tout à l'heure de près. »

L'accomplissement de la tâche t_2 « résoudre l'équation $\ln(x^2+4x+3)=\ln(x+7)$ » qui suit, et qui appartient, elle-aussi, au type de tâche T_1, fait de même appel à τ_1, sans que les éléments technologiques soient davantage présents.

Du point de vue de l'organisation didactique, cette séance de correction réalise un moment d'institutionnalisation de l'organisation mathématique que nous venons de décrire ou plutôt, plus précisément, de la technique τ_1 associée à T_1. L'occasion est trouvée par P lors de la résolution d'une série de quatre exercices donnés à chercher dans la suite de la séance :

1) $\ln(x+3)+\ln(x+2)=\ln(x+11)$ 2) $\ln(x^2+5x+6)=\ln(x+11)$

3) $\ln(-x-2)=\ln\left(\frac{-x+11}{x+3}\right)$ 4) $\ln(-x-2)=\ln(-x-11)-\ln(x+3))$.

Ils constituent un exercice du baccalauréat 1972. Le but recherché lors de cette séance est d'enseigner aux élèves que, même si les équations algébriques auxquelles ils aboutissent pendant la résolution sont équivalentes, ils doivent cependant veiller à remarquer que les ensembles sur lesquels les équations logarithmiques sont définies étant différents, leurs solutions seront différentes.

Pour résoudre la première d'entre elles un élève, Bor., est envoyé au tableau ; ce qui donne lieu à l'échange suivant :

63. *Bor. écrit tandis que P lit à haute voix* :

ln[(x+3)(x+2)]=ln(x+11)

64. P : « L'idée dans une équation de ce type, c'est d'arriver à quelque chose qui soit

ln □=ln ○

et on transforme ça en ceci égale cela

⇔ □= ○

avec une équivalence sur le domaine de définition, bien sûr »
65. *Bor. écrit* :

ln(x^2+5x+6)=ln(x+11)

66. P : « Oui, alors là, on a le droit d'écrire simplement la même équation… après on fera des calculs, mais pour le moment on est arrivé à écrire ça »
P efface et écrit :

ln[(x+3)(x+2)]=ln(x+11)
⇔(x+3)(x+2)=(x+11)

« Et après, c'est plus que du petit calcul de début de première, c'est une équation du second degré »

Ainsi un autre élève qui, envoyé au tableau pour résoudre la deuxième équation, écrit :

74. L'élève écrit :

ln(x^2+5x+6)=ln(x+11) (A)
x^2+5x+6=x+11

se voit-il repris par P :

75. P : « Tu vas pas recopier ça, tu vas tout de suite ici » (*P montre* ⇔**(x=1) ou (x=-5))**

où 1 et -5 sont les solutions de la précédente équation du second degré ($x^2+4x-5=0$) à laquelle avait conduit la résolution de la première équation de cette série (seule la solution 1 était retenue car –5 n'appartient pas à l'ensemble de définition de cette première équation). L'exercice se termine alors de la façon suivante :

76. L'élève écrit :

(x=1) ou (x=-5)
S={1;-5}

77. P : « Cette fois-ci, notre deuxième solution -5, elle est dans le domaine de définition. C'est la seule chose qui change ici entre nos deux équations. Entre celle-ci et celle-là, c'est le domaine de définition. Vu ? Tout le monde a vu ? Qui veut venir faire la troisième ? »

La résolution des deux dernières équations s'effectue de la même manière et donne pour ensembles de solutions S_3={-5} et S_4=∅. Comme par ailleurs on avait S_1={1} et S_2={1 ;-5}, P peut conclure :

102. P : « …Donc vous voyez quatre équations qui ont donné lieu chaque fois à la même équation…, si on voulait transformer, etc… on trouverait chaque fois la même équation algébrique. Et puis, le domaine de définition n'est jamais le même, donc on a obtenu quatre sortes de solutions différentes. Bien hier j'ai eu la curiosité de résoudre ça avec la TI 92, et bien la TI 92, elle donne quatre fois {-1;5}. Alors, méfiez-vous comme de la peste de ce genre d'engins ! Alors, sachez que la TI 92 est tout à fait nulle dans les équations avec logarithme! Alors, moralité : quand on a une équation avec logarithmes, première chose qu'on fait, c'est qu'on regarde de près le domaine de définition. Vous voyez qu'on peut faire de grosses bêtises si on se contente de faire du calcul sans regarder… »

Cette séance de correction de sept exercices a ainsi permis d'institutionnaliser la technique τ_1 selon deux phases ; d'une part τ_1^2 : Transformer, si nécessaire, l'équation donnée afin d'obtenir une équation équivalente du type lnP(x)=lnQ(x) et τ_1^3 : Résoudre dans **R** l'équation P(x)=Q(x), et d'autre part, τ_1^4 : Ne retenir, comme solutions de l'équation donnée, que les solutions de l'équation précédente qui appartiennent à l'ensemble déterminé grâce à τ_1^1.

Des indices témoignent de ces deux temps d'institutionnalisation. Ainsi en est-il, pour τ_1^2 et τ_1^3, lorsque se produit l'épisode au cours duquel le professeur « invente » une écriture ostensive ; sans doute pour mieux montrer le geste à effectuer, et qui est associée à un discours explicatif sur la mise en œuvre de la technique :

64. P : « L'idée dans une équation de ce type, c'est d'arriver à quelque chose qui soit **ln□ =ln○** et on transforme ça en ceci égale cela **⇔ □ =○** avec une équivalence sur le domaine de définition, bien sûr »

Tandis que τ_1^4 et τ_1^1 sont soulignées avec insistance par le professeur au tour de parole 102.

Les élèves paraissent, par ailleurs, assez bien connaître τ_1^3, comme l'attestent les passages des deux premiers élèves au tableau qui, sans hésitation, ont écrit :

[5. Lyd…] **: $\ln(x^2+4x+3)=\ln(x+7) \Leftrightarrow x^2+4x+3=x+7$**

et

40. L'élève efface : $\mathbf{\ln(\frac{x+1}{3x-5}) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{3x-5} \geq 1}$

Même si les éléments technologiques qui la fondent restent implicites dans une large mesure, la technique est cependant institutionnalisée par P : d'une part à travers son évaluation puisqu'elle est acceptée comme valide tout au long des exercices, et d'autre part de manière explicite par le recours au symbolisme □ et ○ , à la place d'expressions algébriques. Cette manière de faire réalise une sorte d'algorithmisation, sans doute vue par le professeur comme pouvant faciliter l'apprentissage de la technique par les élèves[128]. Elle remplit par ailleurs cette fonction spécifique de l'institutionnalisation qui consiste à distinguer l'essentiel qu'il faut connaître, du subalterne. Celui-ci est constitué, lors de la séance, des différentes modalités de la mise en œuvre de la technique, à travers des exercices qui peuvent paraître différents en première approche, mais qui relèvent tous du même type de tâche donc de la même technique.

La séance du 4/2/98 se termine ainsi :

103. P : « Je vous propose d'autres équations :

2
a)(lnx)^2+lnx=2
b)lnx^2+lnx=2

Qu'est-ce que c'est le signe important là-dedans, qui change tout ? »
104. Une élève : « C'est la parenthèse »
105. P : « C'est la parenthèse. Souvent on oublie les parenthèses. »
P circule dans la classe tandis que les élèves recherchent l'exercice. La fin de l'heure sonne et les élèves ont à rechercher l'exercice pour le lendemain

3. 4. 3. 2. La portée de la technique appelée à disparaître s'étend cependant à travers la résolution d'équations plus complexes le 5 février 1998

- Où l'on retrouve la technique enseignée la veille

Lors de la séance du lendemain 5/2/98, nous nous intéressons à la mise en œuvre de la partie de la technique τ_1 constituée de τ_1^2 : Transformer l'équation afin d'obtenir lnA(x)=lnB(x), institutionnalisée le 4/2/98. Celle-ci apparaît à deux moments de l'utilisation des techniques τ_1' et τ_2' associées aux tâches t_1' et t_2', qui correspondent respectivement aux résolutions de la première puis de la deuxième équation. Nous ne détaillons pas au-delà des rencontres avec τ_1^2 l'organisation mathématique de cette séance, pour ne pas risquer de perdre le fil directeur de l'analyse.

Les dernières équations données le 4/2/98 font intervenir des expressions du second degré, soit en ln$x$, soit en x. Or ce type d'équations n'a pas été officiellement étudié : comme on l'a vu, P avait donné ces exercices en classe, mais n'avait pas eu le temps d'en engager la correction la veille. Ceci donne lieu à un petit débat avec la classe ; certains élèves (celui qui passe au tableau en fait partie) semblent avoir utilisé la technique standard par variable auxiliaire, d'autres ont utilisé la forme canonique du trinôme du second degré en ln$x$. Ne s'étant pas autorisé le recours au changement de variable, ils reviennent, pour plus de sûreté, à

[128] Pour montrer cette tentative d'algorithmisation, le professeur préfère utiliser un carré et un cercle, plutôt qu'une écriture du type A et B, ou encore A(x) et B(x), mathématiquement plus correcte ; on peut se demander pourquoi. Leur utilisation est peut-être considérée, aux yeux de P, comme risquant de venir rajouter une dimension ostensive à l'écriture et de brouiller alors la vision de la manipulation ostensive qui est ici l'objet d'enseignement ; certains élèves pouvant se demander ce qu'est A, B ou A(x) et B(x), et manquer l'important : lnA(x)=lnB(x)$\Leftrightarrow$A(x)=B(x) sur l'ensemble de définition.

la résolution par la forme canonique du trinôme, antérieure à l'usage du discriminant, puisqu'elle joue pour lui le rôle d'élément technologique. C'est ce qu'atteste le débat qui s'instaure au début de la résolution de $(\ln x)^2+\ln x=2$:

> 2. P : « Bon. On reconnaît, tout le monde l'a pas reconnu, hein ?… une équation du second degré en logarithme de x. Logarithme de x est la solution d'une équation du second degré, d'accord ? Tu avais pas vu ça Nac.? … En fait, tu t'es débrouillé… »
> 3. Nac. : « Non, non, on n'avait pas vu ça »
> 4. P : « Tu l'avais pas vu, alors que tu l'as résolue quand même. Tu as écrit la forme canonique, c'est du second degré, ça ! Tu as pas raccroché la forme canonique à du second degré »

En fait, et c'est le cas pour tout un groupe d'élèves de la classe, P s'aperçoit en regardant le cahier de Nac. que, pour résoudre cette équation, il a écrit une expression du type :

$(\ln x)^2+\ln x-2=0 \Leftrightarrow (\ln x+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}=0$.

Pendant ce temps, l'élève au tableau mène la résolution de l'équation, sous les conseils ou les récriminations de P et de ses camarades, ce qui donne les extraits suivants :

> 1. […]
> **(lnx)^2+lnx=2** **Df=]0;+∞[**
> **⇔(lnx)^2+lnx-2=0**
> 2. […]
> 3. […]
> 4. […]
> 5. *L'élève au tableau a écrit* :
>
> **On prend lnx=X**
> **⇔X^2+X-2=0**
> **⇔X=1 ou X=-2**
>
> 6.[…]
> 7. *L'élève écrit* :
>
> **⇔X=1 ou X=-2**
> **lnx=1**
>
> 8. […]
> 9. P : « C'est comment lnx=1 ? ! Tu apprends ton cours de temps en temps ? ! »
> 10. *P continue de vérifier le travail personnel des élèves, tandis que l'élève au tableau écrit* :
>
> **⇔lnx=1 ou lnx=-2**
> **⇔lnx=lne ou lnx=-2lne**
> **⇔x=e ou x=-2e**
>
> *Puis après quelques secondes de réflexion et consultation de ses camarades, il efface -2e et écrit* :
>
> **⇔x=e ou x=e^{-2}**
>
> 11. […]
> 12. *L'élève écrit* :
>
> **S={e;e^{-2}}**
>
> 13. P : « Bon, y'en a combien qui avaient trouvé ? 1, 2, 3 c'est tout ? 4 ! Alors, la deuxième maintenant. Tu la fais sur l'autre tableau. Tu me laisses celui-là » (*Tableau sur lequel est écrite la résolution de la première)*

Nous retrouvons l'élément technique τ_1^2 : Transformer l'équation afin d'obtenir lnA(x)=lnB(x), au tour de parole 10 :

10. *P continue de vérifier le travail personnel des élèves, tandis que l'élève au tableau écrit* :
$\Leftrightarrow$ lnx=1 ou lnx=-2
$\Leftrightarrow$ lnx=lne ou lnx=-2lne
$\Leftrightarrow$ x=e ou x=-2e
Puis après quelques secondes de réflexion et consultation de ses camarades, il efface -2e et écrit :
$\Leftrightarrow$ x=e ou x=e^{-2}

Au travers la mise en œuvre de la technique s'appuyant sur l'élément technologique θ_1^3 : La **EQ \o\al(\s\up4(*);\s\up-2(+))** sur **R** et qui permet d'utiliser ln$x$=ln$y \Leftrightarrow x=y$, cet épisode voit apparaître l'utilisation d'une technique τ', non encore routinisée pour l'élève au tableau, et qui est associée désormais à un nouveau sous-type de tâche *T*' : Résoudre l'équation ln$x$=n avec n entier relatif.
EQ \o\al(\s\up4(*);\s\up-2(+)), quel que soit $n \in \mathbf{Z}$: $n$ln$x$=lnx^n et θ_2' : e est l'unique réel dont le logarithme népérien est 1, qui ont été enseignés par P durant le cours sur le logarithme.
L'élève au tableau parvient, avec l'aide de P, à résoudre ln$x$=1. Il parvient encore à transformer ln$x$=-2 en ln$x$=-2ln$e$, mais trébuche dans la résolution de cette dernière équation pour laquelle il écrit x=-2e.
La technique τ', qu'il est nécessaire d'utiliser pour mener à bien la tâche consistant à transformer ln$x$=-2 en l$\square$ =l$\bigcirc$ (pour reprendre les notations utilisées par P), engage à travers θ_1' l'ostensif scriptural $n$ln$x$=lnx^n, qui est associé à l'élément technologique θ_2' : 1=ln$e$; ce qui permet d'écrire n=$n$ln$e$=lne^n. Cet ostensif, activé dans la technique permettant d'accomplir la sous-tâche consistant à transformer –2 en un logarithme, permet de transformer -2 en : -2(=-2×1)=-2ln$e$=lne^{-2}.
La réponse, « soufflée » par des élèves à l'élève au tableau, ne permet pas de montrer l'utilisation de l'ostensif au tableau puisque l'élève y écrit directement :
ln$x$=-2ln$e \Leftrightarrow x=e^{-2}$

On peut cependant supposer que celle-ci est déjà connue de certains élèves (notamment de ceux qui « soufflent » la réponse). Cette aide permet alors à l'élève au tableau d'apprendre « telle quelle » la technique, c'est-à-dire en conservant implicite la manipulation de l'ostensif, comme l'atteste le passage :

16. […]
Df=]0;+∞[

puis reprend

$\Leftrightarrow$ 2lnx+lnx=2
$\Leftrightarrow$ 3lnx=2lne

Puis il réfléchit quelques secondes et écrit :

$\Leftrightarrow$ x^3=e^2

La technique τ_1^2 : Transformer l'équation afin d'obtenir $\ln A(x)=\ln B(x)$ se complexifie ainsi du recours à une nouvelle technique τ_1', engageant l'ostensif e=ln1 et l'ostensif $n\ln x=\ln x^n$ (qui, ici et de façon un peu paradoxale, n'est pas montré !), afin d'accomplir le sous-type de tâche *T*' : Résoudre l'équation $\ln x=n$ avec n entier relatif.

- Une technique τ_1' appelée à mourir au profit d'une autre utilisation de l'ostensif

Le passage de l'écriture $x^3=e^2$ à la détermination de x pose problème pour l'élève au tableau, ce qui donne lieu à l'épisode suivant :

16. […] $\Leftrightarrow \mathbf{x = \sqrt[3]{e^2}}$ $\Leftrightarrow \mathbf{x = \sqrt{e}}$ 17. P : « Quoi, quoi, quoi ? Tu simplifies par ln de…! » 18. *L'élève efface* $\Leftrightarrow \mathbf{x = \sqrt{e}}$ 19. P : « Alors, écoute-moi ! Qu'est-ce que ça veut dire ? Ça veut dire que si tu mets ce nombre-là au cube tu trouveras e^2, d'accord ? Si tu mets : $\mathbf{\left(\sqrt{e}\right)^3}$ qu'est-ce que tu vas trouver ? Tu vas trouver… 20. L'élève : « $e\sqrt{e}$ » 21. P : « Tu vas trouver $e\sqrt{e}$, pas e^2 $\mathbf{\left(\sqrt{e}\right)^3 = e\sqrt{e}}$ Attention !… Bon, c'est vrai qu'on n'a pas vu encore les puissances fractionnaires !… Ça va ?… C'est-à-dire que pour rédiger ça, on va plutôt rédiger, puisqu'on n'a pas vu les exposants fractionnaires… *(P rajoute)* $\mathbf{\Leftrightarrow 3\ln x=2\ln e \Leftrightarrow \ln(x^3)=\ln(e^2)}$ **Donc** $\mathbf{x^3=e^2}$ **donc** $\mathbf{x=\sqrt[3]{e^2}}$

Cet épisode est intéressant si on le regarde du point de vue des interventions de P qui, à première vue, peuvent paraître assez curieuses.

Tout d'abord, l'erreur commise par l'élève qui écrit « $\sqrt[3]{e^2} = \sqrt{e}$ » est interprétée par P comme une « simplification par ln de… ». Est-ce une réminiscence chez P de souvenirs de discours d'élèves qui, parvenus à $\ln x=\ln y$, écrivent $x=y$ en justifiant par « on simplifie par ln » ?… Cette intervention de P correspond effectivement à ce qu'elle aurait pu dire à cette étape de la technique mise en œuvre par l'élève au cours de sa résolution, si l'élève avait écrit $\ln x^3=\ln e^2$. Mais on a vu que, pour cet élève, cette étape n'est pas explicitée puisqu'il passe directement de $3\ln x=2\ln e$ à $x^3=e^2$, sans écrire $\ln x^3=\ln e^2$. (en omettant l'usage explicite de l'ostensif). Cette première intervention constitue, en tout cas, une référence implicite par P à la technique τ_1^2 sur laquelle repose depuis la séance de la veille la résolution de ces équations.

La référence à cette technique τ_1[2] est, par contre, tout à fait explicite (passages soulignés) dans le petit discours contenu dans la longue intervention de P (21), à l'issue de la correction des deux exercices, et qui joue le rôle d'une synthèse et d'une institutionnalisation des techniques à mettre en œuvre pour résoudre ce type d'équations en logarithme faisant intervenir des carrés :

> 21. P : […]
> Donc on est conduit à faire un changement de variable. En le voyant vous devez être capables de reconnaître que ça c'est un truc où lnx joue un rôle de variable. Donc d'abord je vais chercher lnx, c'est-à-dire que d'abord je vais travailler sur cette histoire de carré et après je travaillerai à ce niveau-là *(P montre* lnx=X*)*. Alors qu'ici *(sous* $(\ln x)^2$*)*, c'est logarithme de quelque chose plus logarithme de quelque chose égale 2. Je vais transformer ça, je sais transformer ça, en logarithme de machin égale logarithme de truc. Et donc tout de suite, en voyant ça, vous devez être capables, tout de suite, de comprendre que vous n'allez pas faire du tout la même chose, qu'ici (*sous* $(\ln x^2)$*)* vous allez vous ramener à logarithme de machin égale logarithme de truc :
> ln □ = ln ○
> et ici *(sous* $(\ln x)^2$*)* vous allez vous ramener à ça *(P montre* X^2+X-2*)*, d'accord ? Alors quand vous avez une équation avec des logarithmes, c'est toujours l'un des cas qui se passe. Alors, on a vu que, hier, y'a un premier problème, toujours, c'est le problème du domaine de définition, c'est un problème très important. La deuxième chose qu'il faut voir, c'est que tantôt on se ramènera à ça *(P montre sous*$(\ln x^2)$*)*, et que tantôt on se ramènera à ça *(P montre sous* $(\ln x)^2$*)*. Suivant que le logarithme joue un rôle d'inconnue, vous pouvez toujours vous ramener à une forme où le logarithme joue un rôle de variable. Ou bien alors, vous pouvez transformer votre équation en logarithme de quelque chose égale logarithme d'autre chose. Voilà, quand vous avez compris ça, vous pouvez faire toutes les équations en logarithmes possibles. Alors on va regarder des systèmes. »

Ce discours porte d'abord sur le changement de variable justifié par la composition des fonctions ln et carré, puis on retrouve, comme dans la séance précédente, le renvoi à trois reprises à la technique (passages soulignés dans le texte) s'appuyant sur l'élément technologique θ_1[3] constitué de la bijectivité de la fonction ln. Il correspond à une mémoire ostensive pour la classe, ce trait étant souligné par l'utilisation d'une expression telle que « Je vais transformer ça, je sais transformer ça, en logarithme de machin égale logarithme de truc » qui renvoie à l'écriture ostensive utilisée la veille, lors du moment de l'institutionnalisation de la technique algorithmisée sous la forme ln□ =ln○ que l'on retrouve ici. On peut noter que l'absence, peut-être volontaire ici, d'ostensifs langagiers pour nommer et commenter la technique décrite avec insistance, entraîne l'absence d'évocation de la technologie. Celle-ci se résume pourtant en « f étant bijective, x et y appartenant à D_f : $f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y$ »
Une autre remarque porte sur le fait que l'erreur commise par l'élève est prise à son compte pour partie par P, qui justifie ainsi l'écriture produite par l'élève :

> 21. « […]
> Attention !… Bon, c'est vrai qu'on n'a pas vu encore les puissances fractionnaires !… Ça va ?… C'est-à-dire que pour rédiger ça, on va plutôt rédiger, puisqu'on n'a pas vu les exposants fractionnaires… […] »

P indique ici, à deux reprises, que le problème rencontré relève aussi d'un savoir qui n'a pas encore été enseigné (le savoir relatif aux exposants fractionnaires). L'erreur est donc pour partie imputable à P qui n'a pas pu maîtriser cet avancement, inopiné, du temps didactique et qui en assume sa part. C'est ce qu'indiquent des phrases telles que : « c'est vrai qu'on n'a pas vu …», « c'est-à-dire que pour rédiger ça, […] puisqu'on n'a a pas vu… ».
Ce faisant, P sous-entend dans son discours à la classe que, lorsque l'avancée du temps didactique l'aura permis (lorsque les exposants fractionnaires auront été étudiés), une

nouvelle technique sera disponible, et se substituera à τ_1^2, pour accomplir le type de tâche demandé ici : résoudre une équation de la forme $n\ln x=m\ln x$ avec $n\in\mathbf{N}$ et $m\in\mathbf{N}$, et que cette technique utilise les exposants fractionnaires. Pourtant, la résolution de l'équation de l'exercice donné à chercher à la classe amène, en ce point, la question de l'autorisation ou pas d'étendre la manipulation ostensive $n\ln x=\ln x^n$ à $p/q\ln x=\ln x^{p/q}$. L'intervention de P indique donc que ce n'est pas le moment de chercher un exposé technologique qui viendrait pourtant justifier ou invalider la pertinence d'une écriture du type $x^{p/q}$. Il aurait cependant été possible, à cet instant de la résolution, de tenter de faire dévolution à la classe de la question qui se pose ici : la possibilité d'étendre ou pas une manipulation ostensive et, si cela est possible, l'économie qui en résulte dans les calculs. Ce qui est une des raisons d'être de cette écriture en exposant fractionnaire.

Par ailleurs, P indique que la non-connaissance de cette technique contraint, pour l'accomplissement de la tâche ici rencontrée (résoudre $2\ln x+\ln x=2$), à l'utilisation d'une autre technique que P expose par la suite (mais toujours dans son intervention 21) et qui s'appuie :
- sur la connaissance de l'élément technologique θ_2' : $\ln e=1$
- sur la technique qui en découle et qui consiste à écrire l'entier naturel n sous la forme $n\ln e$; ces deux premiers points ayant été étudiés tout au long de la séance de la veille
- sur l'utilisation de l'ostensif contenu dans l'élément technologique θ_1' : $n\ln x=\ln x^n$:

21. « […] … on va plutôt rédiger, puisqu'on n'a pas vu les exposants fractionnaires… *(P rajoute)* **$\Leftrightarrow 3\ln x=2\ln e\Leftrightarrow \ln(x^3)=\ln(e^2)$»**

- sur l'élément technologique $\theta_1{}^3$ maintes fois évoqué par P, mais non explicitement écrit, dont on déduit $\ln x=\ln y\Leftrightarrow x=y$, et qui permet à P de rédiger ici :

21. « […] ….**$\Leftrightarrow \ln(x^3)=\ln(e^2)$**. Donc **$x^3=e^2$** donc **$x=\sqrt[3]{e^2}$** […] »

- sur la connaissance de l'ostensif racine cubique, ce qui semble être disponible dans la classe puisque l'élève au tableau a pu écrire sans problème **$x=\sqrt[3]{e^2}$** [129]**.**

En invoquant l'absence temporaire de la connaissance des exposants fractionnaires, P a par

[129] Le programme de Terminale S mentionne effectivement « notation $\sqrt[p]{x}$ (x positif) », mais dans la partie consacrée aux « Fonctions puissances $x\to x^n$ (x réel et n entier) et $x\to x^\alpha$ (x strictement positif et α réel) […]. Cas où $\alpha=\frac{1}{n}$ (n entier positif) ; notation $\sqrt[p]{x}$ (x positif) », et non dans la partie relative aux nombres complexes où il est précisé : « […] l'étude des racines n-ièmes de l'unité [est] hors programme » (B. O. hors série n°4 du 12 juin 1997). Or si l'étude des complexes a été menée à ce moment de l'année dans cette classe, celle des fonctions puissances n'est pas commencée. Il est donc étonnant de voir apparaître une écriture du type $\sqrt[p]{x}$. On la trouve cependant dans le manuel de la classe (Collection Terracher), en page 28 relative au chapitre sur les nombres complexes, dans laquelle, un paragraphe relatif à une « présentation historique », mentionne la formule de Cardan. C'est peut-être à cette occasion que les élèves ont rencontré cette notation pour la racine cubique.

ailleurs indiqué que la technique qui vient d'être montrée sera rendue obsolète lorsque les exposants fractionnaires auront été enseignés. P indique donc la mort prochaine de ce qui vient d'être enseigné et son recouvrement par une technique découlant d'un savoir à venir. C'est effectivement ce qu'auront retenu les élèves après quelque temps d'apprentissage des techniques relatives à la résolution d'équations logarithmiques, comme nous le verrons par la suite.

3. 5. La manipulation ostensive génère l'avancée du temps didactique et l'organisation de la mémoire

3. 5. 1. La manipulation ostensive fait avancer le temps didactique

Comme il a été vu, P s'interdit dans cette séance du 5/2/98 l'utilisation de la technique qui aurait conduit à l'obtention de $e^{\frac{2}{3}}$, en résolvant de la manière suivante :

$$
\begin{aligned}
&\ln x^2+\ln x=2\\
&\Leftrightarrow 2\ln x+\ln x=2 \text{ (utilisation de l'ostensif } \ln x^{\mathrm{n}}=\mathrm{n}\ln x\text{)}\\
&\Leftrightarrow 3\ln x=2\\
&\Leftrightarrow \ln x=\frac{2}{3}\\
&\Leftrightarrow \ln x=\frac{2}{3}\ln \mathrm{e} \text{ (utilisation de } 1=\ln \mathrm{e}\text{)}\\
&\Leftrightarrow \ln x=\ln e^{\frac{2}{3}} \text{ (utilisation de l'ostensif } \frac{p}{q}\ln x=\ln x^{\frac{p}{q}}\text{)}\\
&\Leftrightarrow x=e^{\frac{2}{3}}
\end{aligned}
$$

Dans ce cas en effet, l'usage de l'ostensif va alors plus loin que ce que le projet de P avait prévu lorsque l'exercice a été donné. L'avant-dernière étape du calcul conduit, si l'on suit la logique pratique commandée par l'écriture ostensive #ln$x$=ln$x^{\#}$, à écrire : $\frac{2}{3}\ln \mathrm{e}= \ln e^{\frac{2}{3}}$

Or, à cet instant du temps didactique, aucun élément technologique ne peut venir justifier l'écriture d'un exposant fractionnaire, en particulier aucune définition. La seule disponible a été donnée au Collège, et porte sur l'opération d'élévation à une puissance comme résultant d'un produit de facteurs égaux entre eux ; elle n'a donc de sens qu'en référence à un exposant entier. La logique pratique qui aurait conduit à l'écriture $e^{2/3}$, vient se heurter à la logique des organisations mathématiques qui veut qu'une écriture ostensive, tout comme une technique, soit justifiée par un élément technologique de savoir. L'enseignement de cet élément technologique est inscrit dans la progression didactique : il s'agit des fonctions $x \rightarrow x^{\alpha}$, avec $x>0$. Or, la définition de x^{α} suppose la connaissance de la fonction exponentielle puisque $x^{\alpha}=e^{\alpha \ln x}$. Dans l'organisation didactique mise en place par le professeur de la classe, l'ordre d'exposition du savoir est le suivant : logarithme, puis exponentielle et enfin fonctions puissances. Aussi, ne pouvant justifier, à cet instant du déroulement chronologique de l'exposé du savoir, la possible apparition d'une écriture du type x^{α}, le professeur décide-t-il de l'éviter en recourant à un autre ostensif, $\sqrt[3]{}$, dont la justification technologique paraît moins coûteuse puisqu'elle renvoie, dans une complicité plus facile à obtenir des élèves, à la fonction réciproque d'une fonction puissance entière.

Cependant la pratique des mathématiques induit la production d'ostensifs, en tant qu'outils pour cette pratique, qui à leur tour créent des objets :
- dans le domaine du savoir mathématique (par exemple les usages ostensifs du logarithme et de l'exponentielle permettront d'écrire et de manipuler ultérieurement des objets tels que $\ln z$ avec $z \in \mathbf{C}$ ou $e^{i\theta}$)
- dans le domaine d'un usage qui ne sera pas officiellement reconnu comme mathématiquement correct dans une institution donnée (par exemple, en classe de troisième, l'écriture $\sqrt{-1}$ pourra être jugée aussi incorrecte que l'écriture $(a+b)^2=a^2+b^2$, ou bien l'usage de négatifs pourra apparaître à l'école primaire dans des exercices relatifs aux opérateurs (Mercier 1978) sans que les nombres relatifs y aient une existence officielle).

Cet usage peut être exploré, et P en dirigera l'exploration plus loin dans l'avancée du temps didactique. Ainsi la manipulation ostensive relative à la technique de résolution qui vient d'être décrite, mais qui n'a pas été utilisée par P, permettrait de rencontrer, si elle était montrée à ce moment à la classe :
- la question de la résolution de l'équation $\ln x=\frac{2}{3}$, dont la réponse est contenue dans l'étude de la fonction exponentielle
- la question de la légitimité de l'écriture $\frac{2}{3}\ln e= \ln e^{\frac{2}{3}}$, dont la réponse est contenue dans l'étude de la compatibilité de la définition de a^x avec l'écriture ostensive $\ln a^x=x\ln a$ ($a>0$), c'est-à-dire l'extension de l'utilisation de l'ostensif à des réels quelconques
- la question du sens de l'écriture $e^{\frac{2}{3}}$ produite par la généralisation de l'usage de l'ostensif à des réels non entiers

Comme on le voit sur cet exemple, le geste, commandé par l'ostensif, crée dans ce cas un objet qui fait avancer considérablement le temps didactique, car il ouvre le champ pour de nombreuses questions dont l'enseignement des chapitres à venir (relatifs à la fonction exponentielle et aux fonctions puissances) contient les réponses. Aussi peut-on faire raisonnablement l'hypothèse que cette avancée fortuite du temps didactique est jugée trop importante aux yeux de P, pour diverses raisons que l'on peut imaginer : non-maîtrise par P de l'avancée du temps didactique - cette avancée supposant dans le contrat didactique traditionnel que la technologie justifiant l'autorisation de l'usage de la technique par les élèves ait été préalablement enseignée -, « brouillage » avec la technique de résolution que P est entrain d'enseigner, « ouverture » d'un nouveau champ de questions que P ne veut pas voir traitées maintenant, etc. P fait ainsi le choix de « tuer » cet objet ostensif qui n'a pas encore de dimension non ostensive, c'est-à-dire de dimension relative à des « concepts » tels ceux d'exponentielle ou d'exposant non entier, et qui ne peut être justifié, de son point de vue, par aucune technologie.

On peut tenter de se placer maintenant du point de vue d'un élève qui aurait, de son propre chef, et lors de la recherche de l'exercice, étendu aux rationnels l'usage du geste commandé par l'ostensif, alors qu'il n'est officiellement autorisé que sur les entiers à ce moment de

l'avancée du temps didactique. Autrement dit, du point de vue d'un élève s'autorisant à accomplir un geste qui va plus loin que le seul domaine d'application sur lequel il a été provisoirement enseigné, un peu à la manière des élèves lorsqu'ils étendent indûment les gestes commandés par la proportionnalité dans le cas où les droites ne sont pas parallèles, dans le « problème des arbres » vu en 3.2.
Sans doute cet élève aurait-il au moins pris la correction de l'exercice telle qu'elle est donnée ce jour-là dans la classe, et peut-être se serait-il enquis auprès de P de la validité de sa solution. Mais aucune intervention d'élève à ce propos ne se produit durant la séquence enregistrée. Ceci permet donc de supposer qu'aucun élève n'a procédé ainsi ou que, si cela a été le cas, alors cette façon de faire n'a pas à être officiellement conservée dans la mémoire ostensive de la classe. P n'en dit effectivement pas plus, à son sujet, qu'une simple évocation d'exposants fractionnaires non encore enseignés. Puisque aucun épisode de ce type ne s'est produit, pour un élève qui aurait pris l'initiative « d'étendre le geste » - si un tel élève existe - il y a injonction de renvoyer dans le domaine privé de ses connaissances cette manière de faire. Il pourra alors la considérer comme erronée, ou au moins non encore autorisée, en particulier dans le cas d'un redoublant qui aurait déjà des connaissances antérieures sur ce sujet. Le traitement de cette partie de la séquence, relative à la correction de l'exercice, induit, en tout état de cause, le rejet de cette éventuelle pratique, de la mémoire didactique officielle, publique, donc de la mémoire ostensive.

Ainsi, à cet instant de l'avancée du temps didactique, existe bien une certaine écriture ostensive $x\ln a=\ln a^x$. Mais, par contre, est absent le non-ostensif « exponentielle de base a » qui, dans l'organisation traditionnelle de l'enseignement des mathématiques, apparaît dans les chapitres suivants pour jouer un double rôle : celui d'objet nouveau permettant au professeur de faire avancer le temps didactique, et celui d'élément technologique justifiant la pratique ostensive étendue à d'autres nombres que des entiers, ce second rôle étant subordonné au premier.
On pourrait cependant imaginer sur ce point, comme nous l'avons déjà souligné, une autre manière d'avancer dans le temps didactique, où la recherche du domaine de validité des pratiques ostensives serait le « moteur » de l'avancée du temps didactique, où l'extension de la pratique à $x\ln a=\ln a^x$, quels que soient a et x, permettrait de s'interroger sur la définition, les propriétés et les règles d'action à construire, bref sur « le sens » d'une écriture a^x, pour pouvoir autoriser cette extension.
Mais, cette possibilité d'une participation des élèves à l'avancée du temps didactique, pour s'interroger sur l'émergence et la pertinence d'un savoir nouveau, au cours d'une phase a-didactique d'action qui aurait alors réalisé le moment d'une première rencontre, n'existe pas ici. La mémoire didactique officielle, celle qui est tout à la fois pratique et ostensive et autour de laquelle vont se retrouver élèves et professeur, ne retient donc à cet instant que l'autorisation du geste pour les entiers. Son extension à d'autres nombres relevant du domaine du professeur, celle-ci renvoie seulement à la mémoire didactique personnelle du professeur.
Il y a ainsi, du côté des élèves, une sorte d'interdit partiel de la mémoire du geste : « souvenez-vous en uniquement pour des entiers ! » pourrait être l'injonction qui leur est

implicitement adressée. Une question demeure ouverte cependant : se peut-il que certains « bons sujets » aient compris le contraire et puissent anticiper ?
Quoi qu'il en soit, cet interdit porte sur la possibilité pour des élèves de s'immiscer dans un certain travail technologique. Dans ce type de style didactique, celui-ci reste essentiellement assuré par le professeur, et vient justifier l'autorisation de l'utilisation, par les élèves, des techniques associées. La place de l'élève, son *topos*, se réduit à une sorte de taylorisme mathématique : appliquer correctement des techniques au bon moment de l'avancée de la chaîne didactique. On retrouve, à travers cet épisode didactique, un phénomène identifié par Mercier (1992, p. 115) : un certain assujettissement au temps didactique provoque des manques technologiques dans l'apprentissage.

3. 5. 2. La réorganisation du savoir opérée par l'avancée du temps didactique

3. 5. 2. 1. Deux élèves visionnent les séances des 4 et 5 février 1998

Chacun des élèves est respectivement désigné par G (garçon) et F (fille), les questions posées par l'enquêteur sont repérées par Q. La rencontre a lieu le 25 mars 1998, plus d'un mois et demi après les cours des 4 et 5 février, filmés par l'enquêteur dans la Terminale S où G et F sont élèves. G et F ont été présentés par P comme étant de bons élèves ; ce sont donc de « bons sujets » de l'institution. Le professeur a lui-aussi, quelques jours auparavant, visionné le film de ces séquences. Il lui était demandé de le commenter lorsqu'il le souhaitait. Puis, il a demandé à deux élèves volontaires de la classe de se soumettre aux mêmes modalités.
Pour ces cours d'une durée de deux heures, une heure seulement (correspondant au temps consacré au thème observé) a été filmée chaque jour. Depuis, de nouveaux chapitres ont été étudiés, notamment en analyse où ont été enseignées la fonction exponentielle et les fonctions puissances, ainsi qu'un chapitre sur le barycentre, et il y a eu l'interruption due aux vacances d'hiver. Les élèves visionnent les deux séquences de cours dans une petite salle du lycée équipée d'un magnétoscope et d'une télévision, tandis que l'enquêteur pose des questions. L'entretien est enregistré à l'aide d'un magnétophone. Nous avons ainsi créé une micro institution pour l'observation de deux « bons sujets », à la durée de vie très courte, et telle que nous avons pu la définir en 3. 3. Un décalage temporel est créé, la pratique consiste à parler de ces pratiques passées, le film qui se déroule, outre la situation inhabituelle dans laquelle il plonge les deux élèves, a aussi pour fonction de leur faciliter la possibilité de « se replacer au point de vue du groupe » auquel ils appartenaient.

Lorsque cela est nécessaire pour la compréhension de l'entretien, la transcription du cours qui est *visionné* est notée *en italique*. Les numéros notés en début de ligne sont ceux qui correspondent aux tours de parole de G, F et Q dans l'extrait de l'entretien qui est utilisé ici. *Les numéros notés en italique* sont ceux des tours de parole de la séquence qui est *visionnée* par les élèves. L'intégralité du protocole figure en annexe.

L'entretien avec G et F avait débuté de la manière suivante, avec le visionnage du cours filmé du 4/2/98 :

Q : «Vous vous rappelez quand je suis venu, le cours portait sur quoi ? »
G&F : « Logarithme »
Q : « Logarithme… J'ai filmé la classe, peut-être que vous allez vous revoir. Je voudrais que vous me disiez, au fur et à mesure qu'on avance dans les exercices, des différents épisodes qui se passent dans la classe ou au tableau, etc. à quoi vous, vous pensiez à ce moment-là. Essayez de faire cet effort de rappel : ce que ça évoquait, les questions que vous vous posiez, etc. Bon, on commence. Ça, c'étaient des exercices qui étaient à faire pour la séance ?… »
G&F : « Oui »
1. Q : « Vous, vous aviez su les faire ? »
G&F : « Oui »
F : « Je crois »
Q : « Toi, tu les avais faits ? »
G : « Oui, mais en fait je m'étais un peu compliqué la vie, parce qu'on pouvait d'abord faire l'ensemble de définition et ensuite résoudre. Moi, j'ai d'abord résolu et j'ai dit ça, ça appartient pas à l'ensemble de définition et tout ça, donc… c'est plus simple comme ça »

Après avoir visionné une grande partie de l'heure de cours du 4/2/98, on passe à l'heure du 5/2/98 et l'enregistrement de l'entretien débute par la vision de la séquence suivante :

1. Un élève est désigné pour corriger les exercices donnés la veille. Il écrit :

$(lnx)^2+lnx=2$
$(lnx^2)+lnx=2$

Puis :

$(lnx)^2+lnx=2$ ***$Df=]0;+\infty[$***
$\Leftrightarrow (lnx)^2+lnx-2=0$

Puis, en direction de P, il fait le geste d'un X à la place de lnx
Q : « Ça, c'étaient des équations que P vous avait données à chercher la veille. Et là, vous vous étiez dit quoi quand vous êtes partis dans la résolution, parce qu'elles sont quand même un petit peu différentes ? »
G : « P nous les a données à la fin de l'heure. On avait cinq minutes pour les faire. Moi, au départ j'avais pas de suite reconnu qu'on pouvait avoir… comme équation du second degré $X^2+X=2$, alors j'avais commencé par le développer, bon… ça faisait rien. Puis après, je me suis dit : Ah oui mais, bon…, après j'ai pensé »
Q : « Et toi ? »
F : « Moi, j'avais traité les deux. J'avais pas fait attention. J'avais traité $(\ln x)^2$ comme $\ln x^2$. Je trouvais deux fois le même résultat »

Les élèves paraissent donc avoir, malgré la distance temporelle, un assez bon souvenir de cette séquence de cours, des questions qu'ils s'étaient posées, des erreurs qu'ils avaient commises, et ils répondent volontiers aux questions qui leur sont posées.

3. 5. 2. 2. L'apprentissage de l'usage de l'ostensif permet de réinterpréter le passé

Dans le film de la séquence, après avoir résolu $(\ln x)^2+\ln x=2$, l'élève au tableau se lance ensuite dans la résolution de $\ln x^2+\ln x=2$ et se produit alors l'épisode suivant que nous avons analysé précédemment :

16. L'élève écrit : ***Df=]0;+∞[*** *puis reprend* $\Leftrightarrow$ ***2lnx+lnx=2*** $\Leftrightarrow$ ***3lnx=2lne*** *Puis il réfléchit quelques secondes et écrit :* $\Leftrightarrow x^3=e^2$ $\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{e^2}$ $\Leftrightarrow x=\sqrt{e}$ *17. P : « Quoi, quoi, quoi ? Tu simplifies par ln de…! »* *18. L'élève efface* $x=\sqrt{e}$ *19. P : « Alors, écoute-moi ! Qu'est-ce que ça veut dire* $\sqrt[3]{e^2}$ *? Ça veut dire que si tu mets ce nombre-là au cube tu trouveras* e^2*, d'accord ? Si tu mets :* $(\sqrt{e})^3$ *qu'est-ce que tu vas trouver ? Tu vas trouver…* *20. L'élève : «* $e\sqrt{e}$ *»* *21. P : « Tu vas trouver* $e\sqrt{e}$ *, pas* e^2 $(\sqrt{e})^3=e\sqrt{e}$ *Attention !... Bon, c'est vrai qu'on n'a pas vu encore les puissances fractionnaires!... Ça va ? ... C'est-à-dire que pour rédiger ça, on va plutôt rédiger, puisqu'on n'a pas vu les exposants fractionnaires… (P rajoute)* $\Leftrightarrow$ ***3lnx=2lne*** $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{ln(x^3)=ln(e^2)}$ ***Donc*** $\boldsymbol{x^3=e^2}$ ***donc*** $\boldsymbol{x=\sqrt[3]{e^2}}$

Cet épisode donne lieu, dans l'entretien avec F et G, à l'échange suivant :

1. *16.* Q : « Et là, vous, vous faites comment ? Parce qu'il a l'air d'être embarrassé… » 2. F : « Moi, j'avais marqué lnx= $\frac{2}{3}$ » 3. G : « Voilà, ouais » 4. Q : « Et là ? » 5. F : « Et après» 6. G : « x= $e^{\frac{2}{3}}$ » 7. F : « x= $e^{\frac{2}{3}}$, oui » 8. Q : « Donc, vous êtes pas passés par ça *(*$\sqrt[3]{e^2}$ *qui est écrit au tableau)* ? » 9. F : « Non » 10. Q : « Vous aviez appris en cours à passer de… à résoudre une équation en logarithme de x égale a ? » 11. G : « Oui, on l'avait marqué. On avait pris un exemple je pense. A la fin de la leçon, P avait dit lnx=3, je crois… » 12. Q : « Et d'écrire $e^{\frac{2}{3}}$, ça vous gênait pas ?… »

13. G : « Non, non. En fait on avait fait comme ça : 2, c'est 2lne, donc égale $\ln e^2$. Donc dès qu'on avait $\ln x=3$, donc $x= e^3$ »

On retrouve ici l'efficacité de la manipulation de l'ostensif, mise en œuvre dans la technique de résolution de l'équation $\ln x=n$ (avec *n entier naturel*), que rappelle P dans l'extrait cité de son intervention *21* ($3\ln x=2\ln e \Leftrightarrow \ln(x^3)=\ln(e^2)$ *donc* $x^3=e^2$).

Mais à la différence de P qui expose la mise en œuvre correcte de celui-ci *à ce moment de l'avancée du temps didactique* (rappelons que la classe vient d'étudier le chapitre sur le logarithme, mais que ni l'exponentielle, ni les fonctions puissances n'ont alors été étudiées), en s'appuyant sur la technique institutionnalisée la veille :
$\ln x=n \Leftrightarrow \ln x=n\ln e \Leftrightarrow \ln x=\ln e^n \Leftrightarrow x=e^n$ **avec** $\boldsymbol{n\in\mathbf{N}}$
G évoque ici l'ostensif, correctement présenté sur les exemples qu'il cite en 13 (avec les *entiers naturels* 2 et 3), mais pour justifier sa manipulation dans un autre domaine :
$\ln x=p/q \Leftrightarrow x=e^{p/q}$ **avec** $\boldsymbol{p/q\in\mathbf{Q}}$, ce qui autorise l'écriture $\ln x=2/3 \Leftrightarrow x=e^{2/3}$
et *en omettant les deux étapes* :
$\Leftrightarrow \ln x=n\ln e$
$\Leftrightarrow \ln x=\ln e^n$ (G et F sous-entendent qu'ils utilisent cette technique dans 2 à 9).

Or cette technique est la technique-standard à la date du visionnement de la séance, et elle est sans doute routinisée au moment où G et F regardent le film de la séquence, et qui consiste à résoudre de la manière suivante :
$\ln x=\alpha \Leftrightarrow x=e^\alpha$ **avec** $\boldsymbol{\alpha\in\mathbf{R}}$

Cette technique suppose, du point de vue de P, que soient au moins disponibles l'écriture et la notation conventionnelles : $\exp(x)=e^x$. Or celles-ci n'apparaissent, dans l'ordre didactique et mathématique, qu'avec le cours sur l'exponentielle qui suit traditionnellement le cours sur le logarithme ; et c'est cet ordre que P a suivi. Du point de vue des élèves questionnés, par contre, il est naturel désormais qu'ait été inventée l'écriture e^α avec $\alpha\in\mathbf{R}$, puisque la recherche de x, à partir de son logarithme, y conduit, et que c'est la raison d'être de l'exponentielle.

Du point de vue qui est celui de P au moment où l'épisode se produit, on a vu précédemment qu'il y a risque (pour P au moins chez qui la technique utilisant un exposant non entier est évidemment routinisée) qu'apparaisse, à ce moment de la correction de l'exercice, une écriture d'exposant fractionnaire. C'est ce que P indique pour elle-même, mais à haute voix, dans l'extrait suivant de *21* :

Attention !... Bon, c'est vrai qu'on n'a pas vu encore les puissances fractionnaires !... Ça va ?... C'est-à-dire que pour rédiger ça, on va plutôt rédiger, puisqu'on n'a pas vu les exposants fractionnaires... (P rajoute) $\boldsymbol{\Leftrightarrow 3\ln x=2\ln e \Leftrightarrow \ln(x^3)=\ln(e^2)}$

afin de se conformer à l'utilisation des seules techniques alors disponibles à ce moment du temps didactique. Pour un élève, à ce moment du temps didactique, il y a effectivement la possibilité que son imagination pratique le conduise à une extension de l'usage de l'écriture ostensive.

Remarquons, une fois de plus, que P a indiqué, par son intervention, que la technique qu'elle montre est rendue nécessaire « puisqu'on n'a pas vu les exposants fractionnaires », et qu'elle sous-entend ainsi, en filigrane, qu'elle sera obsolète lorsque ceux-ci auront été « vus ». Et en effet, ceux-ci ne sont pas effectivement disponibles officiellement à ce moment pour les élèves de la classe puisque l'élève au tableau ne les utilise pas et écrit dans *16* sans susciter de protestations de quiconque :

⇔2lnx+lnx=2
⇔3lnx=2lne
Puis il réfléchit quelques secondes et écrit :
⇔ $x^3=e^2$
⇔ $x=\sqrt[3]{e^2}$

en omettant seulement le passage :
$3\ln x=2\ln e \Leftrightarrow \ln x^3=\ln e^2$
mais après avoir réfléchi quelques secondes, ce qui laisse à penser que la technique attendue de P à ce moment du temps didactique a été effectivement mise en œuvre « dans sa tête » mais non écrite[130].

3. 5. 2. 3. Un travail de réorganisation du passé pour répondre aux questions présentes

F et G ont, dès le début de l'entretien, explicité la technique qu'ils disent avoir utilisée dans la résolution de l'équation demandée pour le 5 février :

2. F : « Moi, j'avais marqué lnx= $\frac{2}{3}$ … »
3. G : « Voilà, ouais »
4. Q : « Et là ? »
5. F : « Et après»

[130] On peut remarquer que l'extrait suivant de son passage au tableau, antérieur à l'épisode analysé ci-dessus et tandis que cet élève termine la résolution de la première équation, montre qu'il a depuis lors appris :

7. L'élève écrit :
⇔X=1 ou X=-2
lnx=1
8. P : « C'est comment lnx=1 ? ! Tu apprends ton cours de temps en temps ? ! »
9. […]
10. P continue de vérifier le travail personnel des élèves, tandis que l'élève au tableau écrit :
⇔lnx=1 ou lnx=-2
⇔lnx=lne ou lnx=-2lne
⇔x=e ou x=-2e
*Puis après quelques secondes de réflexion et consultation de ses camarades, il efface **–2e** et écrit :*
⇔x=e ou $x=e^{-2}$

6. G : « x=$e^{\frac{2}{3}}$ »
7. F : « x=$e^{\frac{2}{3}}$, oui »

Q fait part de son étonnement envers l'utilisation de cette technique à cet instant de l'année :

14. Q : « Oui, mais là y'a une nouveauté quand même… C'est la puissance fractionnaire, l'exposant fractionnaire »

Ce qui provoque l'embarras de F et G :

15. F : « Oui »
16. G : « Là, heu… Ça on l'a fait après, l'exposant fractionnaire, on a fait ça quand même ! »
17. F : « Oui »
18. Q : « Oui. Je veux dire : là le $e^{\frac{2}{3}}$, vous l'avez fait après, quand vous avez étudié les fonctions puissances j'imagine ? »
19. F et G : « Oui »
20. Q : « Exponentielle et puissance »
21. F : « Oui »
22. Q : « A ce moment-là du cours, vous ne l'aviez pas fait ? »
23. F : « Oui, à ce moment-là, non on ne l'avait pas fait »

Sans doute ne saura-t-on jamais comment F et G ont effectivement résolu cette équation (il aurait fallu, au moins, consulter leurs cahiers d'exercices au moment de la correction). Il est d'ailleurs probable que F et G, qui semblent en avoir perdu le souvenir précis au moment de l'entretien, ne le sachent pas eux-mêmes car, lorsque pour la première fois Q s'étonne de l'utilisation d'un exposant fractionnaire, la tentative de justification apportée par G avec des exposants entiers :

12. Q : « Et d'écrire $e^{\frac{2}{3}}$, ça vous gênait pas ?… »
13. G : « Non, non. En fait on avait fait comme ça : 2, c'est 2lne, donc égale $\ln e^2$. Donc dès qu'on avait lnx=3, donc x= e^3 »

n'est plus reprise par G par la suite, tandis que l'utilisation anticipée d'un point du programme non encore traité suscite son étonnement :

16. G : « Là, heu… Ça on l'a fait après, l'exposant fractionnaire, on a fait ça quand même ! »

Suit alors toute une reconstruction de l'histoire didactique des élèves à travers laquelle F et G vont trouver les échappatoires nécessaires pour une justification.
G dit avoir abordé en fin de1^{e}S, avec son professeur, le chapitre sur logarithme et exponentielle (ce qui est vrai, l'information ayant été vérifiée auprès d'autres sources), mais F qui n'était pas dans la même classe que G ne peut invoquer cet argument :

24. Q : « Et donc, ça vous gênait pas d'écrire $e^{\frac{2}{3}}$? »
25. F : « Ben non »
26. G : « Non, vu qu'on l'avait fait l'année dernière, on l'avait un peu commencé, heu… »
27. F : « Mais moi, même, je l'avais pas fait l'an dernier ! »

28. Q : « Toi, tu l'avais fait l'an dernier. Mais toi non, j'imagine »
29. F : « Moi je l'avais pas fait, non, mais… »
30. Q : « Et tu te demandais pas ce que ça signifiait, non ? »
31. F : « Ben non »
32. Q : « Non ? »
33. F : « Non, ça me semblait normal ! »
34. Q : « C'est-à-dire ? »
35. G : « lne c'est 1, donc 2 ou 3… alne, ça fait e puissance a… »
36. Q : « Oui »
37. G : « Je sais pas… e ça reste comme ça. Là, je pensais pas que c'était une fonction, que c'était l'exponentielle, c'est un nombre e ?!… »
38. Q : « Oui »
39. G : « Donc du coup, je vois pas en quoi ça pouvait gêner si on mettait e puissance 2, e puissance 3… »
40. Q : « Ah oui ! e puissance 2, e puissance 3, ça va… »
41. G : « Ah ! $\frac{2}{3}$… »
42. Q : « Et oui ! Ma question, c'était sur les $\frac{2}{3}$… »
43. G : « D'accord… On l'avait pas fait ?… »

Puis F et G vont s'accorder sur le fait qu'écrire un exposant fractionnaire n'était pas à ce moment-là problématique, puisque, dans la classe, l'usage voulait que l'on écrive la racine carrée grâce à l'exposant un demi :

44. F : « Non, mais les puissances fractionnaires, de toute façon, enfin… on connaissait $e^{\frac{1}{2}}$, avec la racine carrée »
45. Q : « Vous l'aviez vu déjà e puissance un demi et la racine carrée ? »
46. G&F : « Oui »
47. Q : « Et $\frac{2}{3}$? Parce qu'on peut dire : "c'est une convention la puissance un demi…" »
48. G : « On l'avait demandé la puissance un demi. Justement on voulait demander ça… »
49. Q : « Donc, ça vous choquait pas les fractions dans les exposants… »
50. G&F : « Non »

Cependant, s'il est facile de justifier la connaissance de l'ostensif $e^{\frac{1}{2}}$ (« on l'avait vu »), il est déjà mal commode de justifier s'être autorisé à étendre son utilisation à d'autre fractions que $\frac{2}{3}$ (« justement on voulait demander ça »), et il devient très difficile de le définir à travers son usage. Celui-ci, en effet, est justement l'objet du chapitre qui vient après le logarithme dans l'ordre de présentation du programme adopté par P, à savoir l'étude de la fonction exponentielle :

65. Q : « Si quelqu'un, à ce moment-là, avait demandé "ça veut dire quoi $e^{\frac{2}{3}}$", qu'est-ce que vous auriez pu répondre ? »
66. Silence puis G : « $e^{\frac{2}{3}}$?… Ouais, je sais pas si j'aurais pu y répondre, ouais enfin… je sais pas »
67. F : « Non, je sais pas »

Ne peut être en effet évoqué que le non-ostensif « exponentielle » à l'intérieur duquel sa pratique, justifiée par le bloc d'éléments technologiques que constitue le cours qui a été enseigné, trouve place :

51. Q : « $e^{\frac{2}{3}}$, si on vous avait demandé ce que c'est, qu'est-ce que vous auriez pu dire à ce moment-là ? » 52. G : « Ben… L'exponentielle » 53. F : « Non » 54. Q : « Exponentielle parce que tu avais déjà entendu le mot » 55. F : « Non, moi exponentielle je le savais pas » 56. Q : « Toi, non. Le e c'était pas l'exponentielle, c'était… » 57. G : « Un nombre » 58. Q : « Le nombre tel que le logarithme égale 1 »

Devant l'impossibilité de justifier l'usage de $e^{\frac{2}{3}}$ sans avoir recours au non-ostensif « exponentielle » qui n'existe officiellement pas dans la classe à ce moment de l'année (le 5 février), et devant l'impossibilité d'évoquer comme pour G un enseignement antérieur F, quant à elle, va trouver une porte de sortie dans l'évocation d'*un rapport personnel privé* à l'exponentielle :

59. F : « J'avais compris que c'était la réciproque, parce que sur la calculatrice… » 60. Q : « D'accord » 61. F : « … on prenait la touche de ln et au-dessus il y a e^x. C'est pour ça… »

La fin de l'échange se conclut par la dissipation du malaise provoqué par des justifications qui paraissent bien fragiles aux yeux de Q, ce que perçoivent sans doute F et G. C'est la venue d'un autre objet de savoir, la racine n-ième, dont la connaissance est officiellement partagée par tous au moment de la correction visionnée de l'exercice, qui permet de tirer le débat vers une sortie honorable pour tous :

69. Q : « Voilà, il en est là : $x^3=e^2$. Et là… il écrit $\sqrt[3]{e^2}$, ce qui est juste. Mais vous aviez étudié la racine cubique à cette époque ? » 70. G : « On en avait parlé » 71. Q : « Oui ? » 72. G : « On en avait parlé » 73. Q : « Avec P ? » 74. G : « Oui, on l'avait eu un jour avant » 75. Q : « Avec les complexes peut-être, non ? » 76. G : « Non, on avait eu une suite… On avait fait un raisonnement par récurrence et justement ça faisait intervenir ça et, heu… enfin moi je l'avais pas fait parce que j'avais rien compris, on pouvait pas le faire d'ailleurs. P avait dit ça c'est des puissances… enfin la racine cubique… tout ça, c'est des puissances fractionnaires. Et donc, bon on en parlera plus tard, quoi… Donc, on en avait parlé plusieurs fois quand même… » 77. Q : « Quand même… C'est-à-dire que vous aviez déjà rencontré des exposants fractionnaires ? Et P avait dit, c'est la racine n-ième… » 78. G : « Eventuellement » 79. Q : « Eventuellement » 80. G : « Oui, on l'a fait en complexe aussi » 81. F : « Mmm » 82. Q : « Oui »

3. 5. 3. Conclusions de cette observation

3. 5. 3. 1. La mémoire pratique est une authentique mémoire dont on peut observer certaines manifestations : un cas d'oubli

L'expression de l'assujettissement des élèves à l'institution d'observation montre que, pour eux, tout semble s'être passé comme si le savoir nouveau relatif à l'exponentielle, enseigné depuis par le professeur et que les élèves ont appris, avait effacé de leur mémoire pratique telle qu'ils la disent dans cette institution d'observation, des connaissances pratiques dont ils disposaient lorsque ce savoir n'était pas encore enseigné. La confrontation avec l'analyse faite des séances d'enseignement des 4 et 5 février révèlent ces écarts dans l'accomplissement des pratiques. Par exemple, il n'est plus besoin désormais de savoir que $\ln e=1$, que la technique à mettre en œuvre passe à un moment donné par l'étape $\ln x=\ln y$, et qu'il faudra utiliser une racine n-ième. Un non-ostensif nouveau, l'exponentielle, contient, lors des manipulations ostensives qu'il autorise, des réponses aux questions qui nécessitaient l'emploi de ces techniques. Leurs raisons d'être s'effacent derrière la manipulation ostensive : $\ln x=\frac{2}{3}\Leftrightarrow x=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}$, et avec elles la mémoire pratique des techniques antérieures. Nous retrouvons ici l'observation faite dans la deuxième partie de la thèse, en 2. 5., lorsque nous énoncions que les pratiques mathématiques des élèves objectivent les derniers niveaux travaillés de leurs mémoires pratiques.

Arrivés en ce point, on pourrait se poser la question de la définition du type de mémoire dont nous parlons ici. S'agit-il de la mémoire personnelle et privée des élèves, et qui opère à leur insu, comme cela semble être le cas courant pour les individus que nous sommes, soumis aux caprices de notre propre mémoire ? Ou bien s'agit-il d'une mémoire artificielle, car officielle, ostensive, travaillée sciemment par l'institution, et à partir de laquelle il est possible, un peu à la manière des régimes totalitaires, de provoquer des « oublis officiels » chez les citoyens, mais dont aucun n'est réellement dupe ? Ainsi, pour cet exemple des équations logarithmiques, le professeur pourrait-il dire cette mémoire en ces termes : « Quand on aura à résoudre une équation du type $\ln x=a$, on se souviendra que la solution est $x=e^{a}$ », sous-entendant ainsi que la technique antérieure n'a plus cours et que, même si certains élèves la conservent dans leur mémoire, il n'est plus désormais de mise de l'utiliser, et donc, qu'à ce moment de son histoire, elle est officiellement oubliée de l'institution d'étude ?

Ce deuxième type de mémoire, qui définirait les comportements conformes transmis et attendus à un moment donné du temps didactique, et dans une institution donnée, se rapproche du sens couramment attribué à la mémoire collective. C'est une mémoire qui nécessite d'être instrumentée pour être travaillée, agie, et qui s'accommode de la définition que donne Leroi-Gourhan (1964) :

> « Mémoire est entendu, dans cet ouvrage, dans un sens très élargi. C'est non pas une propriété de l'intelligence mais, quel qu'il soit, le support sur lequel s'inscrivent les chaînes d'actes. On peut à ce titre parler d'une "mémoire spécifique" pour définir la fixation des comportements des espèces animales, d'une mémoire "ethnique" qui assure la reproduction des comportements dans les sociétés humaines et, au même titre, d'une mémoire "artificielle", électronique dans sa forme la plus récente, qui assure, sans recours à l'instinct ou à la réflexion, la reproduction d'actes mécaniques enchaînés. » p. 269.

Le « support » de ce deuxième type de mémoire est, pour l'exemple des équations logarithmiques, de deux ordres :
- il s'agit tout d'abord d'un support « matériel » constitué d'un dispositif (une feuille ou un tableau, un stylo ou une craie) et de gestes incorporés (gestes de la main qui tient l'outil permettant l'écriture, ou plutôt permettant *certaines* écritures, telles que $e^{\frac{2}{3}}$ par exemple)
- ce premier support, le plus visible, est lui-même subordonné à un autre, plus transparent mais sans lequel il n'y aurait jamais eu possibilité d'existence du premier, et qui renvoie aux conduites tacitement attendues des partenaires de la relation didactique : le contrat didactique auquel l'assujettissement des élèves, dans l'institution indirectement observée, leur a permis d'écrire et de donner du sens à $e^{\frac{2}{3}}$

Ce deuxième ordre de support correspond à cette mémoire « ethnique » dont parle Leroi-Gourhan et qui assure la reproduction des comportements dans les sociétés humaines. Il s'agit ici, par l'adhésion des élèves au contrat didactique et par les attentes du professeur, d'obtenir la reproduction des comportements, envers ce type d'équation, tels que définis par la « société humaine des classes de Terminale S » à la fin de l'année scolaire, dans le système éducatif français actuel.

3. 5. 3. 2. Le principe d'économie de l'énergie cognitive comme explication de l'oubli

On pourrait alors considérer ces deux types de mémoire comme dotés d'une certaine étanchéité. Il y aurait d'une part, selon l'acception généralement admise parce qu'elle semble aller de soi, les comportements qu'il est convenu d'adopter dans une certaine « société humaine ». Il y aurait d'autre part les comportements personnels qu'un individu connaît et qu'il peut décider ou non d'adopter lorsqu'il se trouve dans une autre société humaine, ou lorsqu'il choisit de mettre ces « sociétés humaines » à distance, selon son gré.
Or, il est troublant de constater qu'à un peu plus d'un mois et demi seulement d'intervalle, les élèves observés ont oublié les pratiques qui étaient attendues dans la classe. Cet oubli est tel qu'ils leur substituent, dans leurs propres souvenirs, les pratiques qui ont cours aujourd'hui (ce qui pourrait se comprendre s'ils avaient été « absents », physiquement ou mentalement, à ce moment-là – mais ce n'est pas le cas, ce qu'atteste le protocole en annexe car la fille observée est envoyée au tableau lors de la séance filmée), et qu'ils sont déstabilisés lorsqu'ils conviennent avoir utilisé une technique qui n'était pas alors disponible. En quoi, le fait de se plier à la conformité des comportements attendus dans une institution donnée, créerait-il l'oubli des comportements qui ont été les siens dans une autre institution, ou dans la même,

mais à un autre moment de la vie institutionnelle ? Comment s'opère ce qu'on peut considérer comme un recouvrement de la mémoire personnelle par cette mémoire officielle ? L'institution « manipule-t-elle », bien sûr à leur insu, la mémoire des élèves, au cours d'une sorte de « lavage de cerveau institutionnel » ?

Halbwachs (1925 ; 1994) fournit une explication du phénomène que nous venons de décrire, à travers un exemple choisi « parce qu'on y saisit sur le vif, nous semble-t-il, les conditions qui favorisent ou qui empêchent le rappel des souvenirs », et qu'il lui permet aussi de réfuter certaines des thèses de Bergson dans *Matière et mémoire* !… Il étudie, dans un beau paragraphe des *Cadres sociaux de la mémoire* intitulé *La déformation des souvenirs d'enfance chez les adultes*, la reconstruction du passé qui s'opère « lorsque nous tombe entre les mains un des livres qui firent la joie de notre enfance, et que nous n'avons plus ouvert depuis […] », et il explique que « si certains souvenirs ne reparaissent pas, ce n'est point parce qu'ils sont trop anciens et qu'ils se sont lentement évanouis ; mais ils étaient encadrés autrefois dans un système de notions qu'ils ne retrouvent plus aujourd'hui ».
La raison de cet oubli de certains souvenirs se trouve ainsi dans le fait qu'ils ne peuvent être restitués à l'identique, comme s'ils avaient été stockés sans aucune altération dans un quelconque entrepôt de notre cerveau, mais qu'ils doivent être reproduits.
« Mais », explique alors Halbwachs, « reproduire n'est pas retrouver : c'est, bien plutôt, reconstruire. Ce qui était vrai du corps, savoir qu'on ne peut en tirer un souvenir, ne l'est plus du système de nos représentations actuelles : celles-ci, combinées avec telles notions anciennes dont le livre lui-même nous apporte une riche provision, suffisent, dans certains cas, sinon à recréer un souvenir, du moins à en dessiner le schéma, qui, pour l'esprit, en est l'équivalent. Il n'est donc pas nécessaire que le souvenir soit demeuré, puisque la conscience actuelle possède en elle-même et retrouve autour d'elle les moyens de le fabriquer. Si elle ne le reproduit pas, c'est que ces moyens sont insuffisants. Ce n'est pas qu'elle fasse obstacle à un souvenir réel qui voudrait se montrer : c'est qu'entre les conceptions d'un adulte et d'un enfant il y a trop de différences ».

L'explication d'Halbwachs fournit les éléments permettant de construire le chaînon manquant entre les deux types de mémoire évoqués précédemment : une mémoire pratique qui s'exprime sous la forme d'une mémoire personnelle, et une mémoire institutionnelle, revendiquée et ostensive, cette dernière asservissant la première pour ces deux élèves.

La vision du film constitue un moyen d'évoquer « le livre » délaissé depuis près de deux mois, celui-ci étant constitué de tous les « objets mathématiques » de l'étude d'alors, des techniques disponibles à cette époque, des interventions et des propos des élèves et du professeur, des traces écrites au tableau ou sur son propre cahier, etc. Il s'agit donc d'un objet beaucoup plus complexe que le livre d'enfance qu'évoque Halbwachs, puisque c'est bien l'univers cognitif mathématique d'alors qui est évoqué, univers rempli d'objets et de rapports à ces objets, de techniques, de dispositifs et de gestes. Cet univers cognitif constituait un cadre formé d'une part d'ostensifs, à l'usage réglé, et d'autre part de certains non-ostensifs, tels le logarithme. Mais l'univers cognitif actuel de ces élèves n'est plus le même : l'utilisation des ostensifs disponibles antérieurement s'est élargie, d'autres ostensifs sont apparus, des non-ostensifs nouveaux l'ont enrichi, par exemple l'exponentielle. Ceux-ci ont modifié le cadre personnel antérieur qui devient difficile à retrouver. C'est la raison pour laquelle les souvenirs relatifs à la mémoire pratique de ces deux élèves n'apparaissent plus.

Il est connu de ces élèves que cet oubli, relatif à la mémoire pratique, est sans conséquence pour la réalisation de la tâche qui mobilisait auparavant un souvenir pratique qu'ils ont perdu ; ils parviennent encore, et par d'autres moyens, à l'accomplir, et ils le savent. On peut en effet faire l'hypothèse que ces bons élèves, « bons sujets » très assujettis aux contraintes de l'étude, s'appliquent par leur travail à réduire régulièrement l'écart, constamment créé par l'enseignement de notions nouvelles, entre le temps didactique et celui de leur propre apprentissage. Ils savent d'expérience, et par contrat, que le savoir qu'ils étudient régulièrement leur garantit la résolution des problèmes relevant d'un enseignement passé et qui, au sein de l'école, leur sont proposés. Cette résolution implique la mise en œuvre d'un savoir, ou plus précisément, comme il s'agit d'accomplir une tâche, elle implique la connaissance et la mise en œuvre d'au moins une technique permettant d'accomplir cette tâche. Sa connaissance est officiellement garantie par l'apprentissage, une fois la tâche reconnue. Sachant cela, ces élèves travaillent à transformer par l'étude, et régulièrement, leur système mémoriel. En paraphrasant le texte d'Halbwachs, on peut dire alors que, du point de vue d'un tel élève, il n'est pas nécessaire que le souvenir de certaines techniques soit demeuré, puisque la connaissance actuelle, garantie par l'apprentissage, possède en elle-même et retrouve autour d'elle les moyens de les fabriquer. Si elle ne le reproduit pas, c'est que ces moyens sont insuffisants, donc que l'apprentissage est insuffisant. Ce n'est pas qu'elle fasse obstacle à un souvenir réel qui voudrait se montrer : c'est qu'entre les techniques disponibles à un élève d'alors et celles d'un élève actuel, il y a trop de différences[131].

Et en effet, ces moyens techniques, au moment où les élèves visionnent le film, sont d'une terrible efficacité. Faut-il rappeler que la résolution de l'équation nécessitait d'écrire auparavant :

$3\ln x=2 \Leftrightarrow 3\ln x=2\ln e \Leftrightarrow \ln x^3=\ln e^2 \Leftrightarrow x^3=e^2 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{e^2}$

alors que l'usage convenable de l'ostensif permet désormais d'écrire :

$\ln x=\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=e^{\frac{2}{3}}$

Ce qui peut se résumer dans le tableau suivant :

[131] Pour que de telles pratiques oubliées puissent reparaître, il faudrait sans doute, pour ces élèves, changer d'institution et modifier alors leur univers cognitif afin de le rendre compatible avec cette nouvelle institution. Par exemple, se faire l'aide d'un élève plus jeune qui, l'année suivante, parcourra au cours de son étude, la même organisation mathématique.

Technique institutionnalisée en classe les 4 et 5 février et justification technologique	**Technique décrite par les élèves le 28 mars et justification technologique**
$\ln x^2+\ln x=2$	$\ln x^2+\ln x=2$
$2\ln x+\ln x=2$ (car $\ln x^n=n\ln x$)	$2\ln x+\ln x=2$ (car $\ln x^n=n\ln x$)
$3\ln x=2$ (car $2+1=3$)	$3\ln x=2$ (car $2+1=3$)
$3\ln x=2\ln e$ (car $\ln e=1$)	$\ln x=\frac{2}{3}$ (car $ax=b\Leftrightarrow x=\frac{b}{a}$)
$\ln x^3=\ln e^2$ (car $n\ln x=\ln x^n$)	$x=e^{\frac{2}{3}}$ (car $\ln x=a\Leftrightarrow x=e^a$)
$x^3=e^2$ (car ln bijection)	
$x=\sqrt[3]{e^2}$ (car définition de la racine cubique)	

L'économie des gestes est manifeste puisque seulement quatre pas de calcul sont désormais utilisés lorsqu'il en fallait six auparavant, dans les séances des 4&5 février. Leur mise en œuvre est plus simple, puisqu'ils ne nécessitent qu'une seule fois la manipulation de $\ln x^n$ et la connaissance de $\ln x=a\Leftrightarrow x=e^a$, quand il fallait auparavant utiliser $\ln x^n$, $\ln e$, puis $n\ln x$, ainsi que la bijectivité et la racine cubique. Enfin, la générativité du geste qui consiste à passer de $\ln x=a$ à $x=e^a$ est plus grande, puisqu'il permet de résoudre, par ailleurs, des équations d'un nouveau type telles que $\ln x=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, pour lesquelles le recours à une éventuelle racine $\sqrt{2}$-ième paraît hasardeux !

Il y a ainsi une véritable puissance de la manipulation ostensive, qui tient à son efficacité, pour qui possède la maîtrise des gestes convenables, au point d'effacer le souvenir de techniques plus rustiques et d'usage mal commode. C'est ce que savent ces bons élèves qui, oublieux des techniques anciennes au profit de nouvelles d'une plus grande portée, soulagent ainsi leur mémoire afin de s'engager, avec plus de chances de succès, dans les apprentissages à venir. Ce faisant, ils évitent de tomber dans le travers que Castella et Mercier (1994) mettent en évidence, en observant des élèves de BEP Agricole :

> « Tout dispositif pédagogique de ritualisation procédurale bloque non seulement la fabrication de ces savoirs, mais empêche la mobilisation partielle et pertinente des fragments de la procédure standard dans les nouveaux problèmes du champ ». p. 22.

Nous retrouvons alors, en ce point, un principe d'anthropologie cognitive décrit, entre autres, par Douglas (1986), qui le désigne sous la forme de « l'économie de l'énergie cognitive », et par Brousseau dans la théorie des situations, qui parle de « coût d'une stratégie ». Mercier (1996) désigne un de ses effets, la stabilité des connaissances, en ces termes :

> « Selon Brousseau, la connaissance socialement stable associée à une situation didactique peut donc être prévue par l'étude du coût des différentes stratégies permettant de réussir des tâches demandées. Je rappelle ici que le coût d'une stratégie s'analyse en un coût à l'apprentissage et un coût à l'emploi, ce qui permet de prédire d'emblée qu'une connaissance chère à l'apprentissage ne sera stable que si les occasions de son emploi sont nombreuses […] ».pp. 1-2.

Nous pouvons désormais préciser ce que l'on entend par « stabilité des connaissances ». Il s'agit des souvenirs relatifs à sa mémoire pratique et que la personne peut mobiliser. Ces souvenirs seront d'autant plus faciles à mobiliser que le coût, certes à l'apprentissage mais ici surtout à l'emploi, sera plus faible. La baisse de ce coût est, dans ce cas, assurée par certains ostensifs, dont l'apprentissage de la mise en œuvre permet l'économie des gestes qui, en définitive, soulage la pensée, et ceci à un point tel qu'il n'est plus nécessaire de conserver le souvenir de manipulations ostensives antérieures beaucoup trop coûteuses.

QUATRIÈME PARTIE

LA PRATIQUE DES OSTENSIFS ET SES CONSÉQUENCES : CRÉATIVITÉ MATHÉMATIQUE ET EFFETS MÉMORIELS

Présentation de la quatrième partie

Ayant défini le type de dispositif nécessaire pour l'observation, nous rendons compte d'une deuxième série d'observations réalisées selon le même principe, mais en usant de modalités différentes de celles du dispositif exposé dans la troisième partie. De cette deuxième série, il ressort qu'à partir du savoir qu'ils ont étudié et des ostensifs dont ils disposent, certains élèves sont capables d'anticiper sur le temps didactique à venir.
Considérant que, toutes proportions gardées, la production de mathématiques nouvelles, par des mathématiciens, nécessite une créativité pratique pouvant servir de modèle à celle à laquelle recourent des élèves pour anticiper sur le temps didactique, nous sommes conduits à étudier le rôle des ostensifs dans la production de savoirs mathématiques nouveaux. En ce point encore, comme pour ce qui concernait l'observation d'élèves au cours de leur étude circonscrite à deux « thèmes », logarithme et exponentielle, nous limitons notre sujet « au début » du calcul différentiel et intégral. Formule à nuancer sans doute, puisque la période de laquelle nous extrayons les ouvrages qui servent de support, « débute » avec les travaux fondateurs de Newton et Leibniz, prend son essor dans le travail d'Euler et s'achève par la tentative de Lagrange de fonder l'Analyse sur le développement des fonctions en série de Taylor ; elle s'étale ainsi sur plus d'un siècle.
Ce faisant, l'objectif poursuivi n'est en rien celui que pourraient animer quelques velléités de pénétrer dans le domaine de l'histoire ou de l'épistémologie des mathématiques. Si des références historiques ou des interprétations d'historiens apparaissent parfois dans le texte, elles n'y sont mentionnées que pour éclairer le propos en le resituant dans un contexte : celui, historique et social, qui se rapporte au développement d'un savoir, aux difficultés que cette entreprise rencontre, aux solutions pratiques trouvées pour les surmonter. Ces références ne sont pas exhaustives et laissent place à d'autres interprétations historiques ou épistémologiques, car là n'est pas l'objectif poursuivi. Il se trouve dans le rôle des ostensifs pour la créativité et l'organisation de la mémoire. Ayant identifié dans ces outils des objets chargés de la mémoire d'une pratique antérieure du savoir, il s'agit seulement, mais prioritairement, d'analyser en quoi, par leur intermédiaire, cette dimension mémorielle intervient dans la pratique des mathématiques. Notamment, comment certaines propriétés originelles qu'ils contiennent, les manipulations qu'ils autorisent ou non, les extensions d'usage qu'ils suggèrent ou les freins qu'ils y mettent, se traduisent par l'oubli ou le rappel pour la pratique des mathématiques et autorisent son déploiement ou sa limitation.
Une incursion externe au thème mathématique retenu, dans certaines parties de l'œuvre de Descartes, regardée non sous l'angle philosophique mais du seul point de vue de la mémoire pour l'étude des mathématiques, permet d'accéder aux règles de comportement afin de faciliter le rôle et le travail de la mémoire que se donne un élève tel Descartes.
Dans cette quatrième partie, le deuxième chapitre est consacré à des exemples de techniques didactiques utilisées par le professeur pour donner à voir à la classe une mémoire officielle nécessaire pour enseigner. On y étudie la question de l'articulation des effets de ces techniques au travail mené grâce aux ostensifs, et la question de leur traduction en terme de souvenirs ou d'oublis pour les élèves.

4. 1. Un exemple d'anticipation d'une pratique à venir

4. 1. 1. Le manque technologique induit la non-appropriation de l'ostensif et engage dans des techniques plus coûteuses

La précédente partie de cette thèse nous a permis de mettre en évidence le rôle joué par l'appropriation de la pratique des ostensifs dans le souvenir d'autres pratiques dans lesquelles ils sont pris. Des pratiques engageant des techniques coûteuses du point de vue des ostensifs sont oubliées au profit d'autres, considérées comme plus économiques, tant pour l'institution que pour certaines des personnes qui la fréquentent : les « bons sujets » de l'institution. Mais l'entrée dans ces pratiques est parfois difficile, et l'absence de l'utilisation de l'ostensif approprié fait revenir à l'usage de techniques désormais abandonnées, et dont l'existence n'avait de sens que lorsque l'ostensif qui s'y substitue n'était pas encore connu.
Pour montrer cela, nous revenons au début de la séance du 5 février 1998, alors qu'un élève corrige au tableau les exercices donnés la veille. L'un d'eux porte sur la résolution de l'équation $(\ln x)^2+\ln x-2=0$. Quelques élèves, dont Nac., n'ont pas utilisé le changement de variable, comme l'atteste le passage suivant :

> *1. Un élève est désigné pour corriger les exercices donnés la veille. Il écrit :*
>
> **$(\ln x)^2+\ln x=2$**
> **$(\ln x^2)+\ln x=2$**
>
> *Puis :*
>
> **$(\ln x)^2+\ln x=2$** **$Df=]0;+\infty[$**
> **$\Leftrightarrow (\ln x)^2+\ln x-2=0$**
>
> *Puis, en direction de P, il fait le geste d'un X à la place de lnx*
> 2. P : « Bon. On reconnaît, tout le monde l'a pas reconnu, hein ?… une équation du second degré en logarithme de x. Logarithme de x est la solution d'une équation du second degré, d'accord ? Tu avais pas vu ça Nac.? … En fait, tu t'es débrouillé… »
> 3. Nac. : « Non, non, on n'avait pas vu ça »
> 4. P : « Tu l'avais pas vu, alors que tu l'as résolue quand même. Tu as écrit la forme canonique, c'est du second degré, ça ! Tu as pas raccroché la forme canonique à du second degré »

Pour Nac., comme pour d'autres dans la classe, la résolution de cette équation passe ainsi par :
$(\ln x)^2+\ln x-2=0 \Leftrightarrow (\ln x+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}=0 \Leftrightarrow (\ln x+\frac{1}{2}-\frac{3}{2})(\ln x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2})=0 \Leftrightarrow (\ln x-1)(\ln x+2)=0 \Leftrightarrow (\ln x=1$ ou $\ln x=-2)$
Alors que pour P, elle passe par ce qu'écrit l'élève au tableau ou par ce qu'il aurait dû écrire et que P corrige, et dont nous conservons quelques extraits :

> 5. **[…]On prend lnx=X**
> **$\Leftrightarrow X^2+X-2=0$**

$\Leftrightarrow$ **X=1 ou X=-2**

6. P : « Oui, j'aime pas beaucoup la façon dont tu l'écris[…]
Tu as deux solutions. Ou bien tu peux dire :
lnx est solution de $X^2+X-2=0$
Si tu veux l'écrire avec des mathématiques, tu dis : c'est pareil que de dire qu'il existe un nombre X qui vérifie $X^2+X-2=0$ et c'est logarithme de x :

$$\Leftrightarrow \exists X, \begin{cases} X^2 + X - 2 = 0 \\ X = \ln x \end{cases}$$

D'accord ? C'est un peu compliqué ; en terminale, vous pouvez vous contenter de faire ça *(P montre* lnx est solution de $X^2+X-2=0$*)*
[…]
7. *L'élève écrit :*

$\Leftrightarrow$ **X=1 ou X=-2**
lnx=1

Ainsi, certains élèves n'ont pu se saisir de la possibilité du changement de variable qui réduit la complexité ostensive de l'écriture. Une des raisons peut être trouvée, de nouveau, dans le manque technologique qui ne permet pas d'installer l'utilisation d'une variable auxiliaire comme technique introduisant à un jeu ostensif permettant la résolution. Ce jeu aurait pu prendre la forme suivante, par exemple, et en tenant compte d'équivalences entre propositions :

Comme :
$(\ln x)^2+\ln x-2=X^2+X-2$
$=(X-1)(X+2)$
$=(\ln x-1)(\ln x+2)$
Alors, l'équation $(\ln x)^2+\ln x-2=0$ équivaut à ($\ln x=1$ ou $\ln x=-2$)
etc.

Mais, comme on peut le constater en effet, l'élément technologique qui justifie cette réduction ostensive n'est qu'évoqué, et nullement explicité dans le langage mathématique qui conviendrait.
Il repose sur le fait que ln est une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur **R**, ce qui assure que quel que soit $X\in\mathbf{R}$, il existe un unique $x\in\mathbf{R}_+^*$ tel que $\ln x=X$, et réciproquement, que pour tout x de $\mathbf{R}_+^*$, il existe un seul X réel tel que $\ln x=X$; ce qui autorise le geste engageant une variable auxiliaire. C'est ce que P traduit par « c'est pareil de dire qu'il existe un nombre X qui vérifie $X^2+X-2=0$, et c'est logarithme de x ». Par ailleurs, cette absence d'élément technologique est assumée par P qui la justifie : « C'est un peu compliqué ; en terminale, vous pouvez vous contenter de faire ça ».
Ainsi, de nouveau, les élèves doivent s'engager dans une technique sans qu'ils trouvent, dans le savoir enseigné, sa justification technologique. Ceci explique peut-être la réticence de certains, et le fait que l'élève au tableau soit lui-aussi encore peu sûr du geste à effectuer ; ce dernier point se fondant sur l'indice que cet élève demande l'approbation de P, par sa gestuelle représentant un X, avant de procéder au changement de variable dans l'équation. De nouveau, sur cet épisode, le manque technologique empêche certains élèves de s'accorder l'autorisation de la réduction d'une écriture ostensive.

Cet élément technologique manquant, c'est alors le recours à d'autres éléments technologiques qui va venir justifier et autoriser la technique, désignée par P comme étant « la forme canonique », et retenue par certains élèves. Pour ces élèves, ln$x$ est alors vu comme un nombre, et non plus comme une variable qui peut prendre toutes les valeurs réelles. Ceci autorise alors des transformations algébriques d'écriture « à nombre ln$x$ fixé », et non des transformations portant sur la variable X, puisque l'on n'est pas sûr qu'elle corresponde toujours à une valeur possible de ln$x$, et réciproquement. Ce faisant, l'équation reste écrite sous une forme qui ne permet pas de la reconnaître comme du second degré (puisqu'elle n'est pas en x mais en ln$x$!), donc qui ne permet pas d'interpréter un indice qui engagerait dans la reconnaissance de sa somme des coefficients nulle, donc d'une racine évidente 1, l'autre s'en déduisant. Cette dernière propriété, pour tout élève de Terminale qui ne connaît pas encore, bien sûr, la théorie des équations algébriques de degré n et les relations entre les coefficients et les fonctions symétriques des racines, étant attribuée aux seuls polynômes du second degré, ce que ne saurait être, en définitive, une expression contenant un logarithme ! La technique utilisée par les élèves est donc une technique algébrique « d'avant » (juste avant pourrait-on dire) l'étude des équations du second degré, puisque celles-ci ne sont pas mobilisables pour la résolution du problème. Cette technique est trouvée dans l'abaissement du degré, ici fourni par l'utilisation de « la forme canonique » d'un trinôme du second degré.

4. 1. 2. Étude d'une anticipation de pratique ostensive et du non-ostensif associé

Mercier (1992) montre qu'engagés dans certaines pratiques, en des institutions dont ils ne sont d'ailleurs parfois que les seuls sujets, il arrive que les élèves rencontrent leur ignorance dans des situations qui sont pour eux de nature a-didactique, et qui leur permettent ainsi d'apprendre. Ce sont des premières rencontres aux occurrences diverses et différées. Elles ont alors lieu dans un temps forcément postérieur à celui de l'institution scolaire, ou encore, selon la terminologie utilisée dans *La transposition didactique*, dans un temps de l'apprentissage fait d'après-coups postérieurs au temps didactique. Le temps de ces rencontres ne peut donc pas assurer la progression didactique. Cependant, l'étude clinique nous a permis d'observer un cas singulier, où le phénomène semble chronologiquement inversé ; l'apprentissage paraissant anticiper l'enseignement.

Nous avons déjà eu l'occasion, en 3. 3., de rencontrer un phénomène relatif au théorème de Thalès, qui, en première approche, pouvait apparaître comme étant du même ordre. Nous avions alors montré que l'attribution de cette avance sur le temps didactique était à référer à l'institution dans laquelle ce phénomène pratique se réalisait. Pour l'observation clinique que nous allons évoquer, il est donc nécessaire de décrire, dans un premier temps, l'institution pour l'observation à laquelle des élèves sont venus s'assujettir.

4. 1. 2. 1. Description du dispositif d'observation

Nous avons suivi cinq séquences d'enseignement, d'une ou deux heures, du 23 février au 17 mars 1999, et relatives à l'enseignement du logarithme et de l'exponentielle en Terminale S. Ces séquences ont été filmées et ces films retranscrits. Chaque séquence a été précédée d'un double type d'entretiens *ante* enseignement enregistrés au magnétophone. D'une part, le professeur était interrogé par une première personne, et d'autre part, deux binômes d'élèves étaient interrogés par une deuxième personne. Le même dispositif a été mis en place pour des entretiens *post* séance d'enseignement. Nous n'exploiterons pas, ici, les entretiens réalisés avec le professeur de la classe, mais nous contenterons des entretiens avec les élèves. Il s'agissait pour nous, de nouveau, de créer deux institutions pour l'observation clinique, et dans le cas que nous décrirons, pour l'observation clinique d'élèves.

La première avait pour fonction d'étudier dans quelle mesure l'étude « ordinaire » des mathématiques créait, ce que Sensevy (1994) nomme, de la « chronogénéité ». Sensevy introduit ce terme pour décrire une des fonctions du *Journal des fractions*. La chronogénéité du *Journal* tient à ce qu'elle rend les élèves, à travers certaines de leurs productions pour le *Journal*, créateurs de l'avancée du temps didactique. Dans les entretiens *ante* séquence d'enseignement, nous avons voulu chercher à savoir si des élèves pouvaient anticiper le temps didactique à venir, même si ceci n'était pas didactiquement exploité par le professeur, et nous avons recherché cette anticipation du temps didactique, tant dans ses dimensions relatives aux organisations mathématiques, que didactiques.
Nous partons en effet de l'hypothèse, fondée sur les travaux menés sur le temps didactique (Chevallard 1981, Chevallard 1985, Chevallard et Mercier 1987, Mercier 1992), que le fonctionnement de l'institution didactique suppose que l'élève ne connaisse pas les pratiques mathématiques que le professeur, au cours de l'enseignement futur, introduira dans la classe. Du point de vue de l'institution, l'élève est interdit d'anticipation. Cette interdiction d'anticipation le met en position d'attente du savoir qui sera enseigné, et donc d'attente envers la personne chargée de le faire advenir : le professeur. Cette attente est un élément constitutif du contrat didactique, et en ce sens elle est nécessaire au « bon » fonctionnement de la relation didactique. Or, le travail de Sensevy (1994) établit la possibilité d'instaurer, dans une classe, un nouveau type de contrat pour lequel c'est la nécessité de répondre aux questions posées par les élèves, et issues de leur pratique du savoir, qui fonde cette attente. Elle devient alors attente de la communauté des élèves envers elle-même - orientée vers ses propres potentialités à fournir des réponses, et non plus vers l'enseignant seulement - puisque celle-ci, conviée à s'emparer des questions qu'elle va étudier, est susceptible de leur apporter réponses. La classe explore alors un certain espace des possibles, à partir des questions qui vont émerger de la pratique du savoir étudié, et non l'espace des possibles tel qu'il a été transposé, à l'extérieur de la classe, et tel que le professeur est chargé de l'exposer. C'est en ce sens que les élèves sont alors, dans une certaine mesure, rendus « chronogènes », créateurs et accoucheurs du temps de l'étude, ce qui réalise une plus grande coïncidence des temps de l'enseignement et de l'apprentissage.

La question posée, et à laquelle le premier type d'observations que nous avons menées veut répondre, est de déterminer si l'enseignement traditionnel, associé à un certain type de travail

d'étude, est capable de produire, chez certains élèves, des possibilités d'anticipation du temps didactique. Autrement dit, l'étude « ordinaire », telle qu'elle se pratique dans un lycée, permet-elle à des élèves de construire un espace des trajectoires possibles pour le savoir à venir ? Et l'enseignement, dispensé ultérieurement par le professeur, réalisera-t-il l'actualisation d'une des trajectoires anticipées ? Dans le cas où une telle hypothèse se réaliserait pour un élève, on peut imaginer qu'alors, pour lui, ce savoir, une fois enseigné par le professeur, prendrait sans doute un tout autre sens que pour un élève qui n'aurait pas suivi la même démarche. En fait, pour être plus précis, nous savons, par la biographie de certains mathématiciens, que de rares élèves - parmi ceux qui deviendront ces mathématiciens, précisément - sont capables d'anticiper des questions contenues en puissance dans le savoir qui leur est enseigné, et de dégager un espace des réponses possibles à leur apporter. Il s'agit alors de déterminer si le phénomène est plus fréquent qu'on le pense, bien qu'invisible pour une institution dont l'attention est orientée vers le spectacle de la production des réponses par une seule personne : le professeur.
Il est donc nécessaire de mettre en place une première institution d'observation, *ante* séance de cours en classe, qui puisse permettre la production et l'observation d'une telle anticipation. Se pose alors une question à laquelle il est quasiment impossible d'apporter ici une réponse définitive. L'anticipation existe-t-elle pour la personne qui l'a produite, en s'adonnant à l'étude, avant de venir s'assujettir à l'institution d'observation et répondre aux questions qui lui sont posées, ou bien, la production de cette anticipation par la personne n'est-elle pas plutôt un effet induit par l'institution d'observation ?

Le dispositif mis en place ne permet pas de trancher entre les deux possibilités pour au moins deux raisons. La première est une raison de fond, de nature épistémologique : ce qui est de l'ordre du privé de la personne, et qui est donc, par nature, privé de visibilité extérieure, ne peut être rendu connaissable - y compris parfois de la personne elle-même, dans le cas par exemple où cela touche aux dimensions liées à l'inconscient - que par un dispositif qui va permettre d'en recueillir des traces publiques. Celles-ci sont alors interprétées à l'intérieur d'un cadre méthodologico-théorique public. Recueil des traces et cadre méthodologico-théorique sont donc spécifiques du dispositif ou, tout au moins, de l'interaction de la personne et du dispositif. La seconde, liée à la première, réside, pour le dispositif que nous décrivons, en ce que nous n'avons accès à ces traces que par l'intermédiaire des questions posées, ou de l'interaction de la personne avec une autre (un autre élève ou la personne qui pose les questions). Dans ce dernier cas, les traces recueillies sont le résultat d'un travail de la personne mené à l'intérieur de l'institution d'observation.
Cependant, contre une vision pessimiste qui condamnerait d'avance toute possibilité de recherche, nous savons que dans les deux cas, que l'anticipation soit produite par la personne hors ou dans l'institution d'observation, elle n'est cependant toujours que réponse à une ou des questions posées à la personne, par elle-même ou par d'autres. Nous pouvons donc affirmer qu'étant donnée l'étude d'une organisation mathématique, le dispositif permet, *a minima*, d'évaluer au moins la *capacité* d'anticipation de la personne ; que cette capacité ait préalablement été réalisée hors institution d'observation, ou que ce soit le dispositif qui permette, en acte, de la réaliser.

La deuxième institution d'observation, réalisée à travers les entretiens *post* séance, avait pour fonction de faire apparaître et d'observer des effets mémoriels relativement aux organisations mathématiques qui avaient été enseignées durant la séquence ; les élèves devaient « raconter ce qui s'était passé », les questions qu'ils se posaient, etc. Permettant de « faire le point » sur l'avancée du temps didactique, elle autorise aussi l'observation d'anticipations éventuelles liées à l'étude, que les moments de cette étude aient été réalisés à l'occasion de séances en classe, ou lors de rencontres à l'extérieur du système didactique.

Nous avons choisi la constitution de deux binômes d'élèves réputés être des élèves travailleurs, volontaires pour participer quelques temps à l'observation. À travers ce choix, nous voulions éviter d'observer des élèves trop peu assujettis à l'étude, soit parce qu'ils ne suivent que de manière distraite l'enseignement qui est dispensé en classe, soit parce qu'ils ne l'étudient pas. Nous avions mené une observation en 1996-1997 avec des élèves volontaires faibles, et avions rencontré de grandes difficultés à discerner si les phénomènes d'oubli étaient imputables à leur assujettissement à l'étude, ou à son absence. Le dispositif d'observation avait été présenté comme un rattrapage ou un soutien, et accueillait des élèves en échec ; mais l'échec était aussi du côté de l'observateur tant il était parfois difficile de comprendre ce qui avait été enseigné en classe en se référant seulement au contenu décousu des cahiers ! Ce dernier point nous avait conduit à modifier le dispositif d'observation au cours de celle-ci, dès le début du deuxième trimestre, et à observer directement, dans sa classe, l'enseignement dispensé par le professeur ; nous utilisons d'ailleurs certaines de ces observations datant de 1997 dans cette thèse. Nous avions pu constater le peu d'implication des élèves du dispositif dans les activités proposées durant le temps du cours, et cette série d'observations avait joué le rôle d'une mise en garde dans le choix des élèves, afin de rendre l'observation de phénomènes mémoriels plus commode à l'avenir.

Dans la présente série d'observations, datant de 1999, nous voulions identifier les effets mémoriels issus des assujettissements à l'institution didactique, ainsi qu'aux institutions d'étude que des élèves mettent personnellement en place. Ainsi, pour cette série d'observations, les deux binômes d'élèves présentés comme « travailleurs », et volontaires pour l'observation, avaient-ils été constitués par le professeur de la classe observée : le premier avec deux bons élèves et le second deux élèves plus faibles, d'un niveau inférieur à la moyenne. De fait, les élèves du binôme 1 (Alexandre et Aurélie) poursuivront leurs études en classe de mathématiques supérieures à la rentrée scolaire suivante ; les élèves du binôme 2 (Ludivine et Sarah) obtiendront aussi le baccalauréat. Nous avons déjà eu l'occasion de montrer et d'utiliser des transcriptions de leurs enregistrements dans les deux premières parties de cette thèse. Leur propre professeur avait dit à ces élèves qu'ils auraient à se soumettre à une observation sur l'enseignement et l'apprentissage du logarithme et de l'exponentielle, que le fait d'en parler à une tierce personne pourrait peut-être les aider dans l'apprentissage. Ainsi, le premier entretien *ante*, qui a lieu le 22 février 1999 et réunit les quatre élèves simultanément, débute-t-il de la manière suivante :

1. Q : Moi, je regarde l'enseignement du logarithme et de l'exponentielle en terminale S, d'accord. Ça fait déjà plusieurs années que je m'intéresse à ça et l'an dernier, j'étais déjà venu filmer des cours sur la question. Donc, cette année, vous en êtes à peu près là, d'après ce que m'a dit votre professeur. Qu'est-ce que vous avez fait sur logarithme et exponentielle ?
2. Ludivine : Les équations…

La personne qui les interrogeait était d'ailleurs celle qui venait filmer les séances en classe, ce qui assurait une certaine familiarité. Il s'est trouvé de plus, et tout à fait fortuitement, que les deux élèves du binôme 1 avaient été élèves de cette personne l'année précédente, en 1^{e} S, ainsi que l'année d'avant en seconde ! Cette coïncidence s'est révélée un avantage, dans la mesure où il était possible de contrôler ce qui leur avait été officiellement enseigné durant leur cursus au Lycée : l'enseignement du logarithme et de l'exponentielle dès la classe de 1^{e} ne pouvait donc plus, par exemple, être évoqué !
Enfin, le cours enregistré et transcrit constitue un support auquel référer les traces observées lors des entretiens, que ce soient des entretiens *post* ou *ante*, des entretiens avec des élèves ou le professeur. Pour l'observation analysée ici, nous n'aurons pas besoin de recourir à l'observation du professeur. Ce dernier type d'observation avait pour fonction de faire découvrir par le professeur, qui le dit, son propre système de mémoire, et donc de le connaître pour l'observateur : il s'agissait donc d'étudier sa mémoire pratique professionnelle et son évolution, et non sa mémoire pratique du savoir.

4. 1. 2. 2. L'observation et son analyse

L'observation de cette anticipation a lieu en trois reprises, lors de l'entretien *ante* du 22 février, lors de l'entretien *post* cours des 2 et 3 mars, et lors de l'entretien *ante* du 9 mars ; ces deux dernières occurrences confirmant chez l'élève concernée, Aurélie, la première observation du 22 février. Il est assez remarquable que, des quatre élèves, seule Aurélie ait rencontré cette anticipation et que, ayant été publiquement prononcée donc entendue des trois autres, ceux-ci ne l'aient pas comprise et ne s'en soient pas servis ultérieurement.
Comme il a été indiqué dans le paragraphe précédent, le 22 février les quatre élèves sont réunis simultanément parce que c'est le premier des entretiens. Il constitue, en quelque sorte, une présentation et une familiarisation avec le dispositif, mais l'objectif, qui consiste à tester d'éventuelles anticipations dans l'avancée du temps didactique, n'est pas pour autant perdu de vue. L'entretien commence par une mise au point sur les connaissances des élèves :

37. Q : Et vous avez étudié les propriétés de la fonction logarithme avant la courbe ?
38. Aurélie : Oui, que c'est une bijection…
39. Q : Oui. Et pas les propriétés calculatoires ?
40. Aurélie : Si aussi, avec e dans le devoir.
41. Q : C'est-à-dire ?
42. Aurélie : Ben que ln de…
43. Ludivine : de e
44. Alexandre : égal à 1.
45. Aurélie : égale 1, oui.
46. Q : lne égale 1, oui mais…
47. Aurélie : lne^2 égale 2.
48. Q : Oui.

49. Ludivine : ln de $\frac{1}{e}$…

50. Q : ln de $\frac{1}{e}$, oui. Mais e, il a été présenté comment ? Comment vous le définiriez ?
51. Sarah : Eh ben, ln de e égale 1, et voilà quoi !
52. Q : Donc c'est la valeur de x pour laquelle…
53. Alexandre : Oui, je crois que c'est deux virgule soixante et quelques…
54. Aurélie : On a cherché sur la calculatrice…
55. Ludivine : L'intervalle pour lequel…
56. Q : Et ensuite, vous vous en servez dans les exos ?
57. Sarah : Non, non. Pas trop on n'a jamais fait d'exos quoi.
58. Aurélie : Dans le devoir qu'on a à faire pour demain, on s'en sert…

À cette date, le cours sur le logarithme n'est pas encore terminé. La séance du 23 février, qui suivra, est en fait structurée en deux parties. La première consiste en la correction par un élève au tableau des exercices qui étaient à rechercher :
résoudre les équations

$\ln(x+3)+\ln(x+2)=\ln(x+11)$, $\ln(x^2+5x+6)=\ln(x+11)$, $\ln(-x-2)=\ln(\frac{-x-11}{x+3})$

et $\ln(x+2)=\ln(-x-11)-\ln(x+3)$.
On retrouve donc l'exercice tiré du baccalauréat 1972 donné l'année précédente comme exercice pour montrer que la même résolution algébrique, mais rapportée à des ensembles de définition des équations différents, fournit des solutions différentes pour chacune de ces quatre équations.

La deuxième partie de l'heure est consacrée au cours : limites en $+\infty$ de $\frac{\ln x}{x}$ et en 0 de $x\ln x$, applications à des calculs de limites (limites en $+\infty$ de $\sqrt{x}$ $-\ln x$, $\frac{\ln(x^2)}{x}$, $\frac{\ln(x^2+1)}{x}$, $\frac{\ln x}{x^2+1}$ et $\frac{\ln(2x+3)}{3x+1}$), et enfin position de la courbe de la fonction ln par rapport à ses tangentes. Trois exercices sont donnés pour le lendemain : rechercher les limites en 0 et en $+\infty$ de $\ln(x+2)-\ln x$, et de $x-\ln x$, rechercher la limite en $+\infty$ de $\ln(\frac{2x+1}{x+2})$.

La discussion étant venue sur *e* lors de l'entretien *ante* séance du 23 février, la personne qui questionne, et qui connaît l'avancée de P dans le programme, fait alors revenir la conversation sur *e* et sur d'éventuelles anticipations. Ainsi, dans l'extrait suivant de l'entretien, bien que la question porte sur l'avenir possible de *e*, trois des élèves paraissent s'accorder explicitement sur sa fonctionnalité présente :

59. Q : Oui, et est-ce que vous pensez qu'il a un avenir ce e ou bien ?…
60. Alexandre : Je sais pas.
61. Aurélie : Ben oui.
62. Q : Oui, pourquoi ?
63. Alexandre : Ben, pour résoudre des équations déjà : quand on a 3, il faut mettre en lne…
64. Aurélie : Hmm, hmm…
65. Alexandre : Et ça nous fait…
66. Q : Donc, en fait, vous vous en servez dans les équations qui…
67. Sarah : Voilà…

68. Q : … qui sont à faire pour aujourd'hui. Bon, et maintenant, si on regarde un petit peu ce qui va venir devant vous, aujourd'hui quoi, la séance elle va s'organiser comment ?

69. Silence

En réalité, pour Aurélie, il semble évident, dès ce passage, que *e* va jouer un rôle non négligeable dans l'avenir (61. Aurélie : Ben oui), tandis qu'Alexandre répond qu'il ne sait pas, et que les deux autres élèves se taisent. Alors que la question (tour de parole 62) est adressée à Aurélie, c'est Alexandre qui répond (tour de parole 63) en reprenant ce qu'elle avait déclaré au tout début de la conversation sur le rôle joué par *e* dans la résolution d'équations, et dont nous reprenons des extraits significatifs :

39. Q : Oui. Et pas les propriétés calculatoires ?
40. Aurélie : Si aussi, avec e dans le devoir.
41. Q : C'est-à-dire ?
42. Aurélie : Ben que ln de…
43. Ludivine : de e
[…]
45. Aurélie : égale 1, oui.
46. Q : lne égale 1, oui mais…
47. Aurélie : $\ln e^2$ égale 2.
[…]
56. Q : Et ensuite, vous vous en servez dans les exos ?
57. Sarah : Non, non. Pas trop on n'a jamais fait d'exos quoi.
58. Aurélie : Dans le devoir qu'on a à faire pour demain, on s'en sert…

Elle est donc la seule des quatre à reconnaître publiquement la fonctionnalité de *e* dans les équations, et à en parler, alors que Sarah, par exemple, déclare en 57 qu'on n'a pas fait d'exercices à son sujet, même si elle répond ultérieurement sur le ton de l'évidence à une question posée par l'observateur (tours de parole 66 et 67). Il est par ailleurs remarquable que ce soit Aurélie qui introduise le débat sur *e* pour répondre à une question portant sur les propriétés « calculatoires » du logarithme, question qui aurait pu entraîner une réponse évoquant seulement ses propriétés d'homomorphisme transformant des produits en somme et des quotients en différences. La reprise dans un deuxième temps des propos d'Aurélie par Alexandre, pour répondre à la question portant sur l'avenir de *e* (tour de parole 63), après qu'il ait d'abord déclaré ne pas savoir (en 60), ne suscite chez elle qu'une discrète approbation (64. Aurélie : Hmm, hmm…). Aussi, lorsque l'occasion de répondre à une question portant sur une suite possible pour le cours se présente de nouveau, elle répond immédiatement :

74. Q : Ensuite, est-ce que vous avez une idée de la suite que le cours peut prendre ?
75. Aurélie : Je pense qu'on va approfondir ce e, quoi, parce que il sert bien.
76. Sarah : Oui.
77. Q : Il sert pour résoudre les équations ?…
78. Aurélie : Oui.
79. Q : Est-ce qu'il pourrait servir à autre chose ?
80. Aurélie : Si on s'en sert quand on fait 1 égale, euh… enfin 2 égale $\ln e^2$, ça va servir, quoi. Ça permet de faire… euh, ben… le contraire de ln.
81. Q : Pourquoi ?
82. Aurélie : Ben si on peut faire… je sais pas quoi…
83. Q : Qu'est-ce que tu entends par « contraire de ln » ?

84. Aurélie : Ben, si on arrive d'un chiffre à retrouver ln, ben je sais pas quoi… On l'a pas fait mais ça semble logique, quoi !
85. Q : Oui, et alors ? Vous voyez ce qu'elle veut dire là ?
86. Aurélie : Que… Pour les équations, on remplace bien quand on a un 3 ou un chiffre, on le remplace bien par ln… on remplace par ln de e exposant … Donc, je sais pas, c'est pratique, quoi !
87. Q : Donc c'est pratique… Mais tu disais, « ça va être le contraire », donc…
88. Aurélie : Ben, le contraire, je sais pas parce que…et euh, je sais pas…
89. Ludivine : Ça va permettre de nous retrouver ln.
90. Aurélie : En tout cas de trouver ln

Dès le tour de parole 80, pour Aurélie, *e* sert à faire « le contraire de ln ». Ce qui se fait se dit parfois difficilement, surtout lorsque les mots pour le dire relèvent d'un savoir mathématique qui n'a pas encore été enseigné. Aussi, après avoir recouru à l'argument du « bon sens » logique (tour de parole 84), Aurélie, qui n'a pas entraîné l'adhésion de ses trois autres camarades (pas de réponse à la question du tour de parole 85), tente alors d'exemplifier son propos. C'est le tour de parole 86 que l'on pourrait traduire mathématiquement par : « $\ln A(x)=3 \Leftrightarrow \ln A(x)=\ln e^3$, donc c'est pratique puisqu'on trouve ainsi $A(x)=e^3$ ». On pourrait alors interpréter ce passage d'une autre manière : en disant simplement qu'Aurélie arrive mieux que ses camarades à décrire l'utilisation de *e* pour résoudre des équations, mais que tous s'accordent sur son rôle important *pour les équations*, et non aussi pour les fonctions.
C'est ce qu'attesterait la suite du débat entre Sarah et Alexandre s'il s'arrêtait en ce point :

91. Sarah : De simplifier, suivant les équations, par ln.
92. Q : De simplifier les équations par ln ?…
93. Sarah : Oui.
94. Alexandre : De se trouver, oui, qu'avec des valeurs de ln. Comme ça, on peut les su…, oui, on peut supprimer ln.
95. Sarah : Voilà, on peut supprimer.

Mais, la possibilité de préciser sa pensée est de nouveau donnée à Aurélie par une question qui lui est destinée. La réponse qu'elle apporte permet alors de constater qu'elle se trouve dans ce qu'on pourrait nommer « une logique fonctionnelle », par opposition à ses camarades qui en restent à « la logique algébrique » qu'ils viennent de décrire de 91 à 95. Ceci lui permet d'anticiper la suite de la progression didactique, au contraire des autres élèves :

96. Q : Et ce que tu voulais dire dans « contraire », c'était quoi ?
97. Aurélie : Ben, ça nous permet de retomber sur ln.
98. Q : Donc, quand tu as au départ quoi ?
99. Aurélie : Quand j'ai au départ un chiffre quelconque quoi, on peut retomber sur ln.
100. Q : Grâce à ce e.
101. Aurélie : Grâce à ce e, oui.
102. Q : Donc tu penses qu'on va s'en servir quoi ?
103. Aurélie : Oui.
104. Q : Et est-ce que vous imaginez à peu près vers quoi ça peut vous mener cette idée-là ?
105. Alexandre : Non.
106. Aurélie : Comme la primitive, c'est l'inverse de la dérivée, ben, on retrouve… e c'est l'inverse de ln, enfin quelque chose comme ça, quoi.
107. Q : D'accord, donc une histoire avec les dérivées et les primitives ou bien ?…
108. Aurélie : Ah ça, je sais pas.[rire]
109. Q : Bon, donc vous avez déjà une petite idée, à peu près, de… Vous, vous aviez une autre idée…
110. Ludivine : Non.
111. Q : … sur ce qui allait se faire, là. Enfin, la suite…

112. Sarah : Approfondir l'histoire du e.
113. Q : Approfondir l'histoire du e, bon, ça c'est ce qu'elle vient de dire. […]

Ainsi, Alexandre (tour de parole 105) n'a pas d'idée sur la direction vers laquelle peuvent entraîner les propos d'Aurélie. Sarah ne fait que reprendre de façon très généraliste le discours d'Aurélie (tour de parole 112). Ludivine se tait et dit n'avoir pas d'autre idée (tour de parole 110). Aurélie a alors le temps d'exposer les prémisses de cette « logique fonctionnelle » dans laquelle apparaît, grâce à l'analogie avec « dérivée et primitive » qu'elle utilise, l'idée de fonction réciproque[132]. Bien sûr, l'application qui à une fonction (dérivable, comme elles le sont toutes en Terminale S) associe sa dérivée n'est pas injective, donc n'admet de fonction réciproque, au niveau d'Aurélie, qu'en omettant le problème de la constante. C'est cependant cette analogie, faite au tour de parole 106, dans lequel elle caractérise comme inverse les processus de dérivation et d'intégration[133], qui permet de différencier définitivement le point de vue d'Aurélie de celui de ses trois autres camarades. On pourrait penser qu'Aurélie, bonne élève, a pris un peu d'avance sur ses camarades en regardant la suite du cours dans le livre. Cette hypothèse ne peut être, certes, totalement exclue. Aussi l'avons-nous testée lors d'un entretien réalisé après le cours du 3 mars, dix jours après ses déclarations, sur l'utilisation du livre ou d'autres matériels pour étudier. Nous en extrayons les passages suivants :

21. Q : En fait, vous avez regardé un petit peu des problèmes type annales, problèmes de fin d'année ? Est-ce que vous avez un peu d'avance sur le cours ? Est-ce que vous voyez à peu près dans quelle direction va le programme, ce qui vous reste à faire ? Est-ce que vous pourriez faire le point, à l'heure actuelle, sur l'avancée dans le programme ?
22. Aurélie : Non, c'est surtout le redoublant qui dit : « il reste à faire ça et ça. Ça, c'est dur, et tout, et tout. Mais moi, personnellement, je ne regarde pas dans mon livre.
23. Q : Et toi non plus ?…
24. Alexandre : Des fois, je regarde un peu tout ça, mais je sais pas…
25. Q : Donc, vous regardez en arrière plutôt ?
26. Alexandre et Aurélie : Oui ;
27. Q : Le livre, est-ce qu'il vous sert en dehors de prendre les énoncés des exos que donne la prof. ?
28. Aurélie : Oui, pour réviser les tests, il y a des exercices corrigés.
29. Q : Donc, c'est à ce moment-là que vous regardez le livre et les exos corrigés ?
30. Aurélie : Oui.
31. Q : Et dans les exos corrigés, qu'est-ce qui apparaît en règle générale ? En quoi ils vous aident ?
32. Aurélie : Ben, c'est des exos de base, moi, je trouve ! Ceux qu'il faut savoir faire, au minimum.

[132] À ce moment de l'année (22 février), il est fort peu probable que, dans le cadre de l'Analyse, ces quatre élèves (dont aucun n'est redoublant) aient déjà rencontré officiellement le « concept » de fonction réciproque, même s'ils connaissent déjà celui de bijection, rencontré dès la 1eS. Dans leur classe de Terminale, les fonctions réciproques ne seront amenées que lors du cours du 2 mars, intitulé « Fonction exponentielle », et qui débute par l'intervention suivante de P : « On a vu que la fonction ln est une fonction bijective… De quoi sur quoi ?… De]0 ; +∞[dans **R…** Quand une fonction est bijective, à tout x correspond un y et à tout y correspond un x. La fonction exponentielle c'est la fonction réciproque de la fonction ln. On va commencer par regarder ce qu'est une fonction réciproque sur un exemple que vous avez vu en 3e. » Suit l'étude de l'exemple des fonctions carré et racine carrée. La première fois où les élèves rencontrent officiellement, dans le programme, la notion de fonction réciproque a lieu à propos des transformations en 1eS. Le programme note (BO n° spécial 2 du 2/5/91) : « Transformations réciproques d'une translation, d'une réflexion, d'une rotation, d'une homothétie. » Ce même programme précise en Analyse : « […] en dehors du cas de la racine carrée, l'étude des fonctions réciproques n'est pas au programme. » Une étude de 7 ouvrages de 1eS montre qu'un seul (Coll. Belin, p. 144), qui n'est pas en usage dans l'établissement de ces élèves, mentionne explicitement, après avoir établi leur bijectivité : « La fonction racine carrée est appelée **fonction réciproque** de la fonction f », f étant définie sur [0 ; +∞[par $f(x)=x^2$.
[133] Nous ne pouvons, en ce point, résister à la tentation de rappeler ce trait d'humour un peu grinçant de D. Guedj (1997) : « En politique, l'inverse de l'intégration, c'est l'exclusion. En mathématiques, c'est la différentiation. »

33. Q : Et le fait de les avoir faits en classe, d'avoir eu la correction, c'est pas suffisant ?
34. Aurélie : Si, mais moi je fais toujours plein d'exos.
35. Q : Et tu fais avec le corrigé, de manière à t'assurer que ce que tu fais, tu puisses confronter avec ?
36. Aurélie : Oui, oui.
37. Q : Donc, tu travailles essentiellement avec le bouquin, des exos corrigés ?
38. Aurélie : Oui, les exos qu'on a faits. Mais souvent je m'en souviens trop, alors… J'ai un petit livre aussi ; je fais sur un petit livre.
39. Q : Un livre d'exos corrigés ?
40. Aurélie : Oui.
41. Q : C'est quoi que tu as ?
42. Aurélie : C'est « Faire le point » je crois.
43. Q : Et toi ?
44. Alexandre : J'ai le même.

D'autres confirmations de la singularité de la position d'Aurélie par rapport à ses camarades sont données lors de deux entretiens qui viendront les jours suivants.
Le premier est un entretien *post* cours des 2 et 3 mars 1999. Avant de l'aborder, il est nécessaire d'examiner les contenus de ces deux cours, afin de pouvoir s'y référer. Comme indiqué dans la précédente note de bas de page, une partie du cours du 2 mars se rapporte formellement au chapitre intitulé par P « Fonction exponentielle ». Nous donnons, *in extenso*, le début de ce chapitre qui suit, le 2 mars, la fin d'une première partie se terminant par la démonstration que la courbe du logarithme se trouve sous ses tangentes :

1. P : On va changer de chapitre. Mais d'abord, quelques petites limites : pour mardi, n°76 de votre livre, pour mercredi problème n°97 et le n°75. La suite c'est la fonction exponentielle.

Fonction exponentielle

2. P : On a vu que la fonction ln est une fonction bijective… De quoi sur quoi ?… De]0 ; +∞[dans **R…** Quand une fonction est bijective, à tout x correspond un y et à tout y correspond un x. La fonction exponentielle c'est la fonction réciproque de la fonction ln. On va commencer par regarder ce qu'est une fonction réciproque sur un exemple que vous avez vu en 3e.

1. Fonctions réciproques

3. P : Qu'est-ce que vous avez vu en 3e ou en 4e comme exemple de fonction réciproque ?
4. Un élève : $\cos^{-1}$
5. P : $\cos^{-1}$ en 3e, tu rigoles, non ! L'année prochaine $\cos^{-1}$!
6. L'élève proteste puis se ravise : Ah oui, c'est pour les calculettes !
7. Un autre élève : $\frac{1}{x}$
8. P : Ben la réciproque de $\frac{1}{x}$?… Qu'est-ce que c'est ?…
P écrit au tableau en parlant :

$$\mathbf{x \rightarrow y = \frac{1}{x}}$$

$$\mathbf{\frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{y} \leftarrow y}$$

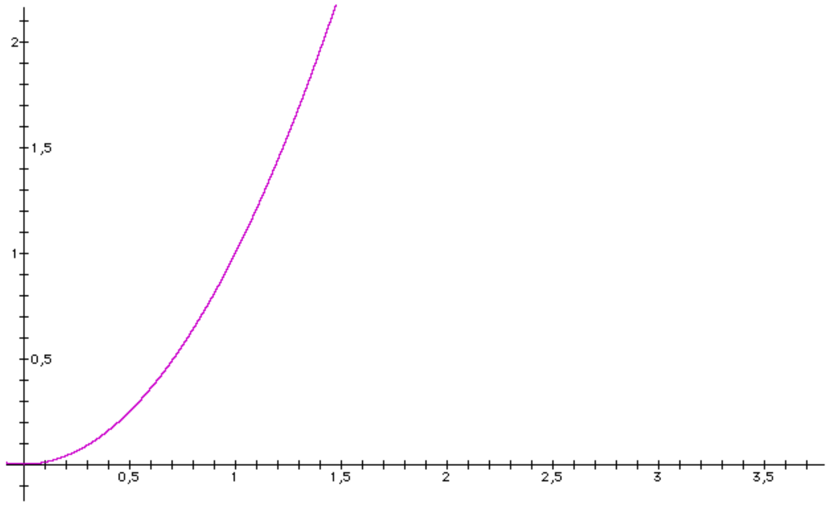
Vous connaissez pas quarante fonctions ! Fonction lambda standard ?…
9. Un élève : $\sqrt{x}$
10. P : Bon, quand même !

$x \to x^2$

Est-ce une bijection ?
11. Un élève : Non
12. P : Donc, nécessité de réduire le domaine de définition.

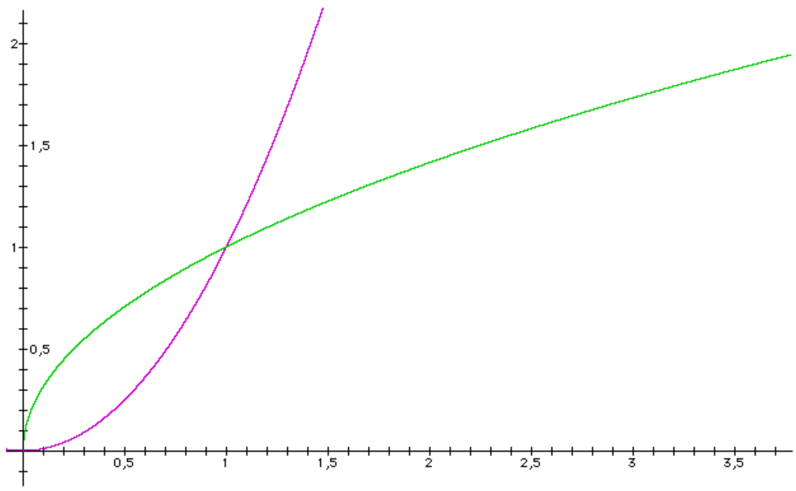
$[0\ ;+\infty[\ \to [0\ ;+\infty[$

C'est une demi-parabole :



$x \to y = x^2$
$\sqrt{y} \leftarrow y$

Si on dessine $y=\sqrt{x}$ sur le même dessin… Qu'est-ce qu'on trouve ?
13. Un élève : C'est symétrique par rapport à y=x.
14. P : On va le démontrer.



La suite du cours du 2 mars est consacrée au début de cette démonstration, ainsi que la deuxième heure de cours du 3 mars, la première ayant été consacrée à une interrogation écrite. Dans cette heure du 3 mars, après que la symétrie des courbes $y=x^2$ et $y=\sqrt{x}$ ait été démontrée, le cours se poursuit par la démonstration générale pour les représentations graphiques d'une fonction et de sa réciproque. À la suite de cette démonstration, et avant de démontrer que les tangentes à l'une des courbes sont les symétriques des tangentes à l'autre sur le cas $y=x^2$ et $y=\sqrt{x}$, se situe l'épisode suivant, où P commence à expliquer à un élève le passage du cas particulier $y=x^2$ et $y=\sqrt{x}$, au cas général $y=f(x)$ et $y=f^{-1}(x)$, et où l'intervention d'un autre élève montre qu'il entrevoit par avance les conséquences graphiques induites pour l'exponentielle :

P : […] Tu penses à f à la place de x^2 et f^{-1} à la place de $\sqrt{x}$; c'est la même chose. C'est une démonstration où l'exemple sert de généralité, en réalité. Il suffit de remplacer. Donc chaque point de P ' … Un élève : Donc, la courbe de l'exponentielle… P : Oui. Eh oui, eh oui. La courbe de la fonction exponentielle, ce sera la symétrique de la courbe de son logarithme. Alors, en route on va parler d'une autre fonction réciproque… Ah ben, non ! Je ne voulais pas vous en parler tout de suite. D'abord je voulais vous faire travailler sur la tangente. Je reviens à nos courbes bien tranquilles $y=x^2$ et $y=\sqrt{x}$. […]

Cette longue digression sur les cours des 2 et 3 mars nous permet de dégager du reste ce qui, dans le discours officiel de P à la classe, a été dit comme relevant de l'exponentielle :
- le titre du chapitre : « Fonction exponentielle », le 2 mars
- une des phrases introductives : « La fonction exponentielle c'est la réciproque de la fonction ln », le 2 mars
- le dialogue avec un élève : : « Donc, la courbe de l'exponentielle… P : Oui. Et oui, et oui. La courbe de la fonction exponentielle, ce sera la symétrique de la courbe de son logarithme. Alors, en route on va parler d'une autre fonction réciproque… », le 3 mars

Nous pouvons alors le confronter au contenu des entretiens *post* cours des 2 et 3 mars avec les deux binômes d'élèves. Dans le premier binôme, constitué d'Aurélie et Alexandre, l'entretien débute de la manière suivante :

1. Q : Essayez de me dire de quoi vous vous souvenez dans ces trois heures de cours 2. Alexandre : Mardi, on a corrigé des exercices. 3. Aurélie : Ensuite sur les tangentes. 4. Alexandre : Oui, on a étudié la position… 5. Aurélie : … par rapport aux tangentes. 6. Alexandre : Elle était constamment dessous. 7. Aurélie : … Exponentielle. 8. Alexandre : Mardi, on n'a fait que ça. 9. Q : Donc, le cours nouveau ? 10. Aurélie : Sur les exponentielles, on a commencé par voir ce que c'est qu'une fonction réciproque ; et là, on n'a fait que ça. 11. Q. : À votre avis, pourquoi ? Quel est le sens de cette étude ? 12. Aurélie : Parce que l'exponentielle, c'est la réciproque de ln ! 13. Q : Comment tu le sais ? 14. Aurélie : Ben, parce que je l'avais dit, la première fois qu'on s'est vu ! Quand on avait lnx égale un nombre, on pouvait retrouver avec le e, retrouver en fonction de ln. Donc, ça pouvait nous servir à retomber sur ln. 15. Q : Oui, tu avais dit « c'est le contraire », il me semble.

16. Aurélie : Je savais pas trop…
17. Q : Et donc là, en ce moment, en fait vous êtes partis sur les fonctions réciproques ; ça sert à quoi en fait ? Vous le voyez comment ? À quoi ça va servir ? Tu disais l'exponentielle, c'est la fonction réciproque du logarithme…
18. Aurélie : Ça nous permet de…Comme on sait qu'elle va être symétrique par rapport à y=x, il va y avoir toutes les mêmes propriétés qui vont venir.
19. Q : Si on récapitule un peu, le logarithme, en dehors de ses propriétés de fonction, de courbes, de tangentes, etc., y'a des propriétés algébriques : ln du produit égale somme des log. etc. Est-ce que vous pensez qu'on peut en faire quelque chose ?
20. Aurélie : Sûrement, mais…

Évidemment, pour tous les élèves en principe, il est connu désormais que le cours porte sur la fonction exponentielle, mais cela ne signifie nullement qu'ils puissent en donner, ne serait-ce qu'une ébauche de définition. Ainsi, tandis qu'Alexandre se tait, c'est Aurélie qui est immédiatement capable de faire le lien entre ce que le professeur a dit sur la fonction exponentielle, en introduction à ce chapitre (2. P : […] La fonction exponentielle c'est la fonction réciproque de la fonction ln.), ou sur le dialogue qu'il mène avec un élève (P : […] la courbe de la fonction exponentielle, ce sera la symétrique de la courbe de son logarithme), et ce qu'il avait déclaré en ouverture de ces entretiens. Il est remarquable de noter que ce lien passe, pour Aurélie, par la pratique ostensive de ln et de *e*, et qu'elle est alors la seule capable d'identifier le non-ostensif « exponentielle » à l'ostensif *e*. Cette association est issue de la pratique ostensive qu'elle a préalablement rencontrée, et qu'elle nommait maladroitement (15. Q : Oui, tu avais dit « c'est le contraire », il me semble. 16. Aurélie : Je savais pas trop…), et de la désignation officielle qui est désormais à disposition des élèves (2. P : […] On va commencer par regarder ce qu'est une fonction réciproque sur un exemple que vous avez vu en 3^{e}). Si, pour Alexandre qui se tait, il est difficile de savoir si ce lien entre fonction réciproque, fonction exponentielle comme réciproque du logarithme, utilisation de *e*, existe ou non (mais nous penchons pour la deuxième hypothèse, ce que confirmera l'entretien *ante* séance du 9 mars), nous n'avons aucun doute sur son inexistence pour Sarah et Ludivine, comme en atteste l'entretien post cours des 2 et 3 mars :

22. Ludivine : En deuxième heure, on a fait la fonction ln, heu, l'exponentielle.
[…]
24. Ludivine : Oui. On a étudié la symétrie de deux fonctions réciproques par rapport à y=x, et on a démontré que $\mathcal{P}$ était inclus dans la symétrique de $\mathcal{P}$ ', en fait.
[…]
26. Ludivine : Et que $\mathcal{P}$ ' était inclus dans la symétrique de $\mathcal{P}$ et puis…
27. Q : Donc, tout ça pour quoi ?
28. Ludivine : Tout ça ?… pour montrer que la fonction était…
29. Sarah : Que la racine carrée, c'est…
30. Ludivine : Était axe de symétrie, non…
31. Sarah : x^2.
32. Ludivine : Oui, voilà. Que $y=x^2$ et $y=\sqrt{x}$, c'étaient deux fonctions réciproques par rapport à un axe de symétrie y=x.
33. Q : Donc, que les courbes ?…
34. Ludivine : Oui, qu'elles étaient symétriques l'une de l'autre.
[…]
37. Q : Et ensuite, le cours ?
38. Ludivine : Le cours ? Mardi ?…
39. Sarah : Ouais, la courbe et la tangente !

40. Ludivine : Ah, les tangentes ! On a étudié les positions relatives de la courbe et de ses tangentes, et on a démontré que la courbe est toujours au-dessous des tangentes.
41. Q : D'accord. Et ensuite, vous dites que vous avez commencé le cours sur les exponentielles ?…
42. Sarah : Voilà !
43. Q : Et en fait, vous avez vu quoi ? Pour l'instant, ce que tu disais, c'est-à-dire les fonctions…
44. Sarah : Réciproques…
45. Q : […] Mais bon, pour le moment, où ça va ça ? Parce que quel rapport avec l'exponentielle ? C'est quoi ? Est-ce que vous voyez la filiation ?
46. Sarah : Ah ! Bonne question ! (rires) Ben là, franchement ?… Aucune idée…
47. Ludivine : Peut-être ça sert à rien quoi ! (rires). C'est peut-être le point à l'intersection des courbes… Le point d'abscisse… je sais pas.
48. Q : Le point d'intersection des courbes ?… C'est-à-dire ?
49. Ludivine : Des deux courbes.
[…]
51. Ludivine : Oui, bon, c'est peut-être ça (rires). Non, franchement je sais pas. Aucune idée.
52. Q : Vous voyez pas où elle veut vous mener, à l'heure actuelle, la prof ?
53. Ludivine et Sarah : Non.

Ainsi, l'entretien atteste d'un assez bon souvenir de ce qui s'est fait, de ce qui a été enseigné durant ces deux journées, mais d'aucune anticipation possible : ni sur ce qui va venir par la suite, ni de la raison d'être de l'étude sur la réciproque d'une bijection. Il semble même que les interventions dans lesquelles P dit explicitement que l'exponentielle est la réciproque du logarithme n'aient pas laissé de souvenir chez ces deux élèves, ou, en tout cas, ne fassent pas sens. Ainsi, dans la suite de l'entretien, alors que l'on revient sur l'exponentielle, c'est plutôt le souvenir d'un évitement qui est évoqué, parce que la notion est à écarter car elle ne correspond pas encore au temps didactique :

58. Q : Et exponentielle, vous voyez pas un petit peu ce que ça peut être ?
59. Ludivine : Non, franchement, c'est vague…
60. Sarah : Oui. Parce qu'on l'a jamais fait…
61. Q : Ah oui ça, effectivement, c'est le programme de Terminale, pas celui de 1^e^.
62. Sarah : Ben, du coup, on verra ça cette année !
[…]
71. Ludivine : Pour l'instant, moi, je peux pas trop travailler sur les annabacs, parce que les études de fonctions elles sont sur les études des fonctions exponentielles, et tout…
72. Q : Ben alors, c'est que tu sais ce que c'est !…
73. Ludivine : Non, non, non. Ben, justement j'arrive pas à les faire, quoi !
74. Q : Ben alors, comment tu fais pour savoir que c'est des exponentielles ?
75. Ludivine : Non, parce que c'est marqué en haut ! (rires)
76. Q : Ah ! D'accord ! Par thèmes, c'est vrai ! Exact. (rires). Donc, tu tries ?
77. Ludivine : Oui, je trie.

Quelques jours plus tard, dans l'entretien *ante* séance du 9 mars, pour ces deux élèves qui disent avoir étudié le cours, ce sens n'est toujours pas construit :

14. Q : Vous l'avez regardée la dernière leçon ?
15. Ludivine : Sur la fonction exponentielle ?
16. Q : Oui.
17. Sarah : Euh… oui mais on n'a pas fait grand'chose.
18. Ludivine : Ben, depuis la dernière fois, on n'a pas…
19. Q : Donc, en fait, pour le moment, elle se résume, la leçon sur l'exponentielle ?… Si vous aviez à en parler, pour l'instant ?…
20. Ludivine : Ben, en fonction réciproque. On n'a fait que ça.
21. Sarah : Ouais, voilà !

[…]
23. Sarah : x^2 et $\sqrt{x}$.
[…]
27. Sarah : Pourquoi elle parle de ça ? (*le « elle » désigne P*)
28. Q : Oui, parce que là, $\sqrt{x}$ et x^2 c'est des fonctions que vous connaissiez depuis la seconde…
29. Sarah et Ludivine : Voilà, oui.
30. Q : Donc, quel intérêt ici ? La question qu'on pourrait se poser c'est : quel intérêt ici ?
31. Sarah : Ben , en fait, on sait pas trop. Parce que c'est tout neuf comme leçon.
32. Q : Oui.
33. Sarah : Donc, je sais pas…
34. Ludivine : Non, je sais pas trop.
35. Sarah : … ce qui se passe ensuite, quoi.
36. Q : Vous voyez pas à quoi ça peut bien servir ?…
37 : Sarah et Ludivine : Euh…
38. Q : […] Donc, pour le moment, si on récapitule, c'est un peu flou, quoi ?
39. Ludivine : Voilà, quoi.
[…]
41. Sarah : [rires] C'est un peu flou !

On retrouve, dans la suite de l'entretien, ce sur-assujettissement au temps didactique ; la fonction logarithme ayant été enseignée, elle doit être connue des élèves qui se sont appliqués à l'étudier, ce qui *a contrario* justifie leur absence de connaissances sur l'exponentielle, puisque sa définition n'a pas encore été explicitement donnée :

42. Q : En fait, si vous pouviez résumer ce que vous savez à l'heure actuelle, de ce chapitre ?…
[…]
45. Sarah : Ben en fait, déjà, je vois pas le rapport avec les fonctions réciproques…
46. Ludivine : … Non, c'est pas ce qu'elle fait, en fait. Une fonction exponentielle, on sait pas ce que c'est encore.
47. Q : Oui. Donc, ça a à voir avec la fonction exponentielle, mais on ne sait pas ce que c'est…
48.Ludivine : … par rapport avec les fonctions réciproques. Mais, alors ?…
49. Sarah : … on ne sait pas quel rapport.
50. Q : Quel rapport… Et par contre, le chapitre sur le logarithme, là, vous diriez quoi ?
51. Ludivine : Par rapport à la fonction exponentielle ?…
52. Q : […] Alors oui, tu peux dire par rapport à la fonction exponentielle. Y a-t-il un rapport entre les deux ? Question ! Et…
53. Sarah : Entre la fonction exponentielle et la fonction logarithme ?…
[…]
55. Ludivine : Logarithme, oui. Et moins sur exponentielle.
56. Q : Voilà ! Et donc, sur logarithme, vous pourriez dire quoi, grosso modo ?…
57. Sarah : C'est une fonction qui permet d'additionner des termes qu'il faudrait multiplier ; soustraire aussi. Donc, ça a plusieurs intérêts quoi. On sait comment résoudre les équations avec des fonctions ln.
58. Ludivine : Étudier…
59. Sarah : Calculer des limites de cette fonction.
60. Ludivine : Connaître les ensembles de définition, sa dérivée, des limites aux bornes des intervalles, des tangentes.
61. Sarah : Ouais. La limite et les tangentes.
62. Q : Donc, finalement, vous pourriez dire qu'à la fin du chapitre sur la fonction logarithme, ben, vous savez étudier les fonctions…
63. Sarah : … logarithmes ! [rires]

Le même jour, la situation n'a pas, non plus, évolué avec Aurélie et Alexandre, qui arrivent en ordre dispersé dans la salle où sont restées Sarah et Ludivine, ce qui donne l'entretien suivant avec Aurélie tout d'abord :

17. Q : […] Enfin, P a commencé le chapitre fonction exponentielle avec la fonction x^2 et la fonction $\sqrt{x}$ …
18. Aurélie : Oui.
19. Q : Est-ce que tu vois pourquoi ?
20. Aurélie : Ben oui, puisque la fonction exponentielle, c'est la fonction réciproque de logarithme !
21. Ludivine : Ah ! On voit mieux alors ! [rire]
[…]
23. Aurélie : Ben, parce qu'on a vu que lnx, on pouvait le transformer en mettant e. Ben, ça nous permettait de retomber sur l'un ou l'autre, donc, justement y'avait un lien et on va voir ça.

Pour Alexandre, les choses sont beaucoup moins claires. Il possède tous les éléments : fonction logarithme, fonction réciproque et *e*, mais n'est pas capable de tisser le lien convenable entre eux. Ainsi :

44. Donc, si on te demandait de faire le point sur ces deux chapitres, à l'heure actuelle, tu dirais quoi, grosso modo, sur ce qu'il faut connaître sur la fonction logarithme, ou ce qu'il faut connaître, au point où on en est, sur la fonction exponentielle ?
45. Alexandre : Ben, déjà c'est lié les deux.
46. Q : Pourquoi ?
47. Alexandre : Ben, parce que … Ben, je sais pas. On avait déterminé la valeur de e, donc là je sais pas, on continue.

À ce stade donc, Alexandre apparaît tout autant assujetti au temps didactique que Sarah et Ludivine, ce qui l'empêche de se poser les mêmes questions qu'Aurélie, même s'il est à l'écoute de ce qu'elle peut dire. Pour lui non plus, cette introduction de l'exponentielle par les fonctions réciproques ne fait guère sens et il se laisse porter par l'avancée du temps didactique : « on avait déterminé la valeur de e, donc là je sais pas, on continue » dit-il, en forme d'excuse à son impossibilité de trouver du sens à ce qui est enseigné.

4. 1. 2. 3. Conclusions tirées de cette étude

Il apparaît donc que l'étude, ou tout au moins un certain type d'étude qui reste à définir, induit des phénomènes de chronogénéité pour certains élèves ; c'est ici le cas seulement pour Aurélie. D'autre part, c'est la pratique des ostensifs qui, associée à une certaine capacité de réflexion sur la pratique du savoir dans laquelle ils sont engagés, permet à ces élèves d'anticiper ; c'est le cas d'Aurélie et de l'élève qui dialogue avec le professeur des conséquences graphiques pour l'exponentielle d'être la réciproque du logarithme.
Pour Aurélie, lorsqu'on est confronté à ce qui paraît être une impasse dans une équation du type $\ln x=n$, l'utilisation de *e*, qui permet de résoudre le problème, peut aussi être vue comme une pratique « contraire » de celles qui sont autorisées par le logarithme. La mise en évidence personnelle de cette pratique s'opère peut-être au prix de l'oubli de l'étape $\ln x=\ln e^n$, pour passer directement de $\ln x=n$ à $x=e^n$; mais cela reste à démontrer. Cette intuition d'une pratique « contraire » ouvre le champ, pour Aurélie, de l'étude de ces pratiques « contraires » l'une de l'autre, permettant de passer de l'écriture ostensive avec ln à une autre avec *e*, et réciproquement. Nous avons donc ici la confirmation que certains élèves se posent, de façon personnelle et privée, des questions auxquelles va répondre l'avancée du temps didactique. Pour eux, ces questions sont issues de l'utilisation des ostensifs en tant qu'outil de la pratique

mathématique. Ils retrouvent alors, dans ce cas, la fonction classique des outils en tant qu'aides à la pensée, instruments sur lesquels appuyer une certaine créativité personnelle à l'intérieur du domaine sur lequel portent ces outils, ici celui du savoir mathématique.
De façon symétrique, cette anticipation n'est pas réalisable pour trois de ces élèves très assujettis au temps didactique. Ils se trouvent dans une sorte de logique « applicationniste » (qui va du cours dispensé par le professeur vers les exercices à rechercher par les élèves) des organisations mathématiques que l'avancée didactique a permis de connaître officiellement. La tâche de porter, à la connaissance de tous, des parties nouvelles du savoir mathématique reste pour eux celle du professeur ; ils ne s'autorisent pas à imaginer qu'ils puissent un tant soit peu occuper cette place. Ils restent alors au stade du travail de la technique qui leur est dévolu à l'intérieur du topos qu'ils n'envisagent pas de pouvoir élargir ; travail de la technique perçu à travers l'injonction qui leur est adressée de faire les exercices et d'apprendre le cours, sans pouvoir imaginer une rétroaction des techniques sur le bloc technologico-théorique. Ils sont dans une logique du savoir-faire, et non dans une logique du savoir. Pour eux, les techniques s'accomplissent avec les outils ostensifs mis à leur disposition et qu'il faut connaître, mais sans qu'il soit nécessaire d'interroger ces outils, de tester si leur usage ne pourrait pas être étendu, s'il n'est pas possible de les améliorer. Ce faisant, il leur est interdit, ou plutôt ils s'interdisent, de penser ou même d'envisager des non-ostensifs nouveaux qui engloberont des pratiques ostensives inédites qu'ils ne peuvent entrevoir. C'est la raison pour laquelle, le professeur aura beau déclarer, à plusieurs reprises, que l'exponentielle est la réciproque du logarithme, cette affirmation ne fera pas sens pour eux.

Bautier et Rochex (1998), dans la conclusion de leur ouvrage, renvoient dos-à-dos deux types d'explication causale de l'échec de certains élèves : celle qui consiste à le faire porter sur l'absence de « motivations » dont il résulte un manque de travail des élèves, et celle qui attribue leur échec aux lacunes et déficits cognitifs antérieurs et dont il résulte, par contre coup, leur manque de motivation. Une conséquence de cette vision de l'échec solaire est que :

> « […] dans l'un et l'autre mode d'enchaînement causal, on ne pense ce qu'il est convenu de nommer la "motivation" (que l'on n'évoque le plus souvent que pour en déplorer l'absence ou la perte) que comme phénomène extérieur ou marginal par rapport à la nature de l'activité et du travail intellectuels pour lesquels on constate ou on croit constater que les élèves sont ou ne sont pas "motivés" » p. 292.

Afin de se démarquer de ces fausses explications causales et d'ouvrir des pistes, ils proposent :

> « […] de porter le regard au-delà des performances, des comportements et des attitudes les plus immédiatement perceptibles, *vers l'activité réelle des élèves et les processus - cognitifs et subjectifs - qui peuvent en rendre compte,* et vers l'analyse et la reconnaissance des difficultés spécifiques sur lesquelles bute cette activité pour produire de réels apprentissages, *et des résistances propres à leurs rapports au savoir*, au langage, au monde et à eux-mêmes. […] L'exigence ne saurait pour autant faire fi de la réalité des élèves, mais encore faut-il pouvoir appréhender celle-ci, non pas à l'aide de catégories généralisantes et extérieures à leur activité cognitive et à leurs rapports au savoir, au langage et au monde, mais *en travaillant à mieux élucider ce sur quoi achoppe cette activité, ce en quoi ces rapports peuvent faire que certains élèves résistent* à l'apprentissage et au travail qu'il requiert. » (*souligné par nous*) p. 293.

Ce programme nous semble être celui de la didactique, en tant que discipline qui tient nécessairement compte, parce que c'est l'objet fondateur de son champ d'étude, de l'activité mathématique, du rapport qu'y entretiennent les élèves et de son évolution, des processus de conversion des assujettissements extérieurs aux dispositions pour l'étude (même si ce dernier point, spécifique de l'approche anthropologique, n'est pas encore suffisamment développé), loin des discours englobants et extérieurs à la réalité de l'activité mathématique, mathématiques qu'on range généralement dans le cadre des activités cognitives.

De l'observation de cette possibilité d'anticipation mise en évidence dans l'exemple d'Aurélie, - et sans doute effet différé d'avoir éprouvé l'importance de certains besoins désormais résolus en savoir (savoir résoudre l'équation $\ln x=n$) - apparaissent quelques voies permettant d'explorer, « l'activité réelle des élèves et les processus - cognitifs et subjectifs - qui peuvent en rendre compte ».
Les processus subjectifs sont liés, en première approche, à l'adhésion plus ou moins forte au contrat didactique. Une conséquence en est l'existence ou non d'un jeu qui permet une réflexion menée sur sa propre pratique des mathématiques, cette réflexion résultant de la place assignée à l'élève, ou qu'il s'assigne à lui-même, dans le processus d'étude. Des élèves engoncés dans la place que leur attribue traditionnellement le contrat ne peuvent mener cette réflexion sur les outils de leur pratique. Ils se servent de ces outils, et du mieux possible, selon l'usage qui leur a été enseigné à cet instant de la progression didactique, mais sont empêchés de s'engager dans certains processus cognitifs, parce qu'ils n'imaginent pas la possibilité de sortir un tant soit peu de la place qui leur est attribuée. On retrouve, en ce point, un des postulats anthropologiques sur lesquels nous nous appuyons, et qui pose que l'activité cognitive privée ne saurait s'exercer indépendamment des conditions sociales assignées à la personne qui s'y livre, et des conditions qui favorisent ou non l'engagement dans des pratiques.
La question qui demeure ouverte porte sur les raisons de cette adhésion trop forte au contrat. Sans doute, cette caractéristique de l'enseignement des mathématiques, qui n'enseigne pas les raisons d'être des organisations de savoir (donc les questions auxquelles le savoir répond, parce qu'elles ont été trop souvent oubliées) n'est pas étrangère à la « fabrication » d'élèves qui ne se posent ni les questions de ces raisons, ni les questions des outils, et de leur usage, qui sont des moyens pour produire des réponses.
Cependant, puisque des élèves soumis au même type de contrat parviennent, par l'étude, à créer pour eux-mêmes suffisamment de jeu pour mener une activité réflexive sur la pratique des mathématiques qu'ils sont amenés à rencontrer, il faut chercher l'origine de cette disposition dans leurs assujettissements extérieurs, non réductibles à la seule étude des mathématiques. C'est donc un large champ, dont l'exploration n'en est qu'à ses débuts, qui s'ouvre ainsi. Il ne peut, sous peine d'en rester à un degré de généralité qui n'apporte rien à la connaissance, contourner trois points fondamentaux : se priver de l'étude des processus de conversion qui mènent à l'étude de la pratique considérée, mépriser l'étude des caractéristiques de cette pratique et de ses outils, oublier l'étude de son étude. Les deux derniers points ont été, historiquement, étudiés par les didactiques, mais ce travail est loin d'être achevé. L'exploration du premier a été attaquée par diverses voies. Il est désormais

nécessaire de structurer ces approches par l'étude des finalités assignées à ces processus de conversion, c'est-à-dire par ce qui relève d'un savoir et de son étude, donc de la didactique de ce savoir. Nous n'aborderons pas plus ce thème dans le cadre de cette thèse, car il mériterait à lui seul de nombreux travaux de recherche qui surpassent ce seul travail. Nous montrerons cependant, dans la cinquième partie, une voie illustrée d'un exemple d'ingénierie didactique, favorisant l'anticipation de questions et la création de réponses pour les élèves d'une classe ordinaire de Collège, indépendamment de leurs sur ou sous-assujettissements extérieurs, et qui mise sur leur assujettissement à une forme particulière d'étude menée en classe.

4. 2. Effets sur la mémoire pratique induits par la mémoire ostensive utilisée par le professeur

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous avions défini la mémoire ostensive comme étant une mémoire délibérément donnée à voir, par une institution ou un de ses sujets, et de façon revendiquée, aux sujets d'une institution ou à d'autres personnes. Nous avions indiqué une de ses fonctions, construire un milieu pour le savoir enseigné, et donné quelques exemples. Ils montraient comment le professeur pouvait demander aux élèves de se souvenir de certains ostensifs ou non ostensifs. Ceux-ci jouaient alors le rôle d'indice de rappel pour certaines couches de mémoire pratique, que le professeur anticipait comme coïncidant avec les pratiques institutionnelles, et qui, rendues publiques par les réponses des élèves, permettaient d'amener dans le milieu institutionnel, en vue de les activer, certaines pratiques, manipulations ostensives ou techniques dont il avait besoin à ce moment du temps didactique.
C'est une manière assez souple, et en tout cas considérée comme conviviale, de développement de la maïeutique qui permet au professeur d'enseigner ; même si les élèves ne rencontraient pas forcément une dimension a-didactique qui leur permettait d'apprendre, dans ce que nous avons désigné comme étant un « milieu », sous une acception plus large que celle utilisée en théorie des situations, et qui correspond davantage à un cours dialogué.
Nous voudrions montrer que cette mémoire ostensive s'exprime parfois beaucoup plus brutalement, soit parce que le professeur dit directement les rappels qu'il veut utiliser ou voir utiliser, en se passant de l'attente de réponse des élèves, soit parce qu'il va jusqu'à une sorte de tour (ou de coup) de force mémoriel. Cette utilisation brutale provient parfois, de nouveau, d'un manque technologico-théorique.

4. 2. 1. Une même séance, deux observations

4. 2. 1. 1. Praxème, valeur praxématique

Nous utiliserons ici le terme de *praxème* dans le sens d'une unité relative à la pratique mathématique en général ou à son étude[134]. Cette unité de pratique devient alors un objet qui

[134] Ce terme provient d'un courant de la linguistique, la praxématique, et a été utilisé notamment par Lafont (1978) qui en donne la définition suivante : « Mais le praxème n'est pas exactement le monème ou morphème. Ou il ne l'est, si l'on veut, que comme unité formelle. On comprend, d'après ce que nous avons dit de la praxis linguistique liée aux autres praxis, qu'il demeure instrument. Il n'est pas "doué d'un sens". Il est l'unité pratique de production du sens, ce qui est fort différent ; comme l'acte produit par l'outil, lui-même produit par le travail, ne se confond pas avec l'outil, même si la forme de l'outil lui donne déjà une forme. » p. 29. Chevallard reprend ce terme dans un article de 1991, duquel nous nous inspirons. Le mot est utilisé par nous dans le sens d'une classe d'objets plus large que les seuls ostensifs, qui ne sont que des outils par lesquels ou grâce auxquels s'actualise, ou *se donne à voir*, la pratique mathématique. Il s'agit donc de désigner une pratique mathématique de « taille inférieure ou rarement égale à une technique » en englobant ce qui ne se laisse pas forcément donner à voir, ou de désigner une pratique qui ne se réduit pas seulement à une technique mathématique-standard, telle qu'elle peut être attendue d'une institution.

peut être désigné, en oubliant la pratique dans laquelle il est pris. Par exemple crayon et feuille sont des praxèmes dont l'activité pratique dont ils émergent, pratique d'écriture ou de dessin, a été mise à distance. Cette pratique peut être spécifiée par des verbes d'action s'appliquant à divers « objets » mathématiques, par exemple : *se référer* à des non-ostensifs qui contiennent des pratiques, ou *s'engager* dans des pratiques réglées par des manipulations d'ostensifs, celles-ci pouvant être liées à chacune des diverses composantes des organisations praxéologiques telles qu'*effectuer* une tâche, *mettre en oeuvre* une technique, *faire appel* à des éléments technologico-théoriques pour *justifier* le bloc pratico-technique. Ainsi le terme de praxème pourra-t-il s'appliquer à des notions telles que « type de tâche », « tâche », « technique », « manipulation d'ostensifs », « évocation de non-ostensifs », « geste », ou, en général, à des unités pratiques relevant de l'étude des mathématiques… L'ensemble des usages auxquels renvoie le mot praxème dans le sens où nous l'utilisons, ne nous paraît pas très éloigné du sens que lui a primitivement donné Chevallard (1991a) :

> « Nous appellerons alors *praxèmes* ces objets comme pris dans des *pratiques*. Un objet est ainsi *un émergent d'un système de praxèmes*. Un objet émerge dans des pratiques. C'est en particulier par la manipulation des praxèmes que nous pouvons *évoquer* l'objet " tout entier", le rendre présent. […] Considérons la pratique qui consiste à planter un clou avec un marteau. […] Le marteau et le clou sont ici des praxèmes : des objets pris dans une pratique. De même les mots *marteau* et *clou* sont des praxèmes des pratiques discursives où ils entrent en jeu (par exemple pour celui qui lit ou écrit cette ligne). ».

À tout praxème, nous considérons que peut être attribuée une valeur, selon une échelle allant de faible à forte, et qui renvoie à « ce qui peut se faire avec » le praxème dans une institution donnée ; il en résulte que cette valeur est relative à l'institution. Dans le cas du praxème « (résoudre une) équation » des valeurs faibles peuvent par exemple correspondre à lire, entendre, évoquer… une équation en Terminale S, alors que ces mêmes praxèmes auront une valeur forte dans une classe de 5^{e} ou 4^{e} où l'on n'en est encore qu'aux prémisses de l'étude des équations. Sur cet exemple des équations, des valeurs fortes peuvent par exemple correspondre en Terminale S à connaître, décrire, mettre en œuvre une organisation mathématique permettant de résoudre effectivement divers types d'équations, par exemple non algébriques. Un praxème est donc un rapport au savoir, mais un rapport *qui demande à s'actualiser* dans une pratique qui relève de ce savoir, cette pratique s'accomplissant dans une institution, où sa valeur lui est donnée par son aspect plus ou moins sensible.

Ce rapport peut se décliner selon tout une gamme de pratiques, personnelles ou institutionnelles, certaines pouvant être inconnues ou impossibles : dans le cas des équations, cette gamme peut, par exemple, s'étendre de la définition de la différence à l'école élémentaire à la résolution de l'équation de Schrödinger pour certaines valeurs à l'Université.
Dans une institution donnée, plus les pratiques associées au praxème que peut mobiliser une personne correspondent à la pratique institutionnelle attendue, plus la valeur du praxème est forte pour cette personne relativement à l'institution, et inversement. Si la personne ne peut associer au praxème que son nom, à l'exclusion de toute pratique attendue dans l'institution et relative au praxème, si elle ne peut que l'évoquer, alors la valeur attribuée au praxème pour cette personne dans cette institution est la plus petite valeur non nulle possible : le praxème est alors, du point de vue de l'institution, réduit à un emblème pour la personne, auquel ne

peut être associé aucun ostensif, et donc aucune pratique.

Cette valeur praxématique peut tout aussi bien être attribuée à une institution par une autre institution, ou à une personne qui lui est attachée.
C'est par exemple le cas si l'on considère l'institution « classe de 4^e » et le praxème « irrationnels ». Un professeur de quatrième peut, peut-être, évoquer une pratique montrant l'irrationalité de certaines racines carrées d'entiers par l'impossibilité de les écrire sous la forme *p/q*. Il pourra, peut-être, aller jusqu'à montrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$[135]. Il est très improbable qu'il le fasse pour d'autres racines carrées, et il est certain qu'il ne le fera pas pour π ! La valeur praxématique de « irrationnels » est ainsi, relativement à une institution porteuse d'une connaissance élaborée des irrationnels, très faible, voire nulle, en 4^e, où les pratiques qui les engagent sont très ténues, et où, d'ailleurs, ce mot n'existe pas dans le programme officiel qui constitue un bon lexique : il n'y existe donc pas au regard de l'institution officielle qui définit ce qui doit se faire en 4^e.
La rencontre avec l'objet, dans cette classe, est définie par le programme officiel de 1997 qui précise à la rubrique « Contenus » : « Touche $\sqrt{\ }$ de la calculatrice »… Et à la rubrique « Compétences exigibles » : « Trouver à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre positif », le terrain d'action privilégié de cette recherche étant le théorème de Pythagore précisent les « Commentaires ». Le dispositif pratique auquel les élèves ont à recourir pour rechercher une valeur approchée d'une racine carrée est donc constitué de la calculatrice, de la manipulation convenable de ses touches et de la lecture de son écran. C'est donc essentiellement à travers la pratique de la calculatrice que passe la rencontre avec certains irrationnels, d'où peut-être la confusion (pratique) fréquente entre décimal et irrationnel chez de nombreux élèves. En tout état de cause, l'ostensif $\sqrt{\ }$ n'existe qu'à travers la pratique institutionnellement attendue en ce lieu, et le « sens » du non-ostensif « racine carrée » n'apparaît, pour l'institution « classe de 4^e », qu'à travers les pratiques qui s'y déploient officiellement et qui se réduisent ici à un seul praxème : se servir de ses doigts pour utiliser correctement les touches de la calculatrice afin de lire avec ses yeux une valeur, exacte ou approchée, d'une racine carrée.
Dans l'institution « classe de 3^e », cette pratique de l'ostensif $\sqrt{\ }$ s'enrichit d'autres usages, sous la forme de types de tâches : passer de l'écriture $\sqrt{n}$ à l'écriture $a\sqrt{b}$, avec *b* entier le plus petit possible, simplifier des écritures en utilisant le produit ou le quotient des racines carrées, etc. Ce dernier type de tâches nécessite des élèves, qu'ils se soient convenablement appropriés la pratique d'éléments technologiques tels que :
$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (*a* et *b* entiers naturels, avec $b \neq 0$ dans le second cas).
Chacune de ces pratiques est « unitaire », dans le sens où n'apparaît, relativement à l'institution donnée, que l'enseignement et l'utilisation d'un seul geste nouveau (écrire des produits ou des quotients en utilisant des lettres *a* et *b* n'étant pas l'objet sensible de cet enseignement, ce type de tâches est considéré ici comme routinier), et qui peut se résumer en : $\sqrt{* \times *} = \sqrt{*} \times \sqrt{*}$. Chacune d'elle correspond ainsi à l'actualisation d'un praxème, en tant

[135] C'est désormais un des thèmes d'étude possibles en 2de, dans le programme applicable à la rentrée 2000.

qu'unité d'une pratique, qui permet, grâce à des ostensifs, d'accomplir d'autres pratiques répondant à des types de tâches mobilisant des techniques associées.

4. 2. 1. 2. La mémoire ostensive utilise praxèmes et contrat didactique pour mobiliser la mémoire pratique nécessaire à l'interaction enseignante

L'observation se déroule de nouveau dans une classe de Terminale S étudiant le logarithme népérien. Elle a lieu le 7 janvier 1997, alors que les élèves ont à chercher en classe des résolutions d'équations logarithmiques, et débute de la manière suivante :

> 1. P : Vous êtes censés connaître le cours sur la fonction logarithme. Je vous donne quelques équations. Vous les cherchez pendant 10 mn et ensuite on regarde ensemble. *Il est 14h25 et P écrit au tableau :*
>
> **Résoudre :**
> **a)** $(\ln x)^2 + 3\ln x - 4 = 0$
> **b)** $\ln(x^2) + \ln ex - 4 = 0$
> **c)** $\ln(x^4) + \ln(x^2) = 0$
> **d)** $\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln 2$
> **e)** $\ln(x^2-1) = \ln 2$

La recherche de cet exercice constitue une première rencontre avec les équations logarithmiques. C'est plutôt, en fait, la première rencontre avec la problématicité de ce nouveau type d'équations qui est organisée ici : la mise en œuvre des techniques antérieurement connues va échouer, et aucune technique de résolution n'a été montrée dans le cours. L'objet de cette séance est donc, précisément, l'étude de ces techniques à travers la rencontre par les élèves de la problématicité des tâches de résolution demandées.

Le type de tâches « résoudre une équation » est accompagné du rappel de la clause du contrat didactique stipulant que le cours ayant été préalablement enseigné par le professeur, les élèves sont censés le connaître. Cette clause doit être comprise comme condition nécessaire pour les exercices : si le cours est connu, alors les élèves peuvent s'engager dans la recherche des exercices. Le cours garantit une possibilité d'entrée dans les exercices. « Souvenez-vous de ce qui est dans le cours sur le logarithme ; tout ce qui est nécessaire à la résolution de l'équation y figure » pourrait être la traduction de ce « Vous êtes censés connaître le cours sur la fonction logarithme », qui est la première phrase prononcée par le professeur en introduction de cette séance d'exercices. L'évocation du cours joue ainsi, contractuellement, le rôle d'indice de rappel.
De même, le type de tâches « chercher une équation » est supposé contenir, pour sa mise en œuvre, des praxèmes à valeur non nulle : il doit évoquer un ensemble de sous-tâches d'ordre technique (utiliser des techniques spécifiques des équations comme transposer, utiliser des propriétés algébriques, etc.) qui lui sont associées. Il garantit donc, lui-aussi, la possibilité de l'entrée des élèves dans le travail qui leur est demandé, par l'activation des couches appropriées de mémoire pratique.

Cependant, le respect de ces clauses, contrairement à ce que le professeur laisse entendre, est loin de garantir aux élèves la possibilité de venir à bout de la tâche problématique dans laquelle il les engage. Ainsi, dans cette séquence, le caractère problématique de la tâche à accomplir, qui consiste à résoudre par exemple l'équation $(\ln x)^2+3\ln x-4=0$, et qui constitue une actualisation, ici et maintenant, d'un ensemble de praxèmes traditionnellement attachés à sa technique associée, va apparaître aux deux niveaux précédemment décrits et qui garantissaient, contractuellement, la possibilité pour les élèves de se lancer dans l'accomplissement de cette tâche. En effet, dans cette classe, et à ce niveau d'avancée dans l'étude du logarithme népérien, on peut remarquer que, pour résoudre une telle équation :

- la mise en œuvre des praxèmes connus, convoqués par le type de tâches « résoudre une équation », se heurte à la non-disponibilité des techniques permettant de ramener l'équation avec logarithme à une équation algébrique du type de celles antérieurement étudiées (le changement de variable est connu des seuls redoublants)
- la « connaissance » du cours ne suffit pas : il ne contient aucun exemple de résolution d'équations de ce type, mais une définition de e et une remarque à son sujet, aucunement ce qui peut être fait avec. e est donc un ostensif à valeur praxématique très faible. Le cours ne fournit donc pas les moyens de la mise en œuvre des outils potentiels qu'il contient pourtant. Il faudra que soit montrée la mise en œuvre de ce que le cours permet de fabriquer comme outils appliqués dans des techniques, et leur utilisation (donc que soit donné à voir quelles sont les techniques associées à la tâche), pour qu'*a posteriori*, pour tous, et notamment pour les élèves, la connaissance du cours serve de justification, de légitimation, aux techniques utilisées

Le cours joue alors ici un seul rôle : celui de l'exposé d'une organisation technologico-théorique à laquelle se référer pour valider ou non une technique. Au début de cette recherche d'équations, c'est donc uniquement sur une valeur praxématique non nulle relative aux équations (ici, par exemple, le fait que l'on effectue certaines transformations de son écriture sans que l'ensemble des solutions en soit affecté), et essentiellement sur la référence contractuelle au cours, que le professeur peut s'appuyer pour développer une maïeutique permettant l'enseignement de certaines étapes de la technique.

Nous nous attachons, maintenant, à un épisode de la résolution de cet exercice qui se produit après que le professeur a montré à la classe ce qu'elle ne pouvait trouver d'elle-même : la technique de résolution d'une équation du type $\ln x=n$; technique montrée de la manière suivante :

21. P : Vous savez ça :
P écrit au tableau :

lne=1

et vous savez ça :
P écrit au tableau :

$\ln x^n = n\ln x$

alors ça, c'est quoi ? :
P montre au tableau l'équation :
$\ln x = n$
J'en déduis quoi de ça ?
P montre ce qui est écrit au tableau et commente : " Logarithme de x égale n, comment je peux résoudre ça ? "
22. *Brouhaha de certains élèves : on entend un élève qui tente une réponse* x égale e ?…
23. P : Ben oui parce que ça veut dire *(en écrivant au tableau)* :

$$\ln x = n \times 1$$
$$\ln x = n \ln e$$
$$\ln x = \ln e^{n}$$

ça se termine comment ?
24. Plusieurs élèves : $x=e^n$
25. P : Oui, pourquoi ?
26. Un élève : C'est une formule que j'ai apprise l'année dernière
27. P : Pourquoi je peux passer de là à là… Parce que la fonction logarithme est ?…
28. Des élèves : Strictement croissante
29. P : Strictement croissante…si vous voulez, et ?…
30. Un élève : bijective

La classe, disposant enfin de la technique, peut alors se lancer dans la résolution de ces équations. Un élève redoublant passe au tableau pour résoudre la première équation a) et utilise, sans problème, un changement de variable qu'il associe à la technique montrée par le professeur, ce qui le conduit à la réponse. On continue ainsi, et la troisième équation, c) $\ln x^4 + \ln x^2 = 0$, est résolue par un élève au tableau, tandis que la discussion s'engage entre le professeur et des élèves qui se sont trompés :

89. P se tournant vers un groupe d'élèves : Bon, alors lui il n'a pas pu faire apparaître le 1 et -1. Pourquoi votre truc est faux ?
90. Les élèves : On est passé par équivalence. Par la valeur absolue

C'est alors, pour le professeur, l'occasion d'utiliser une analogie qui s'appuie sur un souvenir qu'il déclare être celui de la classe, afin de mettre en garde sur le signe du nombre dont on prend le logarithme :

91. P : Oui, tu as raison, tu as raison. Alors qu'est-ce que c'est qui ne va pas dans ce que vous avez fait ? C'est la même histoire que lorsqu'on manipule des racines carrées, et en seconde on vous a déjà expliqué ça.
92. *P tout en écrivant au tableau* : Vous avez $\ln x^2$ et ça existe si x différent de 0. Vous, vous écrivez que ça fait 2lnx. Ben ça, c'est pas toujours vrai. Quand est-ce que c'est vrai ça ?
93. Une élève : Si x différent de 0
94. P : si x égale -3, c'est pas vrai. C'est quand x est strictement positif. C'est exactement la même chose que quand vous écrivez :

$$\sqrt{a^2} = a$$

Ça, c'est vrai quand a est positif. Si a = -3, ça c'est faux ! On vous avait déjà fait rencontrer des phénomènes comme ça. Vous n'avez le droit d'écrire ça que si x est positif. Vu ? Et c'est comme ça que vous vous êtes faits avoir. Alors Dur. avait eu une autre idée. C'était d'écrire :

$$\ln x^2 = \ln |x|^2 = 2\ln |x|$$

et ça c'est vrai dès que x est non nul. Donc ça devient un autre moyen de s'en tirer. On écrira que ça fait :

$4\ln|x| + 2\ln|x| = 0$

$\ln|x| = 0$

$|x| = 1$

D'où x égale 1 ou -1. Ça marche aussi, d'accord ? Mais n'oubliez pas que quand vous écrivez ça (*P montre* $\ln x^2 = 2\ln x$), de même que quand vous écrivez lna + lnb = lnab… Mais lnab, ça existe lorsque a est négatif et lorsque b est négatif ; par contre lna + lnb ça n'existe pas quand a et b sont négatifs tous les deux. C'est exactement la même chose que quand vous avez, vous ne pouvez pas dire que c'est. OK ? Ça existe parce que (-2)×(-3) est positif, mais ça n'est pas pareil que.
95. P : Alors d) et e). […]

Le même souvenir est évoqué par le professeur lorsque, la résolution de l'équation d) $\ln(x+1)+\ln(x-1)=\ln 2$ ayant été faite, il engage la classe à résoudre e) $\ln(x^2-1)=\ln 2$:

106. P : « Bien, dans la foulée vous me faites le deuxième. Alors ici la différence, c'est que le domaine de définition, c'est plus le même. Cette fonction-là, elle existe aussi sur. Vous voyez que c'est exactement le $\sqrt{(-2)\times(-3)}$. x +1 est négatif et x + 1 est négatif ; donc chacun des logarithmes n'existe pas, alors que le logarithme du produit, lui, il existe »

La mémoire ostensive que le professeur mobilise, pour traiter publiquement du cas des équations c) et e), fait donc appel au même praxème, dont les mots qui pourraient le désigner manquent. Il a donc recours à l'analogie d'une pratique pour donner à voir ce que l'on veut enseigner, et dont on veut ici mettre en garde les élèves. Le concept, ou non-ostensif, manquant en Terminale S, est un élément technologique, qui contient le praxème évoqué par le professeur : celui d'homomorphisme. Ce praxème concerne l'image du produit, pour laquelle la règle des signes de la multiplication ne garantit pas qu'elle puisse être, dans le cas de la racine carrée, égale au produit des images ou, dans le cas du logarithme, à la somme des images. Dans la définition d'un homomorphisme, étant donnés les ensembles *G* et *G*', *f* étant une application de *G* dans *G*', on prend soin de préciser que *f* est un homomorphisme de *G* dans *G*' si et seulement si $f(xy)=f(x)f(y)$, <u>quels que soient *x* et *y* éléments de *G*</u>. Or, la pratique conduit les élèves à travailler sur des homomorphismes tels que $xy\in G$, sans pour autant avoir $x\in G$ et $y\in G$. La mémoire ostensive utilisée par le professeur concerne donc la pratique nouvelle dans laquelle les élèves s'engageront, et fait donc appel à des souvenirs issus de leurs mémoires pratiques, dont l'aspect « pratique » est encore plus accentué, puisque le non-ostensif qui contient cette pratique, l'homomorphisme, n'est pas disponible.

Parce qu'un non-ostensif contient, en puissance, un ensemble de praxèmes qui peuvent s'actualiser par sa pratique, au regard du temps didactique, sa non-disponibilité interdit son évocation tant que certaines des pratiques qui y sont incluses n'ont pas été enseignées. C'est l'expérience, que nous montrons maintenant, et que vont faire quelques élèves, priés de taire les souvenirs de leurs mémoires pratiques qu'ils exprimaient publiquement, parce qu'ils sont issus de leurs histoires personnelles de redoublants qui ont connaissance d'un non-ostensif indû.

4. 2. 1. 3. Un cas d'interdiction d'anticipation

Nous poursuivons donc l'étude de cette séance du 7/1/1997, en revenant en son début. Ainsi, après avoir donné les exercices que les élèves cherchent, le professeur s'engage sur des considérations métamathématiques relatives à ce type d'équations, qui sortent sans doute un peu de la routine des équations algébriques et des équations irrationnelles que la classe a étudiées au cours du premier trimestre. Sous la forme d'un lapsus qui, cela est connu, est … révélateur d'une pratique à laquelle on pense fortement, mais qu'il faut taire car elle n'est pas encore advenue au regard du temps didactique, le professeur en vient alors à évoquer le non ostensif « fonction » accolé à l'ostensif *e*.

2. P : La fonction e permet un peu d'élargir le champ des équations et de résoudre des équations qui ne sont pas des équations algébriques. 3. *Murmures d'élèves.*

Ce lapsus anticipatif[136] va alors avoir des conséquences destabilisantes pour le projet initial du professeur qui veut enseigner la rencontre et la pratique de *e* à travers la résolution de ces équations. C'est au prix d'un débat, au cours duquel le professeur montre aux élèves que leurs mémoires ne peuvent officiellement contenir un non-ostensif qui n'a pas été enseigné, que le professeur peut faire revenir la classe dans le cadre de ce projet :

5. P : Dans e fois x, qu'est-ce que c'est e Bar. ? *P évoque l'équation : $ln(x^2)+ lnex - 4 = 0$.* 6. Des élèves : Heu… C'est l'exponentielle 7. P : Je n'ai jamais parlé d'exponentielle, jamais ! Qu'est-ce que c'est e ? 8. D'autres élèves : Un nombre 9. P : C'est un nombre. C'est lequel ? Défini par quoi ? 10. Des élèves : C'est la fonction inverse du logarithme 11. P (avec véhémence) : Nooooon : c'est un nombre ! C'est lequel ? Défini par quoi ? 12. Un élève : Logarithme de e égale 1 13. P : Bon, très bien : lne=1 ! Ça y est ? Ça fait plaisir quand vous étudiez votre cours ! e c'est le nombre défini par lne égale 1 ! *P continue d'aller de place en place et intervient à propos du travail vu sur les cahiers des élèves.*

Évidemment, entendre le professeur parler de fonction, lors du tour de parole 2, et non de nombre *e*, a immédiatement suscité le trouble dans la classe ; ce qui se traduit par des murmures d'élèves en 3. Lorsque, passant dans les rangs pour voir le travail des élèves, le professeur en vient à demander ce qu'est *e*, alors, pour les redoublants qui peuvent mettre un mot derrière le terme de fonction *e*, ce *e* ne peut que représenter l'exponentielle (tour de parole 6) dont ils ont, entre autres, retenu qu'elle est la réciproque (l'inverse disent-ils) du logarithme (tour de parole 11). Le professeur peut alors s'appuyer sur la réponse donnée par des élèves en 8 pour, par deux fois, en 9 et 11, contrecarrer cette subite avancée du temps didactique que viennent de provoquer le lapsus et les redoublants. Le retour dans le temps didactique est enfin assuré par une clause du contrat didactique stipulant que les élèves doivent, par l'apprentissage, rattraper l'avancée créée par le temps didactique antérieur. C'est

[136] On peut aussi noter un second lapsus qui consiste à parler d'équations qui ne sont pas algébriques. Mais celui-ci n'aura pas d'incidence, car cette expression ne peut rien évoquer pour personne en Terminale !

ce qu'assurent les tours de parole 12 et 13 qui permettent au professeur de sortir gagnant de l'échange, en montrant que les redoublants ne font pas ce qui leur est contractuellement demandé, apprendre le cours enseigné et s'y tenir, ce qui les amène à dire des choses erronées comme, par exemple, que e est l'exponentielle.

Ainsi, au regard du temps didactique, un non-ostensif qui ne peut être associé à aucun praxème est rejeté de la mémoire didactique officielle, c'est-à-dire de la mémoire ostensive montrée à tous par le professeur. Le professeur tente, tout au long de cet épisode, de rétablir le rapport officiel à e tel qu'il a été enseigné lors du cours précédent (e est le nombre défini par $\ln e=1$), donc la pratique d'où est issu e à l'instant du temps didactique où se situe cette séance. Or, dans la topogénèse, qui définit les rôles et places du professeur et des élèves relativement au savoir, certains élèves redoublants viennent, avec un objet de savoir « nouveau » au regard de l'avancée du temps didactique, occuper une place qui est celle du professeur, ce qui constitue un premier problème…
De surcroît, ils le caractérisent à l'aide d'un non-ostensif « l'exponentielle » qui sert ici d'emblème ; donc, du point de vue institutionnel du professeur, ils le caractérisent à l'aide d'un objet qui contient tous les ostensifs et les pratiques qui lui sont associées. L'intervention du professeur (par deux fois : 7 et 11) invalide par avance l'usage, officiellement interdit à cet instant du temps didactique, de tout cet ensemble de techniques qui autorisent et fournissent un ensemble de réponses « à la raison d'être » de l'exponentielle.
On peut se demander si le professeur aurait réagi de la sorte à une question dont la réponse est fournie par un usage relevant de l'exponentielle, un peu comme dans le cas d'Aurélie qui voyait e comme servant à faire « le contraire » du logarithme. Dans la logique du professeur, qui est de ne pas trop faire avancer le temps didactique par l'introduction d'éléments technologiques nouveaux, une réponse possible donnée à ce moment aurait peut-être consisté, à défaut de l'exploiter pour faire avancer collectivement le temps didactique, à renvoyer le traitement de cette question au prochain chapitre, ce que Centeno appelle « une mise au frigo ».

4. 2. 1. 4. Conclusions tirées de l'étude de la séance du 7/1/1997

Au regard de la mémoire didactique officielle de la classe, garder présent à la mémoire les non-ostensifs non encore enseignés n'a pas de sens, du point de vue de l'adhésion de tous, professeur et élèves, au contrat didactique relatif à l'objet actuel d'étude : le logarithme. Ils contiennent en effet des technologies, des techniques, des pratiques qui sont des réponses à des questions, l'exponentielle, non encore formulées dans la classe - et peu importe que ce soit par des élèves ou le professeur. À cet instant du temps didactique, ce non-ostensif n'est donc l'émergent d'aucune pratique que l'on puisse évoquer, même si, non encore une seule fois réalisée, cette pratique peut simplement être portée en puissance par une question qu'aurait pu poser un élève. Il ne peut donc faire ni signe, ni sens et ne peut, au regard de l'institution-classe considérée à cet instant, être un objet de savoir auquel attribuer une mémoire. Il ne peut, non plus, servir d'indice de rappel en mémoire, donc ne peut engager aucune mémoire pratique pour les élèves.

C'est cette fonction d'évacuation des souvenirs « parasites », issus dans ce cas des mémoires personnelles des redoublants, qui est ici assurée par la mémoire ostensive utilisée par le professeur. Elle montre ce dont il faut se souvenir au regard du temps didactique. Le professeur est le garant et le dépositaire institutionnels de cette mémoire collective des pratiques acceptables dans la classe à cet instant, soit parce qu'elles ont été effectivement déjà rencontrées, soit parce que, si elles sont nouvelles et inédites, elles peuvent cependant être raisonnablement atteintes à partir de celles qui sont connues. C'est ce qui exclut l'évocation d'un non-ostensif tel l'exponentielle. Le passage suivant, dans lequel des élèves aident au développement de la maïeutique du professeur (tour de parole 24), mais dont il ne reprendra pas la justification apportée par l'un des redoublants (tour de parole 26), constitue un exemple de ce fonctionnement d'exclusion des souvenirs parasites, même s'ils peuvent être parfois utiles pour faire advenir certains objets dans le milieu pour l'enseignement que le professeur souhaite construire :

23. P : Ben oui parce que ça veut dire *(en écrivant au tableau)* :

$\mathbf{lnx=n\times 1}$
$\mathbf{lnx=nlne}$
$\mathbf{lnx=lne^{n}}$

ça se termine comment ?
24. Plusieurs élèves : $x=e^n$
25. P : Oui, pourquoi ?
26. Un élève : C'est une formule que j'ai apprise l'année dernière
27. P : Pourquoi je peux passer de là à là… Parce que la fonction logarithme est ?…
28. Des élèves : Strictement croissante
29. P : Strictement croissante…si vous voulez, et ?…

Une fois de plus, l'ostensif, dans ce cas le nombre *e*, est doublement lié à la pratique mathématique : à la fois en tant qu'outil pour une pratique et aussi parce qu'il est défini comme émergent d'une pratique unitaire, donc praxème.

En effet, d'une part *e* est un praxème car il n'est présent que par le résultat de « l'action qu'il subit de la part de ln » ; on ne peut l'atteindre qu'en résolvant l'équation ln$x$=1. Cette possibilité est assurée par la « manipulation » d'autres objets, ici l'ostensif ln, dans le cadre de la pratique qui consiste à « trouver un nombre dont on connaît le logarithme ». Celle-ci, plus générale, relève d'une propriété de ln : c'est une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ dans **R** et les élèves ont, en principe, rencontré en 1eS la tâche associée consistant à résoudre graphiquement, ou à l'aide d'une calculatrice, une équation du type $f(x)=\lambda$. La pratique graphique renvoie d'ailleurs, pour sa mise en œuvre, à un dispositif instrumental fait d'outils scripturaux à valeur sémiotique (tableaux, flèches, graphiques, …) et de gestes de la main, de la règle, du crayon, donc à un ensemble d'ostensifs qui commandent la pratique consistant à trouver l'unique antécédent d'un nombre donné (ici 1) par une bijection. Cette pratique est évoquée par le professeur dans le passage suivant, qui ne concerne plus 1 mais -4 :

14. P : log. de x égale -4, c'est pas possible ?!… Vous ne l'avez pas encore dans votre tête cette courbe du

logarithme ?!…
15. Des élèves : Si, de 0 à +∞ …(*incompréhensible*).
16. P : Et alors -4, ça n'y est pas sur l'axe des y ?
17. Un élève : Oui, ça tend vers -∞ en 0
18. P : Ben alors, y'a bien -4 sur l'axe des y sur la courbe ?
19. Des élèves : Oui…
20. P : Donc logarithme de x égale -4, ça existe !

Dans le cas présent, ce praxème permet de définir l'ostensif e. Cet aspect praxématique est utilisé comme indice de rappel dans le travail de construction d'une mémoire ostensive mené par le professeur.

D'autre part, cet ostensif est un outil pour une pratique nouvelle, ici la technique qui permet de résoudre l'équation $\ln x = n$. Celle-ci est explicitement montrée par le professeur qui peut alors être assuré que la définition praxématique de e, dont il se sert comme outil en remplaçant 1 par $\ln e$, est considérée comme présente, en tant que souvenir montré, pour un nombre significativement suffisant d'élèves, ceci afin de pouvoir poursuivre l'enseignement.

On voit ainsi que, pour enseigner en la montrant une technique nouvelle, le professeur doit rendre présente dans la classe tout une organisation d'objets de savoir nécessaire à la mise en œuvre de l'ostensif mobilisé pour la technique. Deux cas peuvent *a priori* se présenter :

- soit le rapport personnel au savoir des élèves est suffisamment riche pour qu'avec l'étude du logarithme ait été retravaillé un rapport à la bijection ; dans ce cas l'évocation du non-ostensif logarithme amène, dans le milieu pour l'enseignement, le souvenir des pratiques associées à la bijection. L'évocation de logarithme sert alors d'indice de rappel d'une écologie d'objets, partagée et adéquate, pour que la technique montrée par le professeur fasse sens pour la classe.
- soit ce n'est pas le cas, et c'est alors le professeur qui se charge de reconstruire ce milieu pour l'enseignement et de tenter d'en faire dévolution à la classe. Il s'agit alors de continuer, par la pratique ostensive passant par le discours, l'écriture, les gestes et les effets de contrat utilisés par le professeur, la reconstruction d'une mémoire suffisamment partagée dans la classe pour pouvoir poursuivre la réalisation du projet d'enseignement. Cette reconstruction mobilise alors des couches plus profondes de la mémoire ostensive, au sens où elles sont plus éloignées dans le temps didactique.

Ce second cas nous donne la possibilité de préciser la définition antérieure de la mémoire ostensive que nous avions donnée. En effet, ce cas correspond à un enseignement par ostension (Ratsimba-Rajohn, 1977) dans lequel le milieu construit n'est pas un milieu a-didactique d'action dévolu aux élèves, et grâce auquel ils seront conduits à rencontrer le savoir dont l'enseignement est visé. Aussi, dans le cas de l'ostension, le professeur est-il amené, afin de pouvoir enseigner, à construire un milieu montré. Cette construction passe par l'activation de souvenirs relatifs à différentes couches de la pratique qui a été antérieurement montrée, ou mise en œuvre par les élèves. Elle s'appuie sur la linéarisation du savoir enseigné, et sur le contrat didactique qui stipule que les élèves doivent avoir une certaine connaissance du savoir dont l'enseignement est passé. C'est ce processus, assumé par le professeur et sous sa direction, en collaboration avec certains élèves, de reconstruction montrée à la classe d'un passé sélectif de pratiques du savoir, que nous avons nommé mémoire ostensive.

Ce que montre l'étude de cette séance sur les équations logarithmiques est un travail de mémoire mené à l'aide de cette mémoire ostensive. Il s'agit de reconstruire les souvenirs des pratiques passées, donc des techniques et des technologies associées, pour s'engager dans la tâche nouvelle demandée. La réussite de la dévolution à la classe de cette réorganisation (et de la nouvelle écologie des objets adéquats pour la résolution de l'équation qui en découle) assurera la réussite à venir du travail de réorganisation de la mémoire pratique des élèves, comme condition d'un nouvel apprentissage. C'est ce qu'explique, avec ses propres termes, le professeur lorsque, après avoir montré la technique de résolution de $\ln x=n$, il en vient à déclarer le but de la recherche des exercices :

> 33. P : Ces exercices n'ont pas vraiment un intérêt pratique, leur intérêt est de vous faire travailler sur les propriétés de la fonction logarithme ; les propriétés sur les opérations, multiplication-addition et les propriétés de bijection

Mais, contrairement à ce qu'il déclare, ces exercices ont ici un grand intérêt pratique, notamment pour ce qui concerne « les propriétés de bijection » qui sont retravaillées ici avec les ostensifs ln et e ; ce qu'il indique, ainsi :

> 21. Logarithme de x égale n, comment je peux résoudre ça ?

et qui désigne qu'un des enjeux d'enseignement de cette séance d'exercices est la résolution de l'équation : $\ln x=n$. Ce sont les moyens de la réponse à cette question que contient le cours, et ce sont les exercices donnés ici qui justifient l'enseignement dispensé antérieurement dans le cours. C'est ainsi tout un travail de réorganisation du rapport au cours, pour assurer la réussite des tâches de résolution demandées aux élèves, qui est alors mené à travers cette séance d'exercices. Ce travail de la mémoire pratique est mené collectivement ; il est dirigé par le professeur qui l'a assumé, à travers une certaine pratique de la mémoire ostensive.

4. 2. 2. Pratique des ostensifs et oubli

4. 2. 2. 1. De quel type de signes s'agit-il ?

Dans l'enseignement du calcul en 5^{e}, après avoir étudié comment ajouter et soustraire deux relatifs qu'on a soigneusement notés avec leurs signes et leurs valeurs absolues, bien protégés qu'ils sont à l'intérieur des parenthèses dont on les affuble, des symboles + et - désignant l'addition et la soustraction, il arrive traditionnellement un moment dans le courant de l'année où ce qui est pourtant présenté comme allant dans une direction simplificatrice, complique les

choses, au point qu'on ne sait plus ce que désignent ces signes : relatifs ou opérations ?
Nous reproduisons ci-dessous, pour illustrer cela, l'extrait d'une activité introductive, intitulée « Écritures simplifiées », d'un manuel de ce niveau relatif au programme de 1997[137] :

Pour écrire plus simplement la somme ou la différence de deux nombres relatifs, on convient tout d'abord :
1. de ne plus mettre les parenthèses entourant les nombres relatifs,
2. de ne plus écrire le signe + devant le premier terme s'il est positif.
Voici d'autres conventions afin d'éviter que deux signes se suivent :

Tu sais déjà	**Convention de nouvelle écriture**	**Pour mieux mémoriser**
(-5)+(+3)=-2	-5+3=-2	Lorsque deux signes + se suivent on écrit un seul signe +
(-5)-(-3)=-2	-5+3=-2	Lorsque deux signes - se suivent on écrit un signe +
(-5)-(+3)=-8 (-5)+(-3)=-8	-5-3=-8 -5-3=-8	Lorsque les signes + et - se suivent on écrit un signe -

La justification provient donc, pour ce manuel, de conventions d'usage, sans plus ! Il n'est pourtant pas très coûteux de justifier cette réduction de l'écriture ostensive des sommes algébriques, une fois connues les règles d'addition et de soustraction de deux relatifs, et qu'un positif est égal à sa valeur absolue ; ce qui est, après tout, une raison d'être des relatifs, puisque fondée sur le constat que les nombres arithmétiques n'étant pas suffisants pour toutes les pratiques, il a fallu inventer *une seule* nouvelle catégorie de nombres, les négatifs.
Ainsi, en allant de la colonne de gauche à la colonne centrale, passer de (-5)+(+3) à -5+3 et de (-5)-(+3) à -5-3 se justifie par l'égalité entre un positif et sa valeur absolue, tandis que le passage de (-5)-(-3) à -5+3 et de (-5)-(+3) à -5-3 se justifie par la règle de soustraction (qui peut se justifier en 5^{e} en revenant à la définition de la différence de deux nombres) et la règle de la valeur absolue. Le passage des écritures de la colonne centrale à celles de la colonne de gauche se justifie de la même manière. Mais ce manuel, comme bien d'autres, préfère mettre l'accent sur la pratique, en oubliant ce qui l'autorise et la rend compréhensible. Pour bien des élèves, la réduction de l'écriture d'une somme algébrique devient alors un jeu mystérieux, relevant d'une alchimie grâce à laquelle certains, plus doués que d'autres et qui la maîtrisent, parviennent à transmuter les signes de relatifs en symboles opératoires s'écrivant de la même manière, et réciproquement. Comme dans l'exemple de la simplification des fractions donné par Mercier (1993-1994), les élèves soumis à ce type d'enseignement ne peuvent apprendre, parce qu'ils ne peuvent le rencontrer, aucun savoir mathématique relatif à ce calcul pourtant fondamental pour la poursuite de l'enseignement du calcul algébrique.

Un autre exemple, provenant d'une observation en classe de 4^{e} le 12 mars 1998, montre un cas comparable, mais cette fois relatif à la suppression de parenthèses dans une somme algébrique. Nous donnons l'extrait de l'observation telle qu'elle a été rédigée par la personne qui en a été témoin. Le professeur traite du paragraphe intitulé « Règles » d'un chapitre nommé « Organisation des calculs ». Après avoir rappelé les priorités des calculs entre parenthèses, et les priorités des cinq opérations (avec l'élévation à la puissance) les unes par rapport aux autres, arrive le point 2 intitulé et écrit au tableau :

[137] Il s'agit du manuel « Nouveau Transmath » 5^{e}, édité chez Nathan, 1997, p. 70.

2. Suppression des parenthèses dans une somme
P : **Règle 3** :

Un élève du premier rang : … S'il y a un moins devant une parenthèse, on change les signes.

P :

On peut supprimer les parenthèses :
1. si un signe + précède une parenthèse, on ne change pas les signes des nombres qui étaient à l'intérieur,
2. si un signe - précède une parenthèse, on change les signes de tous les nombres qui étaient à l'intérieur.
Exemple : (3+4-5)-(3+5+4)+(4-2-5)= ?

P commente la proposition qui vient aussitôt : La méthode la plus performante, parce qu'on trouve 3, 4 et 5 plusieurs fois, c'est de voir si on ne peut pas simplifier 3 et -3, 4 et -4,…
L'élève au tableau écrit :

3+4-5-3-5-4+4-2-5

Puis simplifie les opposés et obtient :

=-5-5+4-2-5=-13

P demande alors le cahier d'exercices. Les élèves l'ouvrent et rangent le cours.
Il est 9h05, l'affaire a été rapidement menée.

À la vitesse où ces règles ont été données et illustrées d'exemples (entre 8h30 et 9h05, le professeur a rendu une « interrogation surprise » et un devoir à la maison, et ont été notées deux règles relatives aux priorités ainsi que celle relative aux parenthèses dans une somme, règles chaque fois illustrées d'exemples), on peut inférer que, pour le professeur, il s'agit de rappels des années antérieures qui ne nécessitent pas plus d'explications.
Or, dans l'écriture initiale (3+4-5)-(3+5+4)+(4-2-5), les signes peuvent être vus, assez naturellement, comme *symboles des opérations* addition et soustraction. Puis, dans l'énoncé et l'application de la règle 3 (suppression des parenthèses), ils doivent être vus comme « *signes des nombres* qui étaient à l'intérieur ». La simplification des opposés relève, de manière implicite non mentionnée, ni par l'élève qui fait le calcul ni par le professeur qui la commente, de la structure de groupe commutatif de ($\mathbf{Z}$; +), donc de signes vus comme indiquant à la fois des *opérations et des opposés*. Enfin, le calcul final renvoie à la pratique décrite par l'extrait du manuel montré précédemment.

La pratique des + et -, menée par l'élève qui calcule au tableau, évite donc de se poser les questions du sens originel des ostensifs rencontrés, et tel que nous l'avons donné précédemment aux diverses étapes du calcul. Cette pratique des ostensifs masque ainsi les souvenirs des pratiques antérieures, mises à distance, mais que l'on pourrait retrouver comme nous l'avons fait ici, au profit d'une pratique cependant commandée par ces anciennes pratiques, mais qui sont devenues invisibles pour l'acteur de la pratique actuelle. Ainsi, ce jeu avec des ostensifs induit simultanément un jeu de mémoire pratique chez l'élève qui rédige le calcul, et un jeu avec des souvenirs qui pourraient se dire, donc relatifs à la mémoire ostensive, pour expliquer et justifier le calcul mené, comme pourrait le faire le professeur à cet instant.

Il en résulte une conséquence importante : dans les deux cas, aussi bien pour l'élève que pour le professeur, les souvenirs technologiques qui justifient et autorisent ces pratiques ostensives ne sont pas accessibles lors de la pratique.

Deux types de rapports au savoir peuvent alors être pressentis pour les élèves, selon leur passé didactique. Celui dans lequel les élèves ne savent pas de quel type de signe il s'agit, et celui qui est attendu et montré par l'élève au tableau et le professeur qui valide. Les deux ont cette particularité commune de méconnaître les éléments technologiques qui fondent l'usage actuel. Il en résulte, ainsi, qu'un élève qui serait dans la première situation peut rattraper son retard, en apprenant l'usage des règles sur les ostensifs notées dans ce cours, tout en continuant d'ignorer les éléments technologico-théoriques qui les fondent. Par contre, un élève qui les aurait en tête, et qui y reviendrait systématiquement, serait sans doute handicapé dans la mise en œuvre de la technique de calcul ; *les oublier*, au moins temporairement, *est donc pour lui une nécessité fonctionnelle*. Ces deux élèves se rejoignent ainsi dans ce qui est le plus souvent évalué, notamment dans ce type de calcul algébrique : la capacité à utiliser les techniques appropriées pour mener à bien un calcul. Ce qui relativise singulièrement ce que l'on entend ordinairement par « comprendre » !

4. 2. 2. 2. Oublier l'ostensif qui donnait le sens pour pouvoir s'engager dans la pratique

Nous donnons ci-dessous des extraits d'un compte rendu d'une séquence de cours en classe de 2^{de}, le 18 mars 1999, tel qu'il nous a été communiqué par la personne qui l'observait (les lettres K et D désignent des élèves, P le professeur) :

1. P envoie au tableau l'élève qui doit répondre, pour la résolution de l'équation (*il s'agit de* $\sqrt{(x+1)^2}=1$)
2. K : L'équation, ça fait x+1=1.
3. P : Va l'écrire !
4. K :

$$\mathbf{|x+1|=1}$$

5. P : D'accord…
6. D : Oui.
7. P : Il faut la résoudre !
8. K :

$$\mathbf{|x+1|=d(1\ ;\ 0)}$$

K se retourne, constate son peu de succès et commente en effaçant : Non… c'est une blague !

9. P : Égale x+1 si…
10. K :

$$\mathbf{|x+1|=x+1 \text{ si } x+1\geq 0}$$

11. P : Et sinon…
12. K :

si x+1≤0 alors $|x+1|$=-x+

13. P : Une parenthèse !
14. K :

=-(x+1)=-x-1

15. P : Est-ce résolu ?
16. K : Ça fait d(x ; 1)=1.
17. P : Non… On veut résoudre l'équation ! *P vient au tableau montrer ce qu'est l'équation, en pointant successivement* $\mathbf{|x+1|=1}$, *puis les deux écritures de* $\mathbf{|x+1|}$

Pour éclairer l'apparition, à deux reprises, de la notation de la distance dans la résolution de cette équation, il faut se reporter au programme officiel (B. O. n°20 du 17 mai 1990) et à ses commentaires, pour la partie I. *c*) *valeur absolue, intervalles, approximations* :

Valeur absolue, distance	La valeur absolue ne figure pas au programme de troisième. En seconde, l'essentiel est de savoir interpréter $\|b-a\|$ comme étant la distance des points a et b […]

Ce sont les consignes que le professeur a suivies et qu'il justifie en ces termes, après la séance : « Cette définition permet que les élèves écrivent par eux-mêmes d(3 ; 5)=5-3=2 ou d(7 ; 4)=7-4=3 et qu'ils comprennent que d(a ; b)=b-a si b≥a et a-b si a≥b ». Ce qui suppose, mais qui n'est pas mentionné dans le programme, que les nombres représentent les abscisses de points sur une droite graduée. Cette définition, par l'analogie qu'elle autorise, donne donc « du sens » à la valeur absolue : lorsqu'on se demande ce que signifient ces deux barres à l'intérieur desquelles se trouve la somme ou la différence de deux nombres, il suffit de penser qu'il s'agit d'une distance de points d'une droite dont on connaît les abscisses.
On peut remarquer que cette analogie atteint rapidement ses limites : s'il y a « autre chose » qu'une somme algébrique de deux nombres « à l'intérieur des barres », l'interprétation en termes de distance est inopérante dans un travail tel que celui-ci, résoudre une équation. Il nécessite alors que soit oubliée cette définition de la valeur absolue : l'intervention du professeur qui, par ses gestes, guide l'élève, notamment lors du tour de parole 17, remet l'élève dans le cadre de la pratique en abandonnant l'ostensif d(a ; b), « qui faisait sens », au profit des écritures des deux équations obtenues selon le signe de x+1. Ce faisant, par omission ou mise à l'écart de cette définition de la valeur absolue, le professeur montre la pratique attendue : c'est ainsi un certain travail public de la mémoire privée de cet élève qu'il mène alors.
De l'étude de ces deux exemples, relatifs aux signes + et - et à la valeur absolue interprétée comme une distance, nous tirons donc la conséquence suivante :

L'oubli du « sens », qui est chaque fois donné par un élément de nature technologico-théorique (ici une définition), est nécessaire pour l'engagement dans la pratique d'écritures ostensives permettant l'accomplissement de la technique grâce à laquelle la tâche mathématique demandée se réalise.

4. 3. Rôle de l'oubli pour la création d'un savoir mathématique nouveau

4. 3. 1. L'exemple de la découverte de Leibniz

Nous avions rappelé en 2. 6. 3. que les notations dy et $\int$ étaient dues à Leibniz, qui en tirait le résultat $\int dy=y$. Pour nos contemporains instruits des prémisses du calcul intégral dès la classe de Terminale, cette écriture a une signification claire. Mais, il est intéressant de souligner l'origine, mentionnée par Dahan-Dalmedico & Peiffer (1986, p. 195), de ces notations et de cette relation, et de constater qu'elles n'ont *a priori* qu'un lointain rapport avec l'Analyse telle que nous la pratiquons aujourd'hui. En effet, elles proviennent de l'étude des différences des carrés de deux entiers consécutifs et de la somme de ces différences qui est égale au dernier carré, étude qu'avait menée Leibniz dans sa thèse, en 1666. Ce n'est qu'à partir de 1675 que Leibniz utilise un formalisme qui va le conduire, en reprenant les différences de carrés successifs, à noter :

y : 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36

dy : 1, 3, 5, 7, 9, 11

$\int$: initiale de *summa omnium*

On obtient donc : $\int dy=1+3+5+7+9+11=36=y$

En utilisant une écriture contemporaine, nous pourrions montrer ce résultat de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}[(i+1)^2-i^2] &= \sum_{i=0}^{n-1}(2i+1)\\ &=2\sum_{i=0}^{n-1} i+n\\ &=2\frac{(n-1)n}{2}+n\\ &=n^2\end{aligned}$$

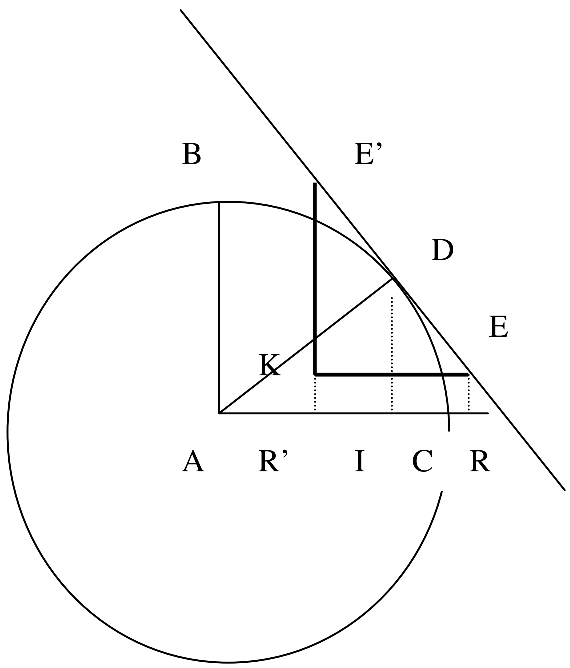
Ce qui signifie, en terme d'aires, que la somme des aires des rectangles formés avec pour côtés 1 et $2i+1$, où $0\leq i\leq n-1$, est égale à l'aire du carré de côté n ; ce que l'on pourrait représenter sur la courbe $y=x^2$.

Dans ce travail préliminaire de Leibniz, les différences sont donc finies et « la fonction » $x \to x^2$ est à valeurs dans **N**. Pour Bourbaki (1969, pp. 236-237), ces différences sont plutôt considérées comme des grandeurs comparables entre elles, et non pas forcément comme comparables à des grandeurs finies[138], et dx est souvent pris comme unité.

---

[138] Ce point de vue bourbakiste ne paraît pas être celui de Raymond (1976) : « Ainsi Leibniz laissera dans le vague, sans pourtant cesser de les utiliser, le statut exact des différences : quantités assignables ou nulles ? fictions (abstractions) purement formelles ou représentants de réalités ? quantités archimédiennes ou non ? Les efforts pour justifier logiquement les différences d'ordres supérieurs sont demeurés tout aussi imprécis et multiples. » p. 78. En fait, on trouve dans les *Leçons sur la théorie des fonctions* de Lagrange, de 1808, la

Ainsi il y a identification de la différentielle dy à la dérivée $\frac{dy}{dx}$, en faisant dx=1. On sait comment s'opère chez Leibniz la maturation qui va le conduire de l'écriture dy à ce que nous appelons la dérivée $\frac{dy}{dx}$. Une étape importante est celle où, écrira-t-il plus tard au marquis de l'Hospital : « En lisant le *Traité des sinus du quart de cercle*, j'y trouvai une lumière que l'auteur lui-même n'y avait point vue. »[139]
Il s'agit ici du triangle caractéristique E'KE semblable au triangle AID, (EE') étant la tangente en D au cercle de centre A, I étant le projeté orthogonal de D sur le rayon [AC] :



Nous donnons en italique le texte de Leibniz et l'interprétation qu'en fait Delachet (1949) d'où résulte la construction de la figure :
*« Soit ABC un quart de cercle dont le rayon AB soit considéré comme axe, et le rayon perpendiculaire AC comme base ; soit D un point quelconque dans l'arc duquel soit mené le sinus DI sur le rayon AC ; et la touchante DE, dans laquelle soient pris les points E où l'on voudra, d'où soient menées les perpendiculaires ER sur le rayon AC : je dis que le rectangle compris du sinusDI et de la touchante EE, est égal au rectangle compris du sinus DI et de la touchante EE, est égal au rectangle compris de la portion de la base (enfermée entre les parallèles) et du rayon AB. »*Ce que l'on exprimerait aujourd'hui de la façon suivante : les rectangles admettant respectivement pour côtés des longueurs égales à EE' et DI, à RR' et AB, sont des triangles rectangles AID et EKE' (leurs côtés étant deux à deux perpendiculaires). pp. 20-21.

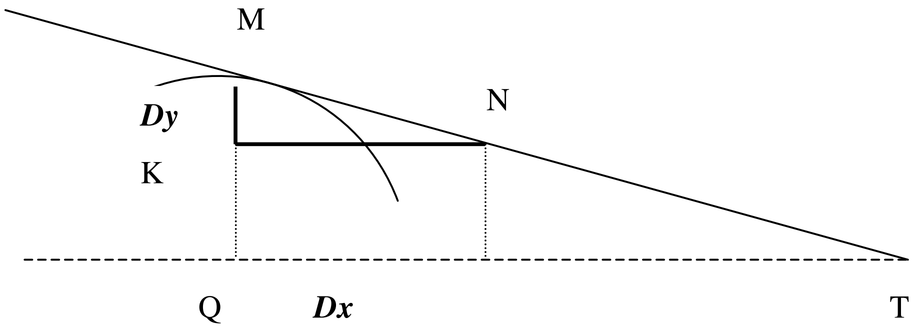
Pour Leibniz, le triangle AID conserve une grandeur finie, ce qu'il caractérise en disant qu'il est *assignable*, lorsque EE' tend vers 0 et qu'alors le triangle EKE' est dit devenu « *inassignable* ». Cependant, demeurant toujours semblable au triangle AID, « Leibniz voit dans le triangle EKE' un élément caractéristique de la courbe », d'après Delachet (1949), ici un cercle.

---

justification du passage des différences finies aux différentielles. Lagrange y montre d'une part l'identification de $\frac{d \bullet fx}{dx}$ à $f'x$ et, d'autre part, reprenant la formule de Taylor avec des différences finies :
$f(x+\omega) = fx + \omega \frac{\Delta \bullet fx}{i} + \frac{\omega(\omega - i)}{2} \cdot \frac{\Delta^2 fx}{i^2} + \frac{\omega(\omega - i)(\omega - 2i)}{2 \cdot 3} \cdot \frac{\Delta^3 fx}{i^3} + etc.$ où $\Delta \bullet fx = f(x+i) - fx$, etc., il montre qu'en faisant i=0, les rapports des différences première, seconde, etc. deviennent $f'x$, $f''x$, etc. D'où il conclut : « ceux qui, d'après Euler, regardent les différentielles comme de véritables zéros, […] sont dans toute la rigueur de l'analyse… ».
[139] Cité par Delachet (1949), sur lequel nous nous appuyons aussi, notamment sur le chapitre « l'historique de la découverte leibnizienne », pp. 20-27. Le *Traité des sinus du quart de cercle* est dû à Pascal, et lu par Leibniz après que Huygens le lui communiqua en 1672, lors d'une mission à Paris.

Une dizaine d'années après la lecture de Pascal, paraît en 1684 le texte des *Acta eruditorium*, dans lequel Leibniz désigne par Dx et Dy les longueurs KE et KE', accroissements respectifs d'abscisses et d'ordonnées. Comme EKE' reste semblable à lui-même et à AID, quels que soient E et E', le rapport $\frac{Dy}{Dx}$ reste constant. Lorsque le triangle EKE' devient inassignable, la limite de ce rapport, noté alors $\frac{dy}{dx}$ [140], reste égale à cette même valeur[141].

C'est dans *Nova methodus pro maximis et minimis* de 1684, que la question du problème des tangentes fournit à Leibniz l'occasion d'utiliser fructueusement cette notation ostensive $\frac{dy}{dx}$. Associée au triangle caractéristique qui, dans une généralisation des cercles aux courbes, devient alors caractéristique de la courbe, elle permet de définir ce que nous appelons aujourd'hui, à la suite de Lagrange, le nombre dérivé, coefficient directeur de la tangente :



Le triangle KMN restant semblable au triangle QMT, $\frac{Dy}{Dx} = \frac{\mathrm{QM}}{\mathrm{QT}} = \frac{y}{sous-tangente}$, d'où par passage à la limite : $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{sous-tangente}$.

Cette « découverte », qui fonde le calcul différentiel, ne saurait être attribuée uniquement au génie de Leibniz. D'une part, il a fallu auparavant que Leibniz se mette, sur les conseils de Huygens, « à l'école de Descartes », afin de pouvoir utiliser une méthode d'algébrisation de la géométrie, grâce, précisément dans ce cas, à la méthode des coordonnées[142]. D'autre part, c'est la volonté d'user de notations commodes, qui débouche sur une algorithmisation simple

[140] Nous nous référons ici à Delachet (1949) pp. 23-25.
[141] Raymond (1976) note : « … en indiquant que le rapport des différences *dy/dx* est égal à *y/sous-tangente*, Leibniz reste pris dans un cercle [vicieux], car il définit la tangente en fonction des différences - ce qui révèle la difficulté à définir le vocabulaire de ce calcul tant que les concepts que les progrès du calcul permettront ne sont pas encore acquis, en particulier celui de limite. » p. 78.
[142] Fermat découvre en 1629 une autre méthode que celle de Descartes de repérage d'un point du plan, mais elle n'est publiée qu'en 1679 dans son *Ad locos planos et solidos isagoge*, après sa mort en 1665. Van Schooten donne en 1649 les formules de changements de repère, Wallis en 1655 considère des coordonnées négatives, les coordonnées polaires sont dues à Newton et Jacques Bernoulli.

de problèmes difficiles, qui pousse Leibniz à l'extension de l'usage de ses notations nées dans un autre cadre. C'est ce qu'il souligne dans une lettre à Huygens du 29 décembre 1691 : « Ce que j'aime le plus dans ce calcul, c'est qu'il nous donne le même avantage sur les anciens dans la géométrie d'Archimède, que Viète et Descartes nous ont donné dans la géométrie d'Euclide ou d'Apollonius, en nous dispensant de travailler avec l'imagination. »

On retrouve ainsi ce « principe d'économie de l'énergie cognitive » qui soulage la pensée, « l'imagination » comme l'écrit Liebniz, puisque l'on peut traiter de la géométrie d'Archimède, sans avoir constamment à l'esprit la difficile mais rigoureuse méthode d'exhaustion utilisée par Archimède dans *De la quadrature de la parabole*[143], ou de se souvenir des idées développées par Archimède qui, considérant qu'une surface est composée de lignes, permet, grâce à l'utilisation du principe du levier, de comparer l'aire du segment parabolique à celle d'un triangle[144].

C'est ce principe d'économie que voit encore Raymond (1976) dans la méthode de calcul développée par Leibniz :

> « La méthode classique des infinitésimales n'est jamais d'après Leibniz qu'un abrégé commode, pour des problèmes difficiles, de la méthode rigoureuse d'Archimède ; c'est un langage fictif, c'est-à-dire usant d'abstractions qui ne renvoient à rien d'actuel, seulement à du potentiel, mais qui restent douées de sens grâce à leurs emplois opératoires. » pp. 78-79[145].

De même, Dahan-Dalmedico & Peiffer (1986) soulignent ce point :

> « Ce qui fait la force de la méthode leibnizienne, c'est la simplicité de son algorithme, sa notation élégante, son formalisme opératoire qui permet d'effectuer quasi-automatiquement les calculs, masquant la nature des objets en jeu. » pp. 196-197.

C'est ce que souligne encore Bourbaki (1969) :

> « Comme Leibniz l'a maintes fois indiqué avec une parfaite netteté, il s'agissait de faire pour la nouvelle analyse ce que Viète avait fait pour la théorie des équations, et Descartes pour la géométrie. Pour en comprendre la nécessité, il n'est que de lire quelques pages de Barrow ; à aucun moment on ne peut se passer d'avoir sous les yeux une figure parfois compliquée, décrite au préalable avec un soin minutieux ; il ne faut pas moins de 180 figures pour les 100 pages qui forment l'essentiel de l'ouvrage. » p. 238.[146]

---

[143] Comme le soulignent Dahan-Dalmedico & Peiffer (1986), « Par ailleurs, la méthode d'exhaustion n'est pas une méthode de découverte » p. 174. C'est ce que mentionne déjà Bourbaki (1969), citant une lettre d'Archimède à Ératosthène : « …méthode de démonstration irréprochable […], ce n'est pas une méthode de découverte ; son application repose nécessairement sur la connaissance préalable du résultat à démontrer. » p. 208.

[144] Leibniz, dès 1673, considérait le problème des quadratures (le calcul des aires sous les courbes traitées à l'aide du calcul intégral, dirions-nous aujourd'hui) comme le problème inverse de celui des tangentes (des dérivées dans le langage contemporain).

[145] Dans cette citation, on peut encore noter cet obstacle de la métaphore des mathématiques comme un « langage fictif », que l'on n'hésite pas cependant à considérer comme « doué de sens » car d'un « emploi opératoire ». Il semble difficile, même lorsqu'on reconnaît le rôle de l'emploi opératoire pour donner le sens, de reconnaître les mathématiques comme un travail, et de renoncer à les considérer comme un langage, ceci au prix d'une contorsion qui consiste à dire qu'il est fictif, et qu'il renvoie à des abstractions, non actuelles mais potentielles !

[146] Barrow (1630-1677) fut le prédécesseur de Newton à la chaire de mathématiques de Cambridge où Newton lui succéda en 1669.

On retrouve, à travers cet exemple de « la découverte liebnizienne » de l'écriture $\frac{dy}{dx}$, certains des effets déjà signalés de la pratique des ostensifs : ils permettent d'oublier des pratiques antérieures coûteuses, ils sont sources de créativité mathématique.

Dans le cas de Leibniz étudié ici, ils sont reconnus comme outils réalisant des conditions permettant de nous « dispenser de travailler avec l'imagination ». C'est ici un principe d'économie cognitive, déjà mis en place par Viète et Descartes, mais nécessité désormais par l'avancée dans la résolution des problèmes vifs posés aux contemporains de Leibniz, et dont le XVIII^{e} siècle poursuivra le travail (initié par les questions nouvelles issues de la physique, la mécanique et les mathématiques : équations différentielles, calcul des variations, géométrie différentielle), qui est identifié par le praticien et producteur de mathématiques qu'est Leibniz. Ce phénomène d'économie se retrouve, en acte, dans la pratique mathématique « ordinaire » : c'est cette expérience que font, par exemple, les deux élèves de Terminale S qui, à quelques semaines d'intervalles, ont oublié la coûteuse technique de résolution d'une équation logarithmique pour ne plus connaître que l'utilisation de l'ostensif e^x. Dans le cas des élèves, l'oubli résulte de nouvelles pratiques plus économiques. Dans le cas du mathématicien qu'est Leibniz, l'oubli est une condition pour de nouvelles pratiques.

Un deuxième point concerne la créativité dans le domaine de la pratique des mathématiques. On a vu, dans l'exemple de Leibniz, d'où provient, à l'origine, la notation dx : d'une étude des différences qui n'a qu'un rapport mathématique initial très lointain avec le problème des tangentes. L'utilisation de dx, d'abord à partir du *Traité des sinus du quart de cercle* de Pascal, puis, par une généralisation à d'autres courbes que des cercles, pour la résolution du problème des tangentes, constitue le fil directeur et l'outil principal du travail créatif de Leibniz sur cet exemple. La pratique des ostensifs conduit à se poser de nouvelles questions sur cette pratique ; la créativité ne résulte plus seulement de problèmes à résoudre pour lesquels il a fallu inventer de nouveaux ostensifs, mais des nouveaux problèmes à résoudre induits par la pratique ostensive[147]. Ce phénomène de créativité pratique se retrouve, en acte, lui-aussi, dans la pratique « ordinaire » des mathématiques : c'est le cas des élèves qui, ne connaissant pas encore le théorème de Thalès, utilisent les pratiques ostensives relatives à la proportionnalité (produits en croix, règle de trois, graphiques) pour résoudre un problème

[147] Ainsi, la pratique du calcul différentiel amène Leibniz à se poser la question de la pratique de $d(xy)$, sans se préoccuper des problèmes dans lesquels la dérivation d'un produit serait un outil nécessaire, au contraire de Newton chez qui la démarche part de la résolution de problèmes, mais pour qui les outils de cette résolution ne sont pas dignes d'être des objets d'étude en soi. Il y a ainsi, chez Leibniz, une autonomie de la pratique ostensive qui n'est plus induite par la résolution des problèmes qui lui ont donné naissance. C'est ce que souligne Bourbaki (1969) : « Mais ce qui frappe, dès la première apparition des nouveaux symboles, c'est de voir Leibniz occupé aussitôt à en formuler les règles d'emploi, se demander si $d(xy)=dxdy$, et se répondre à lui-même par la négative, pour en venir progressivement à la règle correcte, qu'il devait plus tard généraliser par sa fameuse formule pour $d^n(xy)$. Bien entendu, au moment où Leibniz tâtonne ainsi, Newton sait depuis dix ans déjà que $z=xy$ entraîne $\dot{z} = \dot{x}y + x\dot{y}$; mais il ne prend jamais la peine de le dire, n'y voyant qu'un cas particulier, indigne d'être nommé, de sa règle pour différentier une relation F(x, y, z)=0 entre fluentes. Au contraire, le principal souci de Leibniz n'est pas de faire servir ses méthodes à la résolution de tels problèmes concrets, ni non plus de les déduire de principes rigoureux et inattaquables, mais avant tout de mettre sur pied un algorithme reposant sur le maniement formel de quelques règles simples. » p. 240.

nouveau, ou encore le cas d'Aurélie qui, ayant remarqué le passage biunivoque du logarithme au nombre par l'utilisation de e, anticipe sur l'exponentielle non encore étudiée. Dans le cas des élèves, la créativité se manifeste par une anticipation du temps didactique sur les pratiques à venir, soit parce que certains se posent les questions de l'exploration des pratiques autorisées par l'usage de l'ostensif, soit parce que les conditions institutionnelles dans lesquelles ils sont placés « forcent » à cet usage. Dans le cas du mathématicien qu'est Leibniz, il y a tout d'abord la recherche de la résolution de problèmes. Celle-ci conduit à la création de nouveaux outils, à travers un nouvel usage de notations nées ailleurs et utilisées ici à d'autres fins[148], puisque l'utilisation des outils dont on disposait antérieurement n'avait pas permis cette résolution. Enfin, l'étude de la pratique des ostensifs débouche sur de nouveaux problèmes, autonomes des problèmes originels qui les ont amenés.

4. 3. 2. Praxèmes et ostensifs : des exemples dans les œuvres de Newton et Euler

4. 3. 2. 1. Dans *La méthode des fluxions et des suites infinies* de Newton : un cas d'extension praxématique

Comme l'on sait, Newton et Leibniz sont d'ordinaire considérés comme les pères fondateurs du calcul différentiel et intégral, et cette co-paternité se traduisit, de leur vivant même, par des querelles et procès qui entraînèrent à leur suite leurs disciples respectifs. Ainsi, dans la préface à la traduction qu'il donne, en 1740, et à la demande de l'Académie des Sciences, de l'ouvrage de Newton rédigé en 1671, mais publié en Angleterre seulement en 1736, Buffon ne peut s'empêcher de prendre le parti de Newton contre Leibniz, bien que le premier soit décédé depuis treize ans, et le second depuis vingt-quatre[149]. Alors que les querelles se sont tues, que les mérites respectifs des deux illustres savants sont reconnus de tous, qu'il nous soit ici permis de les distinguer par la pratique mathématique.
Dès les deux premières pages de sa *Méthode des fluxions*, Newton revendique la possibilité de transposer à l'algèbre les pratiques de l'arithmétique :

[148] Cette transformation des outils ou des objets en outils, pour un autre usage que celui pour lequel ils ont été initialement créés, semble être un phénomène fréquent dans les sociétés humaines. Le film *Les Dieux sont tombés sur la tête* donne une version comique des multiples usages qu'une société Bushman trouve pour une bouteille de Coca-Cola tombée d'un avion. Sans recourir à la fiction cinématographique, on trouve dans nos sociétés un exemple similaire, bien que moins amusant, à travers le détournement, à la mode un temps, de la fonction d'un petit objet produisant un faible faisceau laser rouge, initialement utilisé pour désigner un point d'une carte commentée devant un public, et utilisé par des adolescents facétieux pour éblouir son prochain à distance.

[149] Buffon tire son « argumentaire », tout au long des trente pages de sa préface, du rapport intitulé *Commercium Epistolicum,* rédigé par la Société Royale anglaise, à qui Leibniz avait demandé qu'elle reconnaisse qu'il n'avait pas emprunté à Newton son calcul différentiel. Celle-ci, suprême perfidie d'Albion, « ne voulant pas juger, s'est contentée de laisser juger le Public », nous dit Buffon qui, bien sûr, à partir du *Commercium Epistolicum*, prend le parti de Newton ! Pour la petite histoire, il s'en prend, dans la polémique qui continue de faire rage à cette époque, à Berkeley (qui dans *L'Analyste* adresse de nombreuses critiques sur les infinitésimaux et la vitesse instantanée de Newton) qu'il orthographie Berckey, qu'il traite de « docteur à l'esprit peu fait pour les mathématiques » et chez qui il croit déceler « que ce n'est pas le zèle, mais la vanité qui a conduit sa plume » ! p. XXVI.

« II. La grande conformité qui se trouve dans les opérations littérales de l'Algèbre, et dans les opérations numériques de l'Arithmétique ; cette ressemblance ou analogie, qui serait parfaite, si les caractères n'étaient pas différents, les premiers étant généraux et indéfinis, et les autres particuliers et définis, devait naturellement nous conduire à en faire usage ; et je ne puis qu'être étonné de ce que personne, à moins que vous ne vouliez excepter M. Mercator, *De quadratura hyperbolæ*, n'a songé à appliquer à l'Algèbre la doctrine des fractions décimales, puisque cette application ouvre la route pour arriver à des découvertes plus importantes et plus difficiles. » pp. 1-2.

Cette correspondance posée permet l'extension de deux types de pratiques, des nombres vers les expressions algébriques. La première concerne l'extension des cinq opérations (la cinquième étant l'extraction de la racine carrée), la seconde porte sur l'avantage résultant de l'écriture des nombres dans le système décimal, et dont Newton tire bénéfice pour la transformation d'écritures algébriques telles que « les fractions dont les dénominateurs sont des quantités complexes, les racines des quantités composées ou des équations affectées, et d'autres semblables. »
« La doctrine » des fractions décimales, comme l'écrit Newton, représente une économie et une simplicité de calcul[150], car :

« … les fractions décimales ont l'avantage de transformer en quelque façon toutes les fractions ordinaires et tous les radicaux en nombres entiers[…] » p. 2

Ainsi, son extension à l'algèbre permettra-t-elle de réduire « une quantité composée quelconque » à des « termes simples ». Il s'agit de transformer, de l'article IV à l'article XVIII du premier chapitre, des fractions rationnelles, des fonctions racine, ou des composées des deux, en combinaisons linéaires de monômes, ou de puissances négatives ou fractionnaires (les « termes simples »), donc en série de puissances. En effet, tout nombre en écriture décimale est égal à la somme de la série des fractions décimales qui permettent son écriture. De même, pour Newton, toute expression algébrique sera égale à son développement en série (les « suites infinies ») ; série pour laquelle il ne se pose pas de problème de convergence[151].

---

[150] Sur le côté mal commode, voire impossible, du calcul sur les rapports tels que définis dans le Livre V, pour qui voudrait s'astreindre à en respecter la lettre, on peut citer Dieudonné (1987) : « Malheureusement, le calcul sur ces "rapports" généraux n'a pas été mis par les Grecs sous une forme utilisable, en raison de leur conception des *produits* de rapports. […] D'autre part, Euclide n'a pas de définition de la somme de deux rapports quelconques et, dans les cas particuliers qu'il considère, les rapports ont même dénominateur (Livre V, 24) ; dans ce système, les calculs de Diophante […] ne sont pas praticables. » p. 56. Avec la publication de *La disme* de Stevin, en 1585, c'est un progrès et une facilité de calculs sans précédents qui sont réalisés : on imagine la pénibilité des calculs sur des nombres qui, antérieurement, s'écrivaient à l'aide d'un entier en base 10 suivi de « rompus » (fractions inférieures à 1) ! Aussi Stevin peut-il écrire : « Elle[la disme] enseigne (afin de dire beaucoup en un mot) d'expédier facilement sans nombres rompus, tous comptes qui se rencontrent aux affaires des Humains, de sorte que les quatre principes d'Arithmétique que l'on appelle Ajouter, Soustraire, Multiplier et Diviser par nombres entiers, pourront satisfaire à tel effet : Causant semblable facilité à ceux qui usent des gettons. »

[151] Encore que Dahan-Dalmedico & Peiffer (1986, p. 194) remarquent que « Newton déploie une remarquable intuition dans ce domaine » qui lui fait utiliser, pour le développement en série de $\frac{1}{1+x^2}$, $1-x^2+x^4-x^6+x^8-\ldots$ lorsque x est suffisamment petit et $x^{-2}-x^{-4}+x^{-6}-x^{-8}+\ldots$ lorsque x est grand. Cette intuition pointe aussi en XLVII et XLVIII lorsque Newton explique que « … si on suppose que x ne diffère que peu de la quantité a, j'écris z pour cette petite différence, c'est-à-dire a+z ou a-z=x […]. Mais si cette espèce est supposée indéfiniment grande,

Les développements en série donnés de IV à VI, dans le premier chapitre, sont obtenus par la transposition de la division des entiers à la division des polynômes. Sont ainsi donnés les développements de $\frac{a^2}{b+x}, \frac{1}{1+x^2}, \frac{2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}-3x}$.

De même, la transposition à des expressions algébriques de l'algorithme d'extraction de la racine carrée, lui permet d'obtenir dans ce même chapitre, de XI à XV, les développements de $\sqrt{a^2+x^2}, \sqrt{a^2-x^2}, \sqrt{x-x^2}, \sqrt{a^2-bx-x^2}$. Pour le développement de $\sqrt{\frac{1+ax^2}{1-bx^2}}$, Newton indique qu'il suffit de multiplier les deux termes de la fraction par $\sqrt{1-bx^2}$, de développer en série le numérateur grâce à l'extraction de racine, puis de diviser la série obtenue par $1\text{-}bx^2$, ce qui est une conséquence étendue de l'application de son principe d'analogie des opérations arithmétiques et des opérations algébriques.

Ce premier chapitre se poursuit par « la réduction des équations affectées », c'est-à-dire le développement en série des solutions d'équations. Ici, encore, Newton s'appuie sur ce que l'on pourrait traduire par la recherche de valeurs approchées de racines, dans le cas numérique. Cependant, il indique en XIX que :

> « [...] ce que les Géomètres nous ont donné sur les équations en nombres, est extrêmement embarrassé, et chargé d'opérations superflues ; de sorte qu'on ne peut prendre sur cela un bon modèle pour faire les mêmes opérations en espèces. Je ferai donc voir d'abord comment se doit faire en nombres la réduction des équations affectées, et ensuite j'appliquerai la méthode aux espèces. »

Sur l'exemple de l'équation $y^3\text{-}2y\text{-}5=0$ (1), il indique sa méthode en cherchant des valeurs approchées de la racine réelle, sachant qu'elle est proche de 2. Il pose alors $y=2+p$, substitue dans l'équation, obtient $p^3+6p^2+10p\text{-}1=0$ (2), néglige le terme p^3+6p^2 « à cause de sa petitesse », et tire alors $p=0{,}1$. Le même procédé se reproduit en substituant p dans (2) par $0{,}1+q$ et ainsi de suite. Cette méthode est transposée, moyennant des conditions que Newton énonce en XXIV à XXVIII. Ces conditions portent, entre autres, sur les termes à négliger car :

> « … l'un des coefficients littéraux, supposé qu'il y en ait plus d'un, doit être distingué des autres, lequel coefficient est ou peut être supposé de beaucoup le plus grand, ou le plus petit de tous, ou bien le plus approchant d'une quantité donnée ; et cela parce que ses dimensions augmentant continuellement dans les numérateurs ou les dénominateurs du quotient, ces termes doivent devenir toujours moindres, et par conséquent le quotient doit toujours approcher de la vraie valeur de la racine [...] »[152]

L'énoncé mal commode de ce principe se traduit par une règle de suppression de certains des termes en x^iy^j que Newton exemplifie à l'aide d'un tableau. Après y avoir repéré les « parallélogrammes » (les cases) correspondant aux x^iy^j obtenus dans le développement limité,

---

alors je prends une quantité réciproque, qui par conséquent sera indéfiniment petite … ». De même en LII, il donne une justification intuitive « Pour s'assurer de la vérité de tout ce que nous venons de dire, et pour voir clairement que les quotients ainsi tirés et continués à volonté, approchent de la racine de l'équation… », et en LIII, il se préoccupe de la convergence en ces termes : « Enfin, quelque grande que fût supposée l'espèce que j'ai toujours faite indéfiniment petite, afin de mettre la chose dans un plus grand jour, les quotients seront toujours vrais quoique moins convergents à la vraie racine. »

[152] Le quotient désigne ici le résultat obtenu à chaque étape.

l'usage nécessite d'y poser une règle « appliquée au plus bas parallélogramme à main gauche, et je la fais tourner jusqu'à ce qu'elle touche un ou plus d'un autre parallélogramme marqué… ». On conçoit assez bien que cette manière de faire, afin de négliger certains termes du développement obtenu, ait pu donner matière à polémique.

Ces techniques pour le développement en série sont utilisées dans la suite de l'ouvrage. Ainsi, par exemple, dans le « Problème IX : trouver l'aire d'une courbe proposée quelconque », Newton donne cinq exemples, en fait des classes d'exemples, dont les trois derniers font appel aux « réductions par la division, l'extraction des racines, la résolution d'une équation affectée », ces trois méthodes étant les seules dont il se serve.

Aussi, dans cette première partie de l'ouvrage, qui s'achève par la définition des fluentes et des fluxions, et où Newton expose les trois méthodes qu'il utilise pour développer en série certaines fonctions, un même principe de base guide son projet : adapter les méthodes arithmétiques à l'algèbre. Ce sont ainsi des pratiques, propres à un système d'ostensifs particuliers, celui nécessaire à l'écriture et au calcul des nombres, qui sont transposées, parfois à l'identique, parfois au prix de quelques adaptations, comme dans le cas des « équations affectées », à un autre système d'ostensifs : celui qui permet d'écrire et de calculer des expressions algébriques. Dans ce sens, dans l'article III, Newton explique qu'il va donner à ses lecteurs des exemples, afin qu'ils puissent comparer les techniques qu'il utilise pour obtenir des développements en série, aux techniques relatives aux nombres et qu'ils connaissent :

> « La réduction par la division et par l'extraction des racines se concevra clairement par les exemples suivants, en comparant les façons d'opérer en nombres et en espèces. »[153]

Suit alors l'exemple de la fraction notée $\frac{aa}{b+x}$, pour lequel la disposition des calculs rappelle, par bien des aspects, l'algorithme couramment utilisé pour la division des polynômes. Ainsi écrit-il :

[153] Les espèces sont, pour Newton, des expressions algébriques.

« La fraction $\frac{aa}{b+x}$ étant proposée, divises *aa* par $b+x$ de la manière qui suit.

$$b+x)a^2+\text{o}(\frac{aa}{b}-\frac{aax}{b^2}+\frac{aax^2}{b^3}-\frac{aax^3}{b^4}+\frac{aax^4}{b^5},\&c.$$

$$aa+\frac{aax}{b}$$

$$\text{o-}\frac{aax}{b}+\text{o}$$

$$-\frac{aax}{b}-\frac{aax^2}{b^2}$$

$$\text{o+}\frac{a^2x^2}{b^2}+\text{o}$$

$$+\frac{a^2x^2}{b^2}+\frac{a^2x^3}{b^3}$$

$$\text{o-}\frac{a^2x^3}{b^3}+\text{o}$$

$$-\frac{a^2x^3}{b^3}-\frac{a^2x^4}{b^4}$$

$$\text{o+}\frac{a^2x^4}{b^4},\&\text{c.}$$

Le quotient est donc $\frac{aa}{b}-\frac{a^2x}{b^2}+\frac{a^2x^2}{b^3}-\frac{a^2x^3}{b^4}+\frac{a^2x^4}{b^5}$, &c. laquelle suite étant continuée à l'infini$=\frac{aa}{b+x}$, ou si l'on fait x le premier terme du diviseur de cette façon, $x+b$ (aa+o, alors le quotient sera $\frac{aa}{x}-\frac{aab}{x^2}+\frac{aab^2}{x^3}-\frac{aab^3}{x^4},\&c$. ce que l'on trouvera par la même manière que ci-dessus. »

Cet algorithme engage un bloc de praxèmes venus des mathématiques antérieurement connues. Par exemple, on retrouve la pratique qui consiste à multiplier le quotient obtenu par le diviseur et à reporter ce produit afin de le soustraire au reste du dividende, ou la disposition de ce travail dans l'algorithme, qui proviennent directement de la pratique de la division des entiers, et qui sont ici adaptées aux règles ostensives en usage en algèbre :
par exemple *aa* s'écrit a^2, ou $\frac{a^2x^3}{b^3}\times\frac{x}{b}=\frac{a^2x^4}{b^4}$.

L'ensemble des praxèmes ainsi transposés constitue une transposition de l'algorithme de la division des entiers à la division des polynômes ; celle-ci est alors construite par sa pratique et ne constitue pas encore un objet d'étude en soi, ce qu'elle deviendra par la suite et qui débouchera, dans sa forme achevée, sur l'étude de l'anneau K[*x*] des polynômes pour la division euclidienne des polynômes, et de là sur l'étude des corps de fonctions algébriques[154]

[154] On retrouve ici une forme de « dialectique outil-objet » (Douady, 1986), l'outil étant premier pour l'engagement dans de nouvelles pratiques. Mais l'outil est ici une adaptation d'anciennes pratiques, sans qu'il soit nécessaire de créer de toutes pièces un nouvel outil pour cette nouvelle pratique. Par métaphore, on pourrait

Dans le cas qui vient d'être étudié, l'extension de la pratique crée la pratique nouvelle, sans qu'il soit besoin de créer pour cela de nouveaux ostensifs. Cependant, comme l'on sait, Newton n'hésite pas, lorsque cela est nécessaire, à créer de nouveaux ostensifs :

$\dot{x}$ pour les fluxions, $\dot{x}o$ pour les moments des fluentes.

Mais, tout au moins dans la *Méthode des fluxions et des suites infinies*, ils ne sont qu'outils nouveaux pour de nouvelles pratiques, et non objets d'étude des pratiques nouvelles qu'ils engendrent, une fois mises à distance les pratiques pour lesquelles, à l'origine, ils ont été créés. Dans le cas des développements en série tels que Newton les définit, la pratique originelle, dont l'extension constitue le point de départ pour créer un savoir mathématique nouveau, est donc toujours un souvenir présent.

4. 3. 2. 2. Dans l'*Introduction à l'analyse infinitésimale* de Euler : un cas d'extension de l'usage de l'ostensif

L'histoire des mathématiques est parfois faite de curieux épisodes dans lesquels les découvertes des uns ne fructifient que grâce à leur reprise par d'autres, après que de nombreuses années se sont écoulées. Ce fut le cas, comme nous l'indiquions précédemment en 2. 5. 1. 1., du paradoxe de Condorcet ; c'est aussi le cas du binôme de Newton. Ainsi, après que Newton ait obtenu, comme on l'a vu, des développements en série par extension des algorithmes numériques à des expressions algébriques, Euler obtient, quant à lui, des développements en série, grâce à la formule du binôme de Newton que ce dernier n'utilisait pas pour obtenir ces développements[155].

Euler montre tout d'abord, dans le chapitre IV intitulé *Du développement des fonctions en séries infinies*, article 60, qu'on peut obtenir le développement en série d'une fraction rationnelle par identification des coefficients du polynôme du numérateur à celui obtenu en développant le produit du dénominateur par le développement en série entière de la fraction, écrit comme étant égal à $A+Bz+Bz^2+Dz^3$+&c. Dans le système linéaire qu'il obtient, et dont les inconnues sont les coefficients A, B, C, D, &c., il remarque que l'obtention d'un terme résulte de la connaissance des précédents (article 61), ce qui lui permet d'introduire les séries récurrentes (article 63), découvertes par Moivre, et définies « par la raison qu'il faut recourir aux termes qui précèdent, pour trouver ceux qui suivent. »

---

dire que le marteau qui sert à planter des clous peut servir, moyennant quelques adaptations de sa pratique, à former une pièce, sans qu'il soit nécessaire pour cela d'avoir à inventer ni la presse à emboutir, ni l'étude de cette presse.

[155] En fait, pour être plus précis, cette formule a servi à Newton comme intuition de la possibilité de calculs sur les développements en série. C'est ce que note Houzel (1976) : « Newton est arrivé par induction à cette formule dès 1665, en cherchant à résoudre un problème de quadrature ; il ne l'a jamais démontrée (ni publiée). C'est à partir de ces recherches qu'il s'est convaincu qu'on pouvait calculer sur les séries comme on le fait sur les polynômes : la branche des mathématiques que nous voyons Euler développer a donc été inventée par Newton à partir de la formule du binôme. » p. 139. Euler n'en donne une démonstration qu'en 1774 (un siècle plus tard !), pour sortir du cercle vicieux dans lequel il s'était placé, après qu'il se soit aperçu que la dérivée de zn, utilisée à partir de la formule de Taylor pour démontrer la formule du binôme, découlait du développement du binôme (Houzel, op. cit., p. 140).

À l'article 71, il fait pour la première fois référence à la formule du binôme de Newton, appelé « Théorème général », et ceci dans le cas d'un exposant rationnel non entier :

> « Les fonctions irrationnelles sont ordinairement transformées en séries infinies, au moyen du Théorème général :
> $(P+Q)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}P^{\frac{m-n}{n}}Q + \frac{m(m-n)}{n\cdot 2n}P^{\frac{m-2n}{n}}Q^2 + \frac{m(m-n)(m-2n)}{n.2n.3n}P^{\frac{m-3n}{n}}Q^3 + \&c$: en effet, à moins que $\frac{m}{n}$ ne soit un entier positif, le nombre des termes est infini. »

Et il en déduit, à l'article 72, après avoir exemplifié le développement précédent pour diverses valeurs de *m* et *n* :

« Telle est la marche de toutes ces séries, que chaque terme peut être formé par celui qui le précède. Car, soit dans la série, qui résulte du développement de $(P+Q)^{\frac{m}{n}}$, un terme quelconque = $MP^{\frac{m-kn}{n}}Q^k$, le suivant sera = $\frac{m-kn}{(k+1)n}MP^{\frac{m-(k+1)n}{n}}Q^{k+1}$. » Il ne lui reste plus alors qu'à écrire :

$(P+Q)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}}(1+\frac{Q}{P})^{\frac{m}{n}}$, à poser $Z=\frac{Q}{P}$ et à considérer *m* rationnel non entier avec n=1, pour obtenir enfin :

$$(1+Z)^m = 1 + \frac{m}{1}Z + \frac{m(m-1)}{1.2}Z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}Z^3 + \&c.$$

« Pour bien observer les lois suivantes des progressions », il développe $(1+Z)^{m-1}$, et donne ensuite les développements de $(1+\alpha z)^{m-1}$, $(1+\alpha z+\beta zz)^{m-1}$, $(1+\alpha z+\beta zz+\gamma z^3)^{m-1}$ et enfin $(1+\alpha z+\beta zz+\gamma z^3+\delta z^4+\&c.)^{m-1}$

Comme l'on sait, l'*Introduction à l'analyse infinitésimale*, qu'Euler publie en 1743, représente un tournant dans l'histoire des mathématiques puisque, pour la première fois, l'analyse est construite à partir de la notion de fonction. De ce fait, il n'est plus nécessaire de recourir aux origines géométriques du logarithme, issu de la quadrature de l'hyperbole, elle-même section conique. C'est ce qu'indique Euler, dès la première ligne du chapitre VI intitulé *Des quantités exponentielles & des logarithmes* : « Quoique la connaissance des fonctions transcendantes doive faire un des objets du calcul intégral, cependant il sera à propos de traiter ici de quelques espèces qui se présentent plus fréquemment, et qui préparent la voie à plusieurs recherches. » Ainsi, les « quantités exponentielles » sont-elles définies comme « les puissances dont l'exposant est une quantité variable », notées $y=a^z$[156]. Le logarithme est alors défini comme fonction réciproque de l'exponentielle :

---

[156] Houzel (1976) remarque : « À proprement parler, il ne définit pas a^z pour z quelconque, mais fait seulement quelques commentaires qui éclairent de quoi il s'agit : pour a positif et $z=\frac{p}{q}$ rationnel, $a^z=a^{p/q}=\sqrt[q]{a^p}$ est connu et a plusieurs déterminations dont une seule est réelle positive […] Pour a=0, a^z=0, 1 ou ∞, selon que z>0, z=0 ou z<0 ; on ne définit pas a^z si a<0 […] Euler se restreint à a>1, de sorte que sa fonction a^z est strictement croissante ; elle vaut 0 pour z=-∞, 1 pour z=0 et ∞ pour z=∞. » p. 143.

> « Si étant donné le nombre a, on peut conclure de chaque valeur de z, celle de y ; réciproquement ayant pris pour y une valeur quelconque positive, on conçoit qu'il existe pour z un nombre convenable pour que $a^z=y$; cette valeur de z, en tant qu'elle peut être regardée comme une fonction de y, s'appelle ordinairement le LOGARITHME de y. » (art.102).

Le chapitre VII traite *Du développement des quantités exponentielles & logarithmes en séries*. Ainsi, page 85, après avoir montré que si ω est un infiniment petit proche de 0, alors $a^\omega=1+\psi$ avec ψ infiniment petit, Euler pose $a^\omega=1+k\omega$, dans lequel il indique que k dépend de la base a puisque $\omega=log_a(1+ k\omega)$. En 115, il démontre que :

$a^{i\omega}=(1+ k\omega)^i=1+\frac{i}{1}k\omega+\frac{i(i-1)}{1\cdot 2}k^2\omega^2+\frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}k^3\omega^3+\&c.$ d'après la formule du binôme de Newton qu'il ne mentionne plus. En posant $i=\frac{z}{\omega}$, comme ω est très petit, i est très grand et on a : $a^z=(1+\frac{kz}{i})^i=1+kz+\frac{1(i-1)}{1\times 2i}k^2z^2+\frac{1(i-1)(i-2)}{1\times 2i\times 3i}k^3z^3+\frac{1(i-1)(i-2)(i-3)}{1\times 2i\times 3i\times 4i}k^4z^4+\&c.$

En 116, Euler remarque que, i étant infiniment grand, alors : $\frac{i-1}{i}=1, \frac{i-1}{2i}=\frac{1}{2}, \frac{i-2}{3i}=\frac{1}{3}$, etc.

et donc : $a^z=1+\frac{kz}{1}+\frac{k^2z^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{k^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\&c.$,

soit avec $z=1$: $a=1+k+\frac{k^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\&c.$

Si nous consacrons quelque temps à exposer des extraits de certains chapitres de l'ouvrage d'Euler c'est, qu'en bien des points, ils nous paraissent révélateurs de ce que nous avons nommé la créativité mathématique obtenue par la pratique des ostensifs. Le lecteur moderne de ces passages aura sans doute noté ce qu'il peut désigner comme un ensemble constitué de nombreuses libertés prises avec la rigueur mathématique[157] ! Dans un cadre théorique non achevé à son époque, ces « raccourcis de calcul » conduisent cependant Euler à proposer, à travers ce que nous venons de montrer, le développement en série de l'exponentielle. Il y a

[157] Dans un ouvrage collectif paru en 1989, *La démonstration mathématique dans l'histoire*, page 223, C. Merker consacre un article à *Euler, l'infini, et les nombres imaginaires* où, entre autres, elle relève « les ressorts » du raisonnement exposé dans les extraits ci-dessus : l'interversion somme et limite sans se préoccuper de rayon de convergence, et de convergence uniforme (et pour cause !), le produit d'un infiniment petit par un infiniment grand donne un nombre fini, la généralisation des règles vraies avec un nombre fini au cas infini (passage à la limite) notamment dans le développement du binôme de Newton, et ensuite pour ses coefficients. Houzel précise, quant à lui, qu'il cite « explicitement la démonstration d'Euler pour montrer un exemple du maniement naïf des infiniment petits et des infiniment grands qui était courant au début du XVIII^e siècle. » (p. 144) et souligne l'embarras d'Euler lorsqu'il écrit $k=2{,}30258=9-\frac{9^2}{2}+\frac{9^3}{3}-\frac{9^4}{4}+\&c.$ En fait, Euler écrit en 120 « il [est] difficile de concevoir que $2{,}30258=9-\frac{9^2}{2}+\frac{9^3}{3}-\frac{9^4}{4}+\&c.$; parce que les termes de cette série vont toujours en augmentant, & qu'il ne suffit pas par conséquent d'en calculer quelques-uns pour en obtenir une valeur approchée. Nous remédierons tout-à-l'heure à cet inconvénient. » Il contourne le problème en 121 en trouvant une autre série, convergente cette fois, pour $k=2(\frac{9}{11}+\frac{9^3}{3\cdot 11^3}+\frac{9^5}{5\cdot 11^5}+\frac{9^7}{7\cdot 11^7}+\&c.)$, et qu'il considère comme une « série assez convergente, pour qu'on en puisse tirer promptement la valeur approchée de k ».

ainsi, pour certains ostensifs, une extension fructueuse de leur usage, même si aujourd'hui cette utilisation peut être vue comme indue, voire comme produisant parfois des résultats faux. Cette extension procède d'une première dimension créative : celle qui est relative au prolongement de cet usage, moyennant ou non quelque adaptation des règles d'utilisation. Et elle conduit à une deuxième, par la pratique de cette extension : la production d'un savoir mathématique nouveau.
Dieudonné (1978) connaît cela, lorsqu'il note que :

> « Beaucoup de calculs d'Euler sur de telles séries reviennent en fait à des calculs dans ce que nous appelons maintenant l'algèbre des *séries formelles* : une telle série est identifiée à la suite (a_n) de ses coefficients, qui n'est plus soumise à aucune condition ; l'addition et la multiplication se font suivant les règles des séries entières. » p. 23.

mais il le traite comme un travail formel sur les notations, et non comme une extension d'une pratique sur des ostensifs.

Reprenant notre cheminement dans l'ouvrage d'Euler, nous tenterons désormais de noter, lorsqu'elles se présenteront, les extensions de l'usage des ostensifs réalisées par Euler.
En 118, i étant grand, on a : $(1+k\omega)^i>1$ donc $(1+k\omega)^i=1+x$ et $\log_a(1+x)=i\omega$ car $a^{i\omega}=(1+k\omega)^i$
En 119, comme $(1+k\omega)^i=1+x$ alors $1+k\omega=(1+x)^{1/i}$, et donc : $i\omega=\frac{i}{k}[(1+x)^{\frac{1}{i}}-1]$, donc $\log_a(1+x)=\frac{i}{k}[(1+x)^{\frac{1}{i}}-1]$.
Or $(1+x)^{\frac{1}{i}}=1+\frac{1}{i}x-\frac{1(i-1)}{i\cdot 2i}x^2+\frac{1(i-1)(2i-1)}{i\cdot 2i\cdot 3i}x^3-\frac{1(i-1)(2i-1)(3i-1)}{i\cdot 2i\cdot 3i\cdot 4i}+\&c.$ et comme i est très grand : $\frac{i-1}{2i}=\frac{1}{2}, \frac{2i-1}{3i}=\frac{2}{3}, \frac{3i-1}{4i}=\frac{3}{4}$, etc.
Donc : $i(1+x)^{\frac{1}{i}}=i+\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\&c.$ et $\log_a(1+x)=\frac{1}{k}(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\&c.)$

Euler parvient donc en ce point, après avoir de nouveau utilisé le développement du binôme de Newton.
Mais contrairement à son utilisation précédente, pour laquelle l'exposant non entier impliquait un développement infini, l'extension est maintenant réalisée pour un infiniment petit $\frac{1}{i}$. De nouveau, ce que nous noterions $\lim_{i\to+\infty}\frac{i-1}{2i}=\frac{1}{2}$ devient « à cause de i infiniment grand $\frac{i-1}{2i}=\frac{1}{2}$ », précise Euler.
C'est en ce point le manque d'une écriture ostensive appropriée, allié au manque de savoir dont cette écriture est issue, mais que combleront les travaux du siècle suivant, qui poussent à l'utilisation d'un nouvel usage d'une écriture ostensive que nous considérons désormais incorrecte.

Ce développement de $\log_a(1+x)$ permet d'obtenir en 121 les développements de $\log_a(1-x)$ et de $\log_a(\frac{1+x}{1-x})$.
Comme cette relation est vraie pour n'importe quelle base *a*, Euler choisit celle pour laquelle $k=1$, et obtient alors le développement de la base correspondante à l'aide de la relation donnant *a* établie en 116, dont il donne 23 décimales.

Il décide de la noter *e*, base des logarithmes naturels ou hyperboliques. Ainsi, il obtient en 123 : $e^z=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1\cdot 2}+\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\&c.$, et le développement en série de $\ln(1+x)$, d'où résultent ceux de $\ln(1-x)$ et $\ln(\frac{1+x}{1-x})$.

Le chapitre VIII traite *Des quantités transcendantes qui naissent du cercle*. L'exposé qu'en donne Euler résulte d'une réorganisation inédite du savoir mathématique. Il l'indique, en 126, de la manière suivante :

> « Après la considération des logarithmes et des quantités exponentielles, vient celle des arcs de cercle, et de leurs sinus et cosinus, tant parce qu'ils forment une autre espèce de quantités transcendantes, que parce qu'ils dérivent des quantités logarithmiques mêmes et des quantités exponentielles, lorsqu'elles renferment des imaginaires, ce qu'on verra clairement ci-après. »

L'introduction de la notion de fonction provoque une révolution copernicienne dans l'organisation de l'exposé des mathématiques ; des parties qui relevaient traditionnellement de la géométrie, telle la trigonométrie, passent désormais sous la coupe de l'analyse, qui devient, en quelque sorte, première[158]. On est bien loin du *Traité des sinus du quart de cercle* dont Leibniz tirait l'inspiration dans les débuts de son calcul différentiel.
Ce chapitre VIII s'ouvre, des articles 126 à 131, sur le rappel ou l'établissement des formules trigonométriques usuelles, notamment celles relatives aux produits de deux sinus ou cosinus, ou aux sinus et cosinus de la somme et de la différence. Mais dès l'article 132, c'est le point de vue algébrique qui domine et Euler établit :

$(\cos y\pm\sqrt{-1}\,\sin y)(\cos z\pm\sqrt{-1}\,\sin z)=\cos(y+z)\pm\sqrt{-1}\,\sin(y+z)$ et
$(\cos x\pm\sqrt{-1}\,\sin x)(\cos y\pm\sqrt{-1}\,\sin y)(\cos z\pm\sqrt{-1}\,\sin z)=\cos(x+y+z)\pm\sqrt{-1}\,\sin(x+y+z)$
D'où il tire en 133 : $(\cos z\pm\sqrt{-1}\,\sin z)^2=\cos 2z\pm\sqrt{-1}\,\sin 2z$; $(\cos z\pm\sqrt{-1}\,\sin z)^3=\cos 3z\pm\sqrt{-1}\,\sin 3z$ « et qu'en général $(\cos z\pm\sqrt{-1}\,\sin z)^n=\cos nz\pm\sqrt{-1}\,\sin nz$ », ce qui montre la formule de Moivre.

Il en tire « à cause du double signe » :

[158] Houzel (1976) souligne : « Euler les considère [les fonctions circulaires] simplement comme des fonctions (transcendantes) : ce point de vue est nouveau, au moins pour les fonctions circulaires, car, jusqu'alors, sinus, cosinus et tangente n'étaient que des lignes dans une figure géométrique. […] si bien que le logarithme et la fonction *arc tg* étaient considérés non pas comme des fonctions, mais comme certaines aires limitées par une hyperbole ou par un cercle. » p. 142.

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2}$$
$$\sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2\sqrt{-1}}$$
« En développant ces binômes en séries », il obtient les développements de cos*nz* et sin*nz* :
$$\cos nz = (\cos z)^n - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(\cos z)^{n-2}(\sin z)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(\cos z)^{n-4}(\sin z)^4 + \ldots$$
$$\sin nz = \frac{n}{1}(\cos z)^{n-1}\sin z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(\cos z)^{n-3}(\sin z)^3 + \ldots$$
En 134, z étant considéré comme infiniment petit, on a $\sin z=z$ et $\cos z=1$.
Si, simultanément n devient très grand, de manière à ce que nz prenne une valeur finie v, comme on a $\sin z=z=\frac{v}{n}$, la relation précédente donnant cos*nz* devient :
$$\cos v=1-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}1^{n-2}(\frac{v}{n})^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}1^{n-4}(\frac{v}{n})^4 - \ldots$$
Soit, faisant $n=\infty$, il obtient :
$$\cos v=1-\frac{v^2}{1\cdot 2} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{v^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \&c.$$
Un calcul similaire permet d'obtenir de même le développement en série de sin*v*.

De nouveau donc, l'ostensif nz fait intervenir un infiniment petit et un infiniment grand dont le produit, noté v, est fini.

C'est l'écriture ostensive $z=\frac{v}{n}$, qui « autorise » la pratique consistant à appliquer la règle d'usage « produit des extrêmes égal produit des moyens » pour passer de $z=\frac{v}{n}$ à $nz=v$.

L'écriture ostensive induit donc l'extension de l'usage. De nouveau encore, il y a passage à la limite dans les coefficients, même si ici Euler ne l'indique même plus.

Ce qui est vraiment nouveau, par contre, est l'extension de l'usage de l'ostensif =, qui conduit à confondre sin*z* et cos*z* avec z et 1, lorsque, pourrait-on dire, z et 0 sont infiniment proches.
De cette extension de l'usage résulte l'utilisation conjointe de l'ostensif = dans un double sens :

- dans le sens de « l'égalité stricte » pour $z=\frac{v}{n}$ (une fois admis que zn prenait une valeur finie v)
- dans le sens d'une « presque égalité » pour $\sin z=z$ et $\cos z=1$[159].

[159] Cette manière de considérer des équivalents comme des nombres égaux, incite à faire le rapprochement avec la polémique que Leibniz avait dû soutenir avec Niewentijt, qui lui rappelait que « des grandeurs ne sont égales que si leur différence est nulle, c'est-à-dire égale à 0 ». Cet argument était utilisé pour invalider le choix de considérer $dxdy=0$ dans le calcul $d(xy)=(x+dx)(y+dy)-xy=xdy+ydx+dxdy$. Ce à quoi Leibniz répondait : « Je juge d'ailleurs que des termes sont égaux non seulement lorsque leur différence est absolument nulle, mais aussi lorsqu'elle est incomparablement petite, et bien qu'on ne puisse dire en ce cas que cette différence soit absolument Rien, elle n'est pourtant pas comparable à celle dont elle est la différence. » (cité par Nouet M. (1994))

C'est alors la règle d'usage de l'ostensif =, vu dans le sens de « l'égalité stricte », qui autorise la double substitution opérée dans le développement précédent, afin d'obtenir le développement final de cos$v$ et de sin$v$:

substitution par $\frac{v}{n}$, nombre égal à z, et substitution par z et 1 de sin$z$ et cos$z$ lorsque z et 0 sont infiniment proches.

Une fois de plus l'écriture ostensive « autorise » un prolongement des règles habituelles d'usage, telle que la substitution d'une quantité d'une égalité par une autre qui lui est « égale ».

Enfin, en 138, Euler reprend les relations obtenues en 133 :

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2}$$

$$\sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2\sqrt{-1}}$$

pour lesquelles il suppose z infiniment petit, et n assez grand et valant i, valeur pour laquelle iz a une valeur finie v. Donc $z=\frac{v}{i}$ et on a : sin$z$=$\frac{v}{i}$ et cos$z$=1. Les formules du 133 deviennent alors :

$$\cos v = \frac{(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i + (1-\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i}{2}$$

$$\sin v = \frac{(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i - (1-\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i}{2\sqrt{-1}}$$

De nouveau, on retrouve les techniques d'utilisation des ostensifs appliquées à leurs extensions, telles qu'Euler a pu les utiliser précédemment : calcul sur des infiniment grands et infiniment petits comme sur des nombres, extension de l'ostensif « = », ce qui « autorise » la substitution.

Or, la formule établie en 115 : $a^z=(1+\frac{kz}{i})^i$, devient avec la base e pour laquelle k=1 :

$e^z=(1+\frac{z}{i})^i$ et donc, les formules précédentes deviennent :

$$\cos v = \frac{e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2} \;\&\; \sin v = \frac{e^{v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

D'où Euler tire ses célèbres formules « $e^{v\sqrt{-1}} = \cos v + \sqrt{-1}\sin v, \& e^{-v\sqrt{-1}} = \cos v - \sqrt{-1}\sin v$ », mettant définitivement en évidence le lien entre l'exponentielle complexe et les fonctions trigonométriques, lien déjà pressenti par Cotes et Moivre (Boubaki, 1976, p. 32).

Celles-ci lui permettent par la suite, en utilisant le développement en série de $\ln(\frac{1+x}{1-x})$ antérieurement établi, d'obtenir le développement de l'arc tangente et de démontrer, en 140, le développement de $\frac{\pi}{4}$ établi par Leibniz[160].

C'est donc, comme on a tenté de le montrer, le recours à l'extension des usages des ostensifs, par une mise à distance des problèmes qui leur ont donné naissance, qui permet l'engagement dans des calculs dont vont déboucher des résultats nouveaux. Chez Euler, c'est le choix d'avoir décidé que certaines notions, par exemple d'infiniment grands et d'infiniment petits, d'approximations au voisinage de 0, pouvaient être modélisées par des ostensifs préexistants, qui conduit à « s'autoriser » à leur appliquer les règles pratiques permettant de les insérer dans le travail mathématique courant. Et c'est à partir de lui que s'opère la production de savoirs nouveaux. Il y a ainsi une certaine autonomie de la pratique des ostensifs, conditionnée par un certain oubli des problèmes et des problématiques, par exemple géométriques, desquels ils sont issus. Ils procèdent alors d'eux-mêmes et des règles d'usage établies pour eux. C'est ce qu'explique Houzel (1976), en montrant qu'ainsi Euler se dégage aussi des querelles philosophico-métaphysiques sur l'infini, qui freinaient jusqu'alors le développement du calcul infinitésimal, parce qu'on pensait qu'il devait aussi se fonder sur de clairs concepts philosophiques à qui il devait, en définitive, rendre compte :

> « La position formaliste adoptée par Euler lui permet donc d'évacuer l'infini du calcul infinitésimal. Désormais, la justification des raisonnements se trouve dans la manipulation réglée de symboles et non plus dans une intuition géométrique complétée par l'appui de la métaphysique de l'infini. » p. 128.

C'est ainsi au prix d'oublis, conséquences de l'application du « principe d'économie de l'énergie cognitive », que la pratique des ostensifs peut se déployer et déboucher sur une authentique créativité mathématique.

4. 3. 3. Le travail de la mémoire comme travail de reconstruction des souvenirs et de construction du savoir : l'exemple de Descartes

Les règles cartésiennes, parce qu'elles ont la prétention de donner les méthodes permettant de « chercher la vérité dans les sciences », comme l'indique le sous-titre du *Discours de la méthode*, ont, dès le XVII[e] siècle, suscité les polémiques et railleries de certains. Leibniz, le

---

[160] Mais Euler fait remarquer que la convergence de cette série est lente, et il propose en 141, le développement $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{5 \cdot 3^3 \sqrt{3}} - \&c.$, pour lequel il précise « Et c'est par le moyen de cette série, et avec un travail incroyable, qu'on est venu à bout de trouver la valeur de π que nous avons donnée ci-dessus. Ce calcul est d'autant plus pénible, que tous les termes sont irrationnels, et que chacun d'eux n'est guère plus petit, que le tiers de celui qui précède […] » Aussi propose-t-il finalement, en 142, d'utiliser le développement de $\frac{\pi}{4}$ obtenu en ajoutant les développements de *a* et *b* définis par $\tan a = \frac{1}{2}$ et $\tan b = \frac{1}{3}$.

premier, ne s'en priva pas, qui objectait qu'on ne voit pas en quoi on reconnaît qu'une idée est « claire et distincte », et se moquait de la non-fonctionnalité des quatre préceptes cartésiens du *Discours de la méthode*, en les comparant aux recettes des alchimistes : « Prends ce qu'il faut, opère comme tu le dois, et tu obtiendras ce que tu souhaites ! »[161] Dans ce qui suit, nous voudrions montrer que, en préalable à l'exposition des principes cartésiens, et parmi d'autres dimensions plusieurs fois soulignées, se trouve ce que nous nommons un travail de mémoire, mené par Descartes lui-même pour son propre compte, et qui l'a conduit à la construction d'une géométrie « algébrisée »[162].
L'exposé du *Discours de la méthode* et des *Règles pour la direction de l'esprit* prend alors un autre sens. Il s'agit de communiquer à d'autres, et peut-être, ce faisant, avant tout de clarifier *a posteriori* pour soi-même[163], les chemins empruntés lors de l'accomplissement de son propre travail de mémoire ; entreprise dont les résultats ont pu être vus (par Leibniz, par exemple) comme inopérants, parce que le projet initial relève d'une certaine naïveté : vouloir ériger en principe universel ce que l'on croit être vrai pour soi-même. Ce que nous considérons comme un travail de mémoire est perçu et décrit par Descartes lui-même, à la fin de l'exposé de la règle IV, après qu'il ait posé le principe d'une Mathématique universelle, et en forme de justification à l'écriture des *Règles pour la direction de l'esprit* :

> « … tout ce que j'ai trouvé de plus digne de remarque dans mes études précédentes, je m'efforcerai de le ramasser en un tout et de le mettre en ordre, soit pour le reprendre un jour commodément dans cet opuscule, si le besoin s'en fait sentir avec la diminution de la mémoire, sous l'effet de l'âge, soit pour en décharger ma mémoire et pouvoir m'appliquer au reste avec une plus grande liberté d'esprit. » p. 28.

Un des objectifs affichés, sinon le seul, est donc bien d'exposer, pour son usage privé, un tout ordonné, afin d'aider lorsqu'elle sera devenue défaillante, ou de la soulager pour s'appliquer au reste de l'étude, la mémoire de l'auteur.

On sait que l'étude que Chevallard et Mercier (1987) font de Descartes, et notamment du *Discours de la méthode*, débouche sur la mise en évidence de l'apport cartésien à la constitution de la fiction de la linéarité du savoir, de son temps à structure segmentaire, de ce que l'organisation du savoir connu est une nécessité pour des savoirs nouveaux à connaître, fiction qui est un préalable à ce qui sera « … pour des siècles […] la norme de toute progression didactique - où, en effet, le nouveau doit procéder de l'ancien, où le maître du moins doit faire sortir le nouveau de l'ancien. », et d'où découle l'accomplissement linéaire du temps didactique, ne coïncidant aucunement avec le temps de l'apprentissage, et que décrit *La transposition didactique*.

---

[161] Cité par Bourbaki (1969), p. 22.
[162] « Quand je me suis d'abord appliqué aux disciplines mathématiques, j'ai lu immédiatement en entier la plupart des choses qu'enseignent d'ordinaire leurs promoteurs et j'ai cultivé de préférence l'Arithmétique et la Géométrie […] Mais, pourquoi il en était ainsi et comment on parvenait à le trouver, ils ne paraissaient pas suffisamment le montrer à l'intelligence elle-même. […] Ces pensées m'ayant ramené des études particulières de l'Arithmétique et de la Géométrie à une recherche approfondie et générale de la Mathématique, […] ». *Règles pour la direction de l'esprit*, pp. 22.23&26.
[163] Les *Regulae ad directionem ingenii*, rédigées en latin et inachevées, sont publiées à titre posthume en 1701. Le *Discours de la méthode* provient en partie d'une commande de ses amis parisiens, formulée dans les années 1620-30 pour qu'il rédige une histoire de sa vie, et il n'est publié qu'en 1637.

Ce travail sur Descartes et les apports que pouvait en retirer la didactique des mathématiques a été continué par Mercier - travail mené notamment sur *La géométrie* et *Les règles pour la direction de l'esprit* - et a débouché sur le texte, non publié, d'une intervention qu'il a donnée lors d'un « colloque Descartes ». Cette partie a été rédigée en se référant souvent à ce texte, dont nous reprenons certaines des idées directrices, pour les intégrer à l'étude de la mémoire.

4. 3. 3. 1. La mémoire dans les *Règles pour la direction de l'esprit*

Beaucoup a été écrit sur Descartes et son œuvre. Mais il est peut-être nécessaire de rappeler que le même projet, poursuivi tant dans le *Discours de la méthode* que dans les *Règles pour la direction de l'esprit*, est contenu dans le titre que Descartes voulait tout d'abord donner au *Discours de la méthode* : « Le projet d'une science universelle qui puisse élever notre nature à son plus haut degré de perfection ».
Pour parvenir à se dégager des « opinions probables » et atteindre à la science du certain, ce qui constitue l'objectif visé (« Toute science est une connaissance certaine et évidente », écrit-il immédiatement après l'énoncé de la règle II, p. 5), Descartes estime que « l'Arithmétique et la Géométrie sont beaucoup plus certaines que les autres disciplines » (p. 9). Elles constitueront alors un bon modèle pour la science universelle, car « dans la recherche du droit chemin de la vérité, on ne doit s'occuper d'aucun objet sur lequel on ne puisse avoir une certitude aussi grande que celle des démonstrations de l'Arithmétique et de la Géométrie. » (p. 10). Les outils qui guident cette démarche et qui permettent de parvenir à la connaissance des choses sont en nombre très restreint : « il n'y en a que deux à admettre, savoir l'intuition et la déduction »[164] (p. 13). À partir de la règle XIII et jusqu'à la règle XXI par laquelle se termine le manuscrit inachevé, ce sont les mathématiques qui sont explicitement utilisées comme modèle : pour poser une question (règle XIII), modéliser « l'étendue réelle des corps » ou « l'imagination à l'aide de figures pures et simples » (règles XIV et XV), utiliser des notations (règle XVI), discerner les termes connus et inconnus (règle XVII). Quant aux quatre dernières règles, elles ont directement pour objet les mathématiques : utiliser le plus souvent possible des additions et soustractions (règle XVIII, qui est la dernière qui soit développée), chercher autant de relations entre connu et inconnu qu'il y a d'inconnues (règle XIX), et les deux dernières sont relatives aux équations.

Le fil directeur que suit explicitement Descartes, et qu'il revendique, est donc constitué des mathématiques telles qu'il pense leur pratique. L'exposé des *Règles pour la direction de l'esprit* nous fournit alors un accès aux gestes de l'étude, mis en œuvre par Descartes pour apprendre et réorganiser le savoir mathématique qu'on lui a enseigné à La Flèche, ou qu'il

[164] Descartes en donne les définitions suivantes : « Par *intuition*, j'entends […] le concept que l'intelligence pure et attentive forme avec tant de facilité et de distinction qu'il ne reste absolument aucun doute sur ce que nous comprenons ; […] Ainsi, chacun peut voir par intuition intellectuelle qu'il existe, qu'il pense, qu'un triangle est limité par trois lignes seulement, un corps sphérique par une seule surface, et autres faits semblables […] ». L'intuition correspond donc à ce que l'on nomme désormais l'évidence. Quant à la déduction : « […] nous avons ajouté ici à l'intuition un autre mode de connaissance consistant dans la déduction, par laquelle nous entendons toute conclusion nécessaire tirée d'autres choses connues avec certitude. » pp. 14.15.16.

s'est enseigné par la suite. Il est donc intéressant de chercher à connaître ce qu'un élève, tel que Descartes !, dit du rôle de la mémoire dans l'étude des mathématiques.
La définition qu'il en donne est énoncée assez loin dans le texte, puisqu'il faut attendre la règle XII, alors qu'il a utilisé le terme dès la règle IV. C'est par le recours à l'analogie que cette définition est abordée :

> « […] il faut concevoir que le sens commun joue aussi le rôle d'un sceau pour former dans la fantaisie ou imagination, comme dans de la cire, les mêmes figures ou idées qui viennent des sens externes, pures et incorporelles ; et que cette fantaisie est une véritable partie du corps, dont la grandeur est telle que ses diverses portions peuvent revêtir plusieurs figures distinctes les unes des autres et d'ordinaire les retiennent assez longtemps : c'est alors qu'on l'appelle mémoire. » p. 76.

Mais cette définition, un peu rustique, est complétée d'une deuxième dans laquelle la mémoire apparaît comme une expression particulière d'une seule et même force prenant diverses occurrences, et que Descartes nomme l'esprit :

> « C'est une seule et même force qui, en s'appliquant avec l'imagination au sens commun, est dite : voir, toucher, etc. ; qui, en s'appliquant à l'imagination seule en tant que celle-ci est revêtue de figures diverses, est dite : se souvenir ; qui, en s'appliquant à elle pour en former de nouvelles est dite : imaginer ou concevoir ; qui enfin, en agissant seule, est dite : comprendre. […] Et par suite de ces diverses fonctions, la même force est encore appelée, soit entendement pur, soit imagination, soit mémoire, soit sens, mais on lui donne proprement le nom d'esprit, lorsque tantôt elle forme de nouvelles idées dans la fantaisie et tantôt porte sur celles qui sont déjà faites. Nous la considérons comme apte à ces diverses opérations et il faudra tenir compte dans la suite de la distinction des appellations précédentes. » p. 78.

Il est notable que ces deux définitions soient données à l'occasion du développement de la règle XII, au cours d'un long passage dans lequel Descartes explique : « […] je souhaiterais exposer en cet endroit ce qu'est l'intelligence de l'homme, ce qu'est son corps, comment celui-ci est informé par celle-là, quelles sont dans tout le composé humain les facultés qui servent à la connaissance et ce que fait chacune d'elles en particulier […] » (p. 72).

Après avoir souligné les faiblesses que la mémoire risque de connaître avec l'avancée en âge, et la nécessité de « décharger la mémoire » afin de laisser la liberté à l'esprit de s'appliquer à des activités nouvelles, cette première dimension de faiblesse ou de non-fiabilité est reprise dans la suite de l'exposé, et la même préoccupation visant à tenter d'anticiper et de pallier aux éventuelles défaillances de la mémoire semble prédominer.
Ainsi, après avoir exposé dans la règle V une certaine éthique à propos de l'enchaînement des conséquences qu'« il ne faut pas tant [les] retenir de mémoire que [les] discerner par une certaine pénétration d'esprit » (p. 35), de nouveau, c'est à propos de l'importance du « si long enchaînement de conséquences » qui permet d'« avoir atteint ces vérités », « qu'il faut remédier à la faiblesse de la mémoire par une sorte de mouvement continu de la pensée ».[165]

[165] Cette éthique rejoint, en quelque sorte, celle du « science sans conscience n'est que ruine de l'âme » dans le passage suivant du développement de la règle VII où est opposée la véritable connaissance à celle qui est simplement mémorisée : « Et ce qui paraîtra merveilleux et incroyable à ceux qui ne l'ont pas expérimenté, aussitôt après avoir distingué, touchant chaque objet en particulier, les connaissances qui remplissent ou ornent la mémoire de celles qui sont vraiment cause qu'un homme doive être dit plus érudit, ce qu'il sera encore facile de faire… il sera tout à fait d'avis qu'il n'ignore rien de plus par manque d'esprit ou d'art, et qu'il n'y a rien du

Aussi, pour plus de sûreté, est-il préférable de mettre en œuvre des techniques qui, tout à la fois, permettent de minimiser la nécessité de recourir à la mémoire et l'aident simultanément :

> « C'est pourquoi je les parcourrai un certain nombre de fois par une sorte de mouvement continu de l'imagination qui voit d'un seul coup chaque objet en particulier en même temps qu'elle passe aux autres, jusqu'à ce que j'aie appris à passer du premier rapport au dernier assez rapidement pour que, sans laisser presqu'aucun rôle à la mémoire, il me semble voir le tout à la fois par intuition. De cette façon, en effet, en aidant la mémoire, on corrige aussi la lenteur de l'esprit et on étend en quelque manière sa capacité. » p. 40.

Mais la mémoire peut aussi, en dernière instance, aider l'intuition et la déduction. Descartes explique, par exemple, que la déduction ne peut parfois « s'accomplir tout entière à la fois », « quand elle est compliquée et composée », et qu'elle nécessite alors *l'énumération ou induction* qui recourt, quant à elle, à la mémoire :

> « C'est à cette dernière que nous avons donné le nom d'énumération ou d'induction, parce qu'elle ne peut pas alors être saisie par l'entendement tout entière à la fois et que sa certitude dépend en quelque sorte de la mémoire, qui doit retenir les jugements portés sur chacune des parties énumérées, pour en tirer de toutes une conclusion. » p. 67.

La mémoire peut cependant se constituer en obstacle pour la compréhension et la connaissance :

> « Et certes, nous remarquons qu'en nous l'entendement seul est capable de science : mais que trois autres facultés peuvent l'aider ou lui créer des empêchements : ce sont l'imagination, les sens et la mémoire. » p. 54.

Aussi, de nouveau, il faut exercer la mémoire et envisager des stratégies qui permettent, le plus possible, de la contourner (« lui laisser presqu'aucun rôle » écrit par deux fois Descartes, pages 40 et 68) :

> « […] la mémoire dont dépend, comme il a été dit, la certitude des conclusions qui embrassent plus que ne peut saisir une seule de nos intuitions, doit être, à cause de ses oublis et de ses faiblesses, réveillée et fortifiée par ce mouvement continu et répété de la pensée. […] C'est pourquoi il est nécessaire que ma pensée les[166] parcoure de nouveau, jusqu'à ce que je passe du premier au dernier avec une telle rapidité que, sans laisser à la mémoire presqu'aucun rôle, je paraisse voir le tout à la fois par intuition. » p. 68.

Cette contradiction entre la nécessité du recours à la mémoire, et la méfiance envers cette faculté peu fiable qui peut nous tromper, paraît, pour Descartes, avoir trouvé historiquement son dépassement dialectique dans l'invention de l'écriture :

> « Mais, parce qu'elle [la mémoire] est souvent fugitive et pour ne pas nous forcer à dépenser une partie de notre attention à la raviver, pendant que nous sommes occupés à d'autres pensées, l'art a découvert très à propos l'usage de l'écriture. Forts du secours de celle-ci, nous ne confierons ici absolument rien à la mémoire, mais, laissant notre fantaisie libre et tout entière aux idées présentes, nous représenterons sur du papier tout ce qu'il faudra retenir. » pp. 128-129.

---

tout qu'un autre homme puisse savoir, sans que lui-même en soit capable, pourvu seulement qu'il y applique son intelligence comme il convient. » pp. 50-51.

[166] Il s'agit des rapports qui font passer d'une première grandeur à une deuxième, de la deuxième à la troisième et ainsi de suite jusqu'à la cinquième, et dont on veut tirer le rapport de la première à la cinquième.

C'est parmi les dernières règles énoncées, dans le développement de la règle XVI, que cette solution sociale et historique est mentionnée ; et déjà transparaît avec plus d'insistance ce qui n'était qu'un modèle, en filigrane auparavant : le travail des mathématiques, et plus particulièrement, comme l'écrit Descartes, celui de l'Arithmétique et de la Géométrie. Aussi, ne peut-on s'empêcher de se demander si « l'art », dont parle Descartes dans la précédente citation, n'est pas simplement celui des mathématiques. D'autant qu'après avoir indiqué que ce qui doit être retenu doit être noté « au moyen des notations les plus brèves, afin […] que nous puissions […] tout parcourir par un mouvement très rapide de la pensée et voir par intuition le plus grand nombre d'objets possible », Descartes en vient aux notations mathématiques :

> « Tout ce qu'il faudra donc considérer pour la solution d'une difficulté comme formant une seule chose, nous le désignerons par une notation unique, que l'on peut figurer à volonté. Mais, pour plus de facilité, nous nous servirons des lettres *a*, *b*, *c*, etc., pour exprimer les grandeurs déjà connues, et des lettres A, B, C, etc., pour exprimer les inconnues. Nous les ferons précéder souvent des notations numériques 1, 2, 3, 4, etc., pour rendre compte de leur pluralité, et nous ajouterons les mêmes notations pour rendre compte du nombre de relations qu'il faudra comprendre en elles. Par exemple, si j'écris : $2a^3$, ce sera comme si je disais : le double de la grandeur représentée par la lettre *a* et qui contient trois relations. » p. 129.

Nous pouvons alors reprendre le raisonnement de Descartes sur la mémoire, tel qu'il apparaît dans les *Règles pour la direction de l'esprit*. La mémoire est l'une des expressions d'une force, « l'esprit », encore nommée l'intelligence, qui est la faculté humaine permettant d'accéder à la connaissance. Pour connaître, il nous est nécessaire de recourir à la mémoire, par exemple lorsque notre esprit s'engage dans des raisonnements déductifs « compliqués et composés » qui empêchent l'expression entière de l'intuition. Mais le recours à la mémoire, s'il aide, crée aussi un ensemble de contraintes. Une première d'entre elles réside dans le fait qu'il soit nécessaire de décharger la mémoire de certains souvenirs, pour que l'esprit puisse s'appliquer fructueusement à d'autres activités. Par ailleurs, la mémoire n'est pas fiable ; elle est fugitive, imprécise et peut constituer des obstacles à la connaissance. C'est donc une faculté nécessaire, mais qui constitue un appui parfois incertain.
Descartes est donc conduit à définir des moyens permettant d'éviter les problèmes liés au recours à la mémoire, recours dont on ne peut se passer si l'on poursuit le projet de « rechercher la vérité » en toute chose, et en particulier dans les sciences. Ceux-ci sont trouvés dans deux inventions techniques. La première est longuement exposée par Descartes, à deux reprises, pages 40 et 68, et à peu près dans les mêmes termes, soit parce qu'il y attache une importance particulière, soit, et c'est le plus probable, parce que la conviction est difficile à emporter. Cette technique consiste à engager la pensée « dans un mouvement continu » ; expression assez imprécise de prime abord. Les moyens de la mise en œuvre de ce mouvement continu sont trouvés dans la répétition, « les parcourir un certain nombre de fois » dans le langage de Descartes. Le « test d'arrêt » est réalisé lorsqu'on peut passer du premier terme au dernier d'une manière si rapide qu'il nous paraît « voir le tout à la fois par intuition », c'est-à-dire de la même manière que l'on considère une chose comme étant évidente. La deuxième technique est trouvée dans l'écriture. Ce tout ordonné, extérieur à la personne, déposé dans un texte pour soi-même ou d'autres, outil pour réaliser le principe d'économie de « l'énergie cognitive », correspond à la définition de la mémoire humaine

donnée par Leroi-Gourhan (1964)[167]. C'est ce seul aspect que l'on retient d'ordinaire de la lecture de la méthode cartésienne, peut-être parce qu'on veut la voir à portée générale, alors qu'elle est tout entière spécifique des mathématiques dont elle issue : « toute la méthode consiste dans l'ordre et l'arrangement des objets sur lesquels il faut faire porter la pénétration de l'intelligence pour découvrir quelque vérité », énonce la règle V.

Mais, le fait remarquable et nouveau réside en ce que cette mémoire ne s'exprime pas sous la forme de l'écriture intégrale du raisonnement, mais dans des écritures brèves (« des notations plus brèves », écrit Descartes), telles les lettres et les chiffres ; ce que l'approche anthropologique en didactique désigne sous le terme d'ostensifs scripturaux. Certes, la brièveté facilite la mémorisation et soulage la capacité de réflexion, ce que relève Descartes :

> « […] non seulement nous ferons l'économie de beaucoup de mots, mais […] nous présenterons les termes de la difficulté sous une forme si pure et si nue que, sans omettre rien d'utile, on ne trouve pourtant jamais en eux rien de superflu et qui occupe inutilement la capacité de l'esprit […] » (pp. 129-130).

Par ailleurs, ces notations permettent aussi « de faire un sommaire, où nous écrivons les termes de la question, tels qu'ils nous auront été proposés la première fois ; puis, comment on les abstrait et par quelles notations on les désigne. » (p. 133)
Le plus important, mais qui est souvent passé sous silence, réside en ce que l'usage de telles notations présente un autre avantage, typique des ostensifs : donner à voir l'opération qui se fait ou qui est à faire. Afin de l'illustrer, Descartes prend l'exemple de la recherche de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont 9 et 12. Un Calculateur, dit-il, dira qu'elle est égale à $\sqrt{225}=15$, « tandis que de notre côté, nous mettrons *a* et *b* à la place de 9 et de 12 » (p. 130), et que l'expression de l'hypoténuse sera alors $\sqrt{a^2+b^2}$. Si nous faisons ainsi, explique Descartes, c'est certes « pour éviter l'ennui d'un calcul long est superflu », mais « surtout pour que les parties du sujet qui concernent la nature de la difficulté restent toujours distinctes et ne soient pas chargées de nombres inutiles ». Ainsi, dans la recherche de l'hypoténuse, « ces deux parties a^2 et b^2 resteront distinctes, alors qu'elles sont confondues si l'on se sert d'un nombre ». Autrement dit, l'écriture $\sqrt{225}$ cache « les deux parties » dont elle est issue, et l'opération qui « les a confondues », dont l'écriture est la conséquence.
Dans cet exemple, choisi sans doute pour sa simplicité (car, bien sûr, Descartes sait aussi mener des calculs algébriques moins évidents !), « les parties qui concernent la difficulté » - difficulté qui réside ici en élever au carré les longueurs des côtés et ajouter ces carrés - « restent toujours distinctes ». Ceci permet d'accéder à l'intelligence de ce que l'on doit faire dans ce calcul, de la technique réellement appliquée. C'est ce qu'expose Descartes en poursuivant, dans les pages suivantes, l'enseignement qu'il tire de l'exemple. En effet, dit-il, en écrivant que $\sqrt{225}=15$ « nous connaîtrons que la base 15 est commensurable avec les côtés 9 et 12, mais non d'une manière générale en vertu du fait qu'elle est la base d'un triangle rectangle dont un côté est à l'autre comme 3 est à 4 ».
Autrement dit, c'est l'écriture algébrique $\sqrt{a^2+b^2}$, qui permet de démontrer et de

[167] « Le fait fondamental, relatif à la mémoire humaine, a déjà été discuté : comme l'outil, la mémoire de l'homme est extériorisée et son contenant est la collectivité ethnique. […] l'homme dispose d'un clavier large et reçoit de la société des séries de programmes qu'il assimile et sur lesquels il brode. » pp. 64&65.

comprendre, dans le cas général, que si deux côtés d'un triangle rectangle sont proportionnels à 3 et 4, alors l'hypoténuse est proportionnelle à 5 ; l'exemple ne le montre que pour 15 et ne permet pas de le comprendre. C'est cette « connaissance compréhensive » - et qui contient une certaine capacité de créativité dans la possibilité de construire alors la démonstration qui prouve cette proportionnalité algébrique, donc cette similitude géométrique - que recherche en effet Descartes, et qu'il exprime en ces termes, en les opposant aux raisons des « Calculateurs » :

> « Nous faisons toutes ces distinctions, nous qui cherchons la connaissance évidente et distincte des choses, mais non les Calculateurs qui sont contents, pourvu que s'offre à eux la somme cherchée, même sans remarquer comment elle dépend des données : ce qui est le seul point où réside proprement la science. » p. 133.

Les ostensifs ont donc un avantage mémoriel supplémentaire : celui de conserver le souvenir des propriétés générales des éléments de base du calcul et, ce faisant, de permettre d'obtenir en les rendant intelligibles les résultats issus de ces propriétés. Pour Descartes, la question de la mémoire est donc centrale pour la pratique des mathématiques. C'est dans la technique personnelle d'étude consistant en la répétition, dans l'écriture « ordonnée et arrangée des objets sur lesquels porte la pénétration de l'intelligence » qui conduit à la linéarité de l'exposé, et dans la pratique des mathématiques s'appuyant sur les ostensifs qu'il en trouve la solution.

Il peut sembler alors bien étrange de trouver sous la plume de Lieury (1996) cette sentence définitive : « Ainsi, la mémoire est remarquablement absente des œuvres de Descartes » ! Lieury cite longuement une réflexion de Descartes dans ses *Cogitationes Privatae* de 1619-1621, dans laquelle il récuse les mnémotechniques de Schenckel :

> « En parcourant les fécondes sottises de Lambert Schenckel, j'ai réfléchi qu'il me serait facile d'embrasser par l'imagination tout ce que j'ai découvert : à savoir, par le moyen d'une réduction des choses aux causes ; lesquelles toutes réduites finalement à une seule, il est clair qu'il n'est nul besoin de la mémoire pour toutes les sciences. Car qui comprendra les causes, reformera en son cerveau, par l'impression de la cause, des fantômes tout à fait effacés. Tel est le véritable art de la mémoire, tout à fait opposé à l'art de cet imbécile […] Quant à lui, il omet précisément, je ne sais s'il le fait exprès, ce qui est la clé de tout le mystère. » p. 35.

Notre interprétation de cette remarque de Descartes est tout à l'inverse de celle de Lieury. Pour nous, dès 1620 donc, il semble bien que Descartes avait découvert la clé exposée dans les *Règles pour la direction de l'esprit* et l'usage mémoriel de ce qu'il appelle « les causes » qui permettent de reformer « les fantômes tout à fait effacés ».

Cette position est cependant parfaitement révélatrice d'une appréhension de la mémoire qui se veut généraliste, et « oublie » alors, de ce fait, sa fonction première : celle d'aide et de condition pour l'engagement et l'accomplissement d'une pratique. Pratique que, sous ce parti pris généraliste, on ne peut plus étudier !

Si la mémoire n'est plus que cette capacité comportementale qui consiste à restituer ou non, à l'aide de pratiques langagières, donc dotées d'une certaine transparence, ou de l'activation d'un dispositif simple qui s'y substitue, des « enregistrements par le cerveau des faits passés »[168], aucune pratique ne peut plus être considérée comme pratique mémorisée. Même si elle peut paraître plus prudente, parce que plus elliptique en se gardant d'évoquer « le cerveau », ce qui lui donne un aspect moins brutal et simpliste, la définition donnée par Reuchlin (1990), reprenant *in extenso* celle qu'il donnait déjà en 1978[169], ne nous semble guère s'éloigner de la précédente :

> « *La mémoire concerne, de façon plus limitative, les mécanismes par lesquels un apprentissage ainsi acquis reste disponible pendant un certain temps*. Elle implique un processus de *stockage* (rétention) et un processus de *rappel* (réactivation, réactualisation). Les modifications intervenant dans le matériel stocké, les difficultés de rappel, l'oubli sont étudiés. » p. 125.

En effet, se poser la question de ce que sont ces « mécanismes », du siège du « stockage », des natures du « matériel stocké » et du « processus », de ce qui conduit à des « modifications », renvoie toujours au même objet présent en filigrane : le cerveau qui, comme chacun sait, est celui d'un sujet. N'affleure jamais, dans ces définitions, l'idée que la mémoire puisse aussi se trouver dans des objets, extérieurs aux personnes, qu'elle soit portée non par un cerveau mais par une personne ou une collectivité humaine, une institution, qu'elle puisse s'actualiser ou en soit empêchée par des pratiques (ce qui a un autre sens que le terme d'apprentissage) personnelles ou collectives, et que celles-ci ne soient pas de nature langagière exclusivement.
La rupture par rapport à cette vision courante que nous devons opérer pour rendre compte de la mémoire dans des activités aussi complexes que celles relatives aux mathématiques, fait apparaître comme une impérieuse nécessité que les didactiques, et au-delà les sciences dont l'objet est l'étude des pratiques, se préoccupent de la question de la mémoire et ne la laissent plus à des disciplines qui présupposent l'indifférence aux particularités de ces pratiques, « justifiant » ainsi l'économie de leur étude.

4. 3. 3. 2. La seconde partie du *Discours de la méthode* comme conséquence des Règles pour la direction de l'esprit

Le *Discours de la méthode* se réduit parfois, chez certains lecteurs pressés de Descartes, en l'énonciation des quatre préceptes qu'il contient en sa seconde partie[170]. Il est cependant utile de lire, juste à leur suite, l'exposé que fait Descartes des raisons qui l'ont conduit à ces

[168] Nous tirons cette définition, qui nous semble tout à fait éclairante de l'acception dominante dont nous voulons précisément nous démarquer, d'un ouvrage intitulé *La psychologie moderne de A à Z*, dû à Gauquelin M. & F. et alii, Retz, 1971, p. 311.
[169] La première édition de l'ouvrage *Psychologie* date de 1977, la seconde de 1978.
[170] Rappelons ces préceptes. « Le premier était de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie que je ne la connusse évidemment être telle : c'est-à-dire, d'éviter soigneusement la précipitation, et la prévention ; et de ne comprendre rien de plus en mes jugements, que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement à mon esprit, que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute. Le second, de diviser chacune des difficultés que j'examinerais en autant de parcelles qu'il se pourrait, et qu'il serait requis pour le mieux résoudre. Le troisième, de conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples, et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu comme par degrés jusques à la connaissance des plus composés : et supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement les uns les autres. Et le dernier, de faire partout des dénombrements si entiers, et des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre. » pp. 28-29.

préceptes. Elles s'appuient sur les mathématiques et elles seules, par comparaison aux autres disciplines en lesquelles il a été enseigné :

> « Ces longues chaînes de raisons toutes simples et faciles, dont les géomètres ont coutume de se servir, pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations m'avaient donné l'occasion de m'imaginer, que toutes les choses qui peuvent tomber sous la connaissance des hommes s'entresuivent en même façon […] … et considérant qu'entre tous ceux qui ont ci-devant recherché la vérité dans les sciences, il n'y a eu que les seuls mathématiciens qui ont pu trouver quelques démonstrations, c'est-à-dire quelques raisons certaines et évidentes, je ne doutais point que ce ne fût par les mêmes qu'ils ont examinées […] » pp. 29-30.

La suite des explications données est tout à fait éclairante, car on y retrouve la pensée de Descartes au point où nous l'avons laissée dans le développement de la règle XVI. Ainsi, traitant « des proportions en général », c'est-à-dire des relations entre divers objets :

> « Puis ayant pris garde que pour les connaître, j'aurais quelquefois besoin de les considérer chacune en particulier, et quelquefois seulement de les retenir, ou de les comprendre plusieurs ensemble, je pensai que pour les considérer mieux en particulier, je les devais supposer en des lignes à cause que je ne trouvais rien de plus simple, ni que je pusse plus distinctement représenter à mon imagination et à mes sens ; mais que pour les retenir, ou les comprendre plusieurs ensemble, il fallait que les expliquasse par quelques chiffres les plus courts qu'il serait possible. Et par ce moyen j'emprunterais tout le meilleur de l'analyse géométrique et de l'algèbre, et corrigerais tous les défauts de l'une par l'autre. » p. 30.

Parce qu'il doit considérer ces relations, soit « plusieurs ensemble », soit prises isolément, Descartes explique de nouveau, comme dans les *Règles pour la direction de l'esprit*, qu'il a trouvé deux techniques utiles pour cela : les « supposer en des lignes », c'est-à-dire comme des longueurs[171], et les représenter par « quelques chiffres les plus courts possibles », dont l'écriture $2a^3$ de la page 129 des *Règles pour la direction de l'esprit* fournissait l'exemple prototypique. La lecture de la dernière phrase de la citation, qui indique vouloir tirer le meilleur parti de l'algèbre et de la géométrie, en corrigeant l'une par l'autre, nous conduit naturellement à y voir un trait signalant ce qui fonde l'originalité de la contribution cartésienne aux mathématiques, celle de l'algébrisation de la géométrie[172].

La deuxième partie du *Discours de la méthode* apparaît alors comme un résumé des *Règles pour la direction de l'esprit*, et une synthèse à visée générale des travaux menés antérieurement par Descartes, portant au-delà de la seule étude des mathématiques[173]. La

---

[171] Ce faisant, c'est-à-dire usant de l'analogie entre grandeur et longueur, sont ainsi évitées les questions relatives aux nombres (à la construction de **R** en langage contemporain) et aux dimensions des écritures algébriques. Cette dernière question est traitée dès les premières pages de *La Géométrie* : « Il est aussi à remarquer que toutes les parties d'une même ligne, se doivent ordinairement exprimer par autant de dimensions l'une que l'autre, lorsque l'unité n'est point déterminée en la question […] mais que ce n'est pas de même lorsque l'unité est déterminée, à cause qu'elle peut être sousentendue par tout où il y a trop ou trop peu de dimensions […] »

[172] Contribution qui est aussi, à la même époque, celle de Fermat.

[173] Descartes indique, dans la seconde partie du *Discours de la méthode*, que les quatre préceptes qui y sont exposés sont inspirés des réflexions qu'il mena au cours d'un hiver en Allemagne, « enfermé seul dans un poêle », alors qu'il avait vingt-trois ans. C'est donc au cours de l'hiver 1619-1620, (c'est dans la nuit du 11 novembre 1619 qu'il dit avoir eu trois songes consécutifs qui lui révélaient le projet de la méthode), que le travail qui débouchera sur l'ouvrage publié en 1637 est mené, ce qui coïncide avec ses réflexions portant sur la mémoire telle qu'elles apparaissent rapidement dans *les Cogitationes Privatae* de 1619-1621, à propos de Schenckel. Si l'on ne peut rien dire sur le moment de l'écriture des *Règles pour la direction de l'esprit*, elles apparaissent cependant, sur la question de la mémoire comme sur d'autres points, antérieures au *Discours de la méthode* ou, tout au moins, pourra-t-on dire qu'elles en donnent un éclairage qui le fait passer pour postérieur.

question de la mémoire ayant été explicitement posée et résolue dans les *Règles pour la direction de l'esprit*, à l'aide des trois techniques que nous avons précédemment mentionnées (écriture organisée et linéaire, répétition, notations courtes), le *Discours de la méthode* ne se préoccupe plus que de l'exposé… de la méthode précisément, et non, en premier lieu, de la formulation de toutes les questions auxquelles elles répond, notamment celle de la mémoire.

4. 3. 3. 3. Le livre premier de la *Géométrie* comme conséquence des *Règles pour la direction de l'esprit*

La *Géométrie* est un essai publié avec trois autres à la suite du *Discours de la méthode*. Il débute, dans son livre premier, par l'exposé de l'interrelation de l'algèbre et de la géométrie. Alors que l'histoire retient ordinairement que Descartes est un des précurseurs ayant algébrisé la géométrie, c'est au contraire par une géométrisation de l'algèbre que s'ouvre le livre premier ; ce procédé, qui montre la réciprocité de l'une et de l'autre, fait, en quelque sorte, fonction de garantie préalable pour la validité du projet de l'algébrisation. Ainsi, après avoir déclaré qu'« en somme toute l'Arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Division & l'Extraction des racines » (p. 297), Descartes identifie la multiplication et la division à la construction d'une quatrième proportionnelle grâce au théorème de Thalès[174], et l'extraction de la racine carrée à la construction de la hauteur relative à l'hypoténuse dans un triangle rectangle. Les segments construits ainsi fournissent la réponse, car Descartes a pris soin de définir judicieusement l'un de ceux de la figure comme ayant une longueur prise pour unité.
Immédiatement après apparaît l'utilisation des lettres : « Mais souvent on n'a pas besoin de tracer ainsi ces lignes sur le papier, et il suffit de les désigner par quelques lettres, chacune par une seule. » (pp. 298-299).
Le choix d'une unité de longueur permet alors de transformer les grandeurs (des objets géométriques mesurables) en nombres, ce qui résout le problème de leurs dimensions : « Où il est à remarquer que par a^2 ou b^3 ou semblables, je ne conçois ordinairement que des lignes toutes simples […]. Il est aussi à remarquer que toutes les parties d'une même ligne, se doivent ordinairement exprimer par autant de dimensions l'une que l'autre, lorsque l'unité n'est point déterminée en la question […] » (p. 299). Ainsi, ayant choisi une unité, si l'usage des termes carrés ou cubes subsiste, il n'est plus cependant besoin de recourir aux dimensions des objets géométriques (un carré, un cube) que la notation algébrique modélise. C'est donc une économie de pensée qui est réalisée, par l'oubli devenu possible de certaines des propriétés des objets du système modélisé (la géométrie) : ici les dimensions des grandeurs (surface plane occupée par un carré, volume d'espace occupé par un solide cubique). On retrouve en ce point la fonction de modèle assignée aux ostensifs[175]. De même, les opérations

[174] Cette définition du produit de deux segments est reprise par Hilbert (1899) dans sa construction du calcul segmentaire basé sur le théorème de Pascal en III. 3. 6., p. 82.
[175] Récusant la dialectique du signifiant et du signifié qui, utilisée en linguistique, fut transposée à une certaine époque pour caractériser les outils algébriques, Bosch (1994) note : « Or, en mathématiques, la relation entre représentant et représenté peut s'exprimer en termes spécifiques que l'analyse linguistique paraît ignorer mais qui désignent un aspect essentiel de l'activité mathématique : la relation entre représentant et représenté est *une*

sur les grandeurs deviennent facilement exprimables par les symboles des quatre, ou cinq, opérations.
Descartes met ensuite en garde : « Au reste afin de ne pas manquer à se souvenir des noms de ces lignes, il en faut toujours faire un registre séparé, à mesure qu'on les pose ou qu'on les change […] » (p. 300). Et il écrit : « AB ∞ 1, GH ∞ *a*, BD ∞ *b*, &c. », où ∞ désigne =.
Ainsi, il n'aura pas échappé que l'entrée dans la *Géométrie* suit exactement le plan que nous avions dégagé du développement de la règle XVI des *Règles pour la direction de l'esprit* : utiliser des « notations les plus brèves », « nous nous servirons des lettres », « nous ferons l'économie de mots », « nous présenterons les termes de la difficulté sous une forme [si] pure et [si] nue », « faire un sommaire[176], où nous écrirons les termes de la question […] comment on les abstrait et par quelles notations on les désigne».

L'application, au texte de *La Géométrie*, des règles qui succèdent à la règle XVI se poursuit alors quasi-chronologiquement à partir de ce point. Ainsi, la règle XVII énonce-t-elle : « La difficulté proposée doit être directement parcourue, en y faisant abstraction de ce que certains de ses termes sont connus et les autres inconnus, et en examinant par intuition la mutuelle dépendance de chacun d'eux par rapport aux autres, grâce aux vrais raisonnements. » Quant au texte de la *Géométrie*, il se poursuit ainsi : « Puis sans considérer aucune différence entre ces lignes inconnues et connues, on doit parcourir la difficulté selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres […] » (p. 300).

La règle XIX stipule : « […] il faut chercher autant de grandeurs exprimées de deux façons différentes, que nous supposons de termes inconnus comme connus, pour parcourir directement la difficulté : c'est ainsi, en effet, qu'on aura autant de comparaisons entre deux choses égales. » De son côté, le texte de la *Géométrie* continue de la sorte : « […] jusqu'à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons : ce qui se nomme une Équation ; car les termes de l'une de ces deux façons sont égaux à ceux de l'autre. Et on doit trouver autant de telles équations, qu'on a supposé de lignes qui étaient inconnues. » (p. 300)

La règle XXI énonce enfin : « Si l'on a plusieurs équations de cette sorte, il faut les réduire toutes à une seule, c'est-à-dire à celle dont les termes occuperont le moins de degrés dans la série des grandeurs continuellement proportionnelles, selon laquelle les mêmes termes doivent être ordonnés ». Tandis que le texte de la *Géométrie* poursuit : « Après cela s'il en reste encore plusieurs, il se faut servir par ordre de chacune des Équations qui restent aussi […] et faire ainsi en les démêlant, qu'il n'en demeure qu'une seule, égale à quelque autre, qui soit connue, ou bien dont le carré, ou le cube, ou le carré de carré, ou le sursolide, ou le carré de cube, &c. soit égal à ce qui se produit par l'addition, ou la soustraction de deux ou plusieurs quantités […] » (pp. 300-301).

---

relation de modélisation. Le représentant peut être considéré comme *modèle* d'un système que nous nommons "le représenté", comme un *instrument* du travail de modélisation. » p. 3 (traduit par nous).
[176] C'est ce qu'il fait avec son « registre séparé » de la page 300.

Le parallèle est saisissant entre les *Règles pour la direction de l'esprit* et ces lignes qui constituent les prémisses de la *Géométrie*, au point que ce dernier ouvrage, qui ne sera publié avec le *Discours de la méthode* que lors des deux premières éditions, apparaît davantage comme une application scientifique des *Règles pour la direction de l'esprit* que des quatre préceptes du *Discours de la méthode*. Ainsi, la question de la mémoire qui a été résolue dans les développements des dernières règles à partir de la règle XVI, sur les énoncés desquelles s'appuie la base du texte de la *Géométrie*, s'y retrouve, en quelque sorte, « par importation ». Ou plutôt, non pas la question, mais les solutions apportées par Descartes au problème de la nécessité et du manque de fiabilité de la mémoire pour la pratique des mathématiques. Ces solutions forment un système qui constitue l'algébrisation de la géométrie.
Des écarts peuvent exister entre les deux textes, mais ils plaident eux aussi en faveur d'une antériorité des *Règles pour la direction de l'esprit*. Ainsi, certains points de cet ouvrage ne sont parfois pas totalement repris. C'est le cas par exemple pour la règle XVIII, qui énonce qu'on ne doit multiplier ou diviser qu'après avoir ajouté ou soustrait, règle que l'on peut lire comme la nécessité de réduire les sommes algébriques pour pouvoir tirer ensuite la valeur de l'inconnue par division ; mais c'est sans doute parce que cela se fait, sans se dire, que le contenu de la règle n'apparaît plus. Inversement, parfois des raisonnements de la *Géométrie* ne figurent pas dans le texte des *Règles pour la direction de l'esprit*. C'est le cas, par exemple, du raisonnement par analyse et synthèse, qui précède le passage sur les équations et qui est exposé en ces termes : « Ainsi voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait […] ». Ce raisonnement est fructueusement utilisé par Descartes pour proposer une démonstration du théorème de Pappus « en trois, quatre ou cinq lignes », resté non démontré jusqu'alors : « Premièrement, je suppose la chose comme déjà faite et, pour me démêler de la confusion de toutes ces lignes, je considère l'une des données et l'une de celles qu'il faut trouver, par exemple AB et CB, comme les principales […] » (pp. 382-383).

Le théorème de Pappus est énoncé par Descartes, en une page de texte (!), de la manière suivante que nous abrégeons : « Ayant trois, quatre, ou plus grand nombre de lignes droites données par position, premièrement, on demande un point duquel on puisse tirer autant d'autres lignes droites, une sur chacune des données, qui fassent avec elles des angles donnés ; et que le rectangle contenu en deux de celles qui seront ainsi tirées d'un même point, ait la proportion donnée avec le carré de la troisième, s'il n'y en a que trois ; ou bien avec le rectangle des deux autres, s'il y en a quatre. Ou bien, s'il y en a cinq, que le parallélépipède composé de trois ait la proportion donnée avec le parallélépipède composé des deux qui restent, et d'une autre ligne donnée […] », etc.
« Puis, à cause qu'il y a toujours une infinité de divers points qui peuvent satisfaire à ce qui est ici demandé, il est aussi requis de connaître et de tracer la ligne dans laquelle ils doivent se trouver ; et Pappus dit que, lorsqu'il n'y a que trois ou quatre lignes droites données, c'est en une des trois sections coniques […] »[177] C'est ainsi pour trouver un problème de lieu que

[177] De Pappus associé au nom d'un théorème, l'histoire des mathématiques ne retient d'ordinaire que le théorème dit de Pappus-Pascal, cas particulier du théorème de Pascal pour lequel les six points de la conique se trouvent sur deux droites représentant une conique dégénérée (*Atlas des mathématiques* p. 138-139 et *Petite encyclopédie des mathématiques* pp. 602-603).

Descartes utilise la méthode par analyse et synthèse, méthode et type de problèmes qui rencontreront un certain succès ! La démonstration proposée tient en une vingtaine de pages, de la page 380 à la page 402, et bien que nous ayons pu la réduire à deux pages, en abrégeant les explications de Descartes et en utilisant des notations contemporaines, nous nous dispenserons de la donner ici, car elle n'apporte rien, en soi, à la question de la mémoire. On peut noter cependant que transparaît, en filigrane, la définition de l'équation d'une courbe dans un repère, et un changement de repère dans le cas particulier où l'origine du second est un point d'un axe du premier, bien que les notions de repère et d'équation de courbe, ainsi que les formules de changement de repère, ne soient pas explicitement définies, et que ce travail incombe aux successeurs de Descartes.

4. 3. 3. 4. Conclusions didactiques tirées de l'étude de Descartes

Nous ne reviendrons pas ici sur le travail mené par Chevallard et Mercier (1987) dans le chapitre VII de la publication *Sur la formation historique du temps didactique*, mais essaierons de dégager quelques enseignements de la position singulière d'élève et de mathématicien, tenue par Descartes et dont il rend compte, d'une certaine manière, à travers les textes présentés auparavant.

Un premier point mérite d'être souligné et concerne ce que nous avons nommé la mémoire du savoir ; il résulte de la position du Descartes mathématicien pratiquant les mathématiques. Si nous considérons, contrairement à la position platonicienne, que le savoir mathématique est un construit humain, qu'il n'existe donc pas de tout temps, en un lieu dont nous découvrons des régions au fil du développement historique, le savoir, tel qu'il apparaît à la lecture des *Règles pour la direction de l'esprit*, contient une dimension mémorielle « d'essence humaine ». Et ceci, de deux façons : d'une part parce qu'est reconnue la nécessité, pour sa pratique, d'un recours personnel à la mémoire, et d'autre part parce que le savoir, dans sa pratique, incorpore des outils qui contiennent une mémoire et organisent la pratique pour soulager l'effort mémoriel.

Du Descartes autodidacte, peuvent être tirés plusieurs enseignements pour la mémoire pratique et son travail ; autrement dit pour l'étude des mathématiques. En effet, contrairement à la boutade de Leibniz « Je préfère un Leeuwenhoek qui me dit ce qu'il voit à un cartésien qui me dit ce qu'il pense »[178], il est particulièrement intéressant de connaître les règles de comportement pour l'étude que se donne un élève tel Descartes. Tout d'abord il faut remarquer que le Descartes élève se démarque du Descartes épistémologue des mathématiques qu'il est devenu à la fin de son travail d'étude. On sait que pour ce deuxième Descartes, c'est l'organisation du savoir selon ses raisons, et sa progressivité, qui garantissent sa connaissance définitive[179]. Or, cette réorganisation a été menée, pour son propre compte tout d'abord, par le Descartes élève. Aussi faudrait-il plutôt lire le Descartes épistémologue,

[178] Cité par Chevallard et Mercier (1987) qui le tirent de Ashley (1973).
[179] Ces points sont développés dans Chevallard et Mercier (1987).

non pas comme énonçant des principes pour l'enseignement, ni même pour l'étude, mais pour la connaissance construite des mathématiques. En conséquence, il est nécessaire de donner du temps et de l'espace à ceux qui étudient, pour qu'ils réorganisent, pour leur propre compte, et selon les raisons personnelles qui leur sont propres, le savoir qui leur a été préalablement enseigné. « Laisser du temps et de l'espace » est une formule commode qui permet de situer la perspective, mais qui nécessite d'être immédiatement corrigée : quelles sont les dimensions particulières de cet espace-temps ?
C'est le problème de l'enseignant. Quelle direction indiquer aux élèves pour l'étude, et quels dispositifs didactiques mettre en place, afin que les élèves soient guidés vers une nouvelle présentation du savoir à soi-même ? Quels dispositifs permettront que ce travail soit mené par chacun, mais aussi, en suivant l'orientation de Descartes, au profit de tous ; c'est-à-dire qu'il soit communicable et discutable ? Autrement dit, se pose la question des dispositifs pour que le travail personnel de la mémoire pratique soit assuré, et qu'il débouche aussi sur l'expression d'une mémoire ostensive. Il s'agit d'abord d'intégrer dans l'organisation didactique, et en articulation avec la progression didactique, des plages à l'intérieur desquelles, pour ce qui concerne la fonction professorale, l'enseignant qui montre un savoir déjà organisé s'efface, au profit du directeur[180] qui guide l'étude de l'élève dans une partie bien délimitée du savoir. Suivant en cela le principe de la répétition mise en œuvre par l'élève Descartes, il s'agit donc aussi d'intégrer dans la progression didactique, des moments où des savoirs précédemment enseignés seront repris, afin de tenter d'en apprendre quelque chose de nouveau grâce aux outils mathématiques appris entre temps.

Un autre élément à retenir de l'étude menée sur Descartes, lorsqu'on met en rapport les *Règles pour la direction de l'esprit* et la *Géométrie*, concerne les outils qu'il se donne pour, à la fois contenir la mémoire du savoir, et aussi soulager la mémoire de celui qui pratique les mathématiques ; autrement dit les ostensifs.
Deux directions sont à envisager. La première, suivant en cela le Descartes des *Règles pour la direction de l'esprit* qui justifie, à défaut de la créer, l'utilisation de « notations brèves », consiste à encourager celui qui étudie à développer son propre outillage ostensif, afin qu'il fasse, par et pour lui-même, l'expérience sensible du bénéfice qu'on retire d'outils mémoriels commodes pour la pratique des mathématiques. Il est nécessaire alors de ménager, dans la communauté qui étudie, des moments pour l'institutionnalisation des ostensifs généraux qui permettent la communication et la compréhension par tous des textes mathématiques.
La seconde, suivant alors le Descartes de la *Géométrie*, qui crée un savoir mathématique nouveau, à travers l'abord original qu'il propose de la géométrie, ou la démonstration qu'il donne d'une conjecture non encore démontrée, consiste à miser sur la créativité mathématique qui résulte du re-travail permanent mené par celui qui étudie. Nous en avons vu un exemple à travers le cas d'Aurélie, interprété comme une anticipation sur l'avancée du temps didactique. Mais c'est aussi un constat empirique fait souvent auprès des meilleurs élèves, que l'enseignement ordinaire rend alors parfois producteurs de questions nouvelles, à partir du savoir qui a été enseigné, parce qu'ils connaissent les gestes pertinents de l'étude. C'est ce

[180] Celui qui montrait le savoir s'efface alors pour céder la place à celui qui guide et montre la direction vers où l'élève devra par lui-même s'engager, en suivant son propre chemin.

que fait, avec bien sûr une tout autre envergure, le Descartes mathématicien qui, à partir du travail d'étude l'ayant conduit à la production d'ostensifs nouveaux, se pose et trouve la démonstration du théorème de Pappus.

Quelles que soient les directions suivies parmi celles que nous venons de tracer à grands traits, et qui mériteraient des recherches nouvelles en ingénierie didactique, c'est toujours le même fil directeur qui transparaît : donner aux élèves des moyens personnels d'étude les rendant aptes à ouvrir leur avenir à l'irruption du nouveau, en leur donnant une certaine maîtrise de leur passé, c'est-à-dire en leur faisant re-travailler leur mémoire pratique.

5. CINQUIÈME PARTIE

ÉLÉMENTS DE CONCLUSION : DIRIGER LE TRAVAIL DU RAPPORT AU SAVOIR

5. 1. Reprise : La pratique, critère de démarcation entre les théories de la mémoire

Arrivé en ce point, il est nécessaire de se retourner sur le chemin parcouru, et de tirer les enseignements des rencontres et des découvertes qui ont été faites lors de l'accomplissement du parcours. Parmi les différentes voies qui s'offraient à nous au départ, pour penser la mémoire et les mathématiques, une des définitions courantes de la mémoire est celle de Lieury (1986) : « […] capacité de restituer de l'information, contenue dans un message, en l'absence de celui-ci ou de reconnaître cette information parmi d'autres messages. » (p. 8)[181]. Lieury (1986) précise immédiatement que cette définition « décrit la mémoire essentiellement comme une fonction utile dans la communication. », ce qui laisse entendre qu'il peut exister d'autres définitions lorsqu'on change de point de vue.

Nous avons plutôt, et c'est le sens premier de notre positionnement anthropologique, choisi de ranger les mathématiques dans le cadre des pratiques. Ce choix ne signifie pas, bien sûr, que ces pratiques ne puissent se communiquer, puisqu'elles se communiquent et se diffusent dans la société, notamment par l'intermédiaire de l'école. Mais une définition en termes de « communication » atteint rapidement . ses limites. Faute de définir ce que l'on entend par « restituer », elle sous-entend uniquement la restitution sous la forme d'un acte langagier, parlé ou écrit, comme moyens de cette « communication »[182] et, aussi de cette restitution, ce qui élimine d'emblée des phénomènes étudiés les actions habituelles ou les réflexes acquis. C'est dans un tout autre cadre que nous avons dû replacer la question de la mémoire. S'agissant de la pratique des mathématiques, qui comprend leur étude, cette dernière constituant une autre dimension de leur pratique, nous nous sommes situé dans le cadre de l'analyse d'un travail. Ce positionnement rejoint ainsi, la rupture qu'ont dû assumer certains psychologues du travail, pour pouvoir rendre compte du rapport des hommes aux techniques[183].
Mais, si nous avons dû recourir encore aux travaux sur la mémoire collective, c'est le même écueil que nous y avons rencontré : l'abord de la mémoire se fait, chez le sociologue qui

---

[181] Nous nous sommes tout autant éloigné de la définition qu'en donne Florès (1972) : « Le concept de mémoire concerne les relations fonctionnelles existant entre deux groupes de *conduites observables* séparées par un intervalle temporel de durée variable », puisque nous attribuons une mémoire au savoir mathématique en lequel, bien sûr, on ne saurait observer une quelconque conduite !
[182] L'exemple prototypique est, pour cette orientation en terme de communication, « l'apprentissage » sous forme de lecture ou d'écoute puis la restitution, soit par la répétition parlée, soit par la reconnaissance visuelle. Bergson n'y échappe pas qui, pour montrer les deux formes de la mémoire qu'il énonce (les « images-souvenirs » et leur prolongement en action créant dans le corps des dispositions à agir (chap. II de *Matière et mémoire*)), recourt à l'exemple de la leçon apprise par cœur.
[183] Ainsi Rabardel (1995) souligne-t-il, dans un chapitre significativement intitulé *La nécessité d'une refondation de la psychologie pour permettre une véritable contribution à la conception des systèmes techniques* : « Dans les années soixante-dix les psychologues ont appliqué les méthodes de laboratoire avec des succès modestes, dans les années quatre-vingt ils ont appliqué les théories du traitement de l'information avec des résultats faibles. » p. 49.

l'étudie, par l'intermédiaire du récit de mémoire. C'est le cas dans les travaux de Namer (1987), c'est par exemple aussi le cas dans le travail de Muxel (1996) sur la mémoire familiale. Ainsi, la conclusion de son ouvrage, dans laquelle Muxel (1996) propose un modèle de la mémoire familiale en cinq cercles concentriques, est introduite en référence aux « cadres sociaux » d'Halbwachs, à l'intérieur desquels la seule pratique envisagée semble consister en énoncer, raconter, dire des souvenirs :

> « Selon le parcours biographique ou le contexte social dans lequel s'inscrit un individu, les discours de la mémoire familiale ne servent pas les mêmes objectifs ni n'obéissent à un même désir de raconter. La différenciation sociale impose toujours ses marques et la mémoire s'énonce bien dans des "cadres sociaux". »p. 195.

Or, les souvenirs ne sont pas le tout des faits de mémoire, d'autant moins dans notre cas que dire ou raconter des mathématiques ne constitue pas une dimension suffisante pour saisir, ni ce que sont les mathématiques et leur étude, ni les formes selon lesquelles la mémoire va y être mobilisée. Nous avons donc abordé la question de la mémoire en considérant non seulement qu'elle n'était pas seulement discursive, mais aussi qu'elle n'était pas exclusivement une propriété des personnes. L'une de ses dimensions, bien sûr, est individuelle, mais l'individu est considéré alors comme sujet d'une institution à l'intérieur de laquelle s'accomplissent des pratiques, un sujet qui devra mobiliser sa mémoire propre pour s'engager dans les pratiques de l'institution. Une autre dimension est justement relative aux institutions, c'est celle de la pratique, en tant qu'elle s'accomplit grâce à des outils qui, à la fois, contiennent une mémoire, mais aussi qui, par leur usage, influent sur la mémoire des sujets institutionnels. Une troisième semble caractériser les institutions pour l'étude qui, comme toutes les institutions, organisent la mémoire de leurs sujets selon la position qu'ils y occupent mais qui, de plus, la leur donnent à voir dans des gestes d'ostension assumée ou déguisée qui transforment les pratiques démontrées - expliquées - par ces gestes en enseignes du savoir.

5. 1. 1. La mémoire en mathématiques : nos résultats

5. 1. 1. 1. Le savoir contient une mémoire des pratiques qui lui sont relatives

Le travail que nous avons mené nous a conduit à substituer à la « chaîne de raisons », qui seule semble subsister à l'esprit de qui vient de s'adonner ou de prendre connaissance d'un raisonnement mathématique, la primauté de la « chaîne d'actes » volontaires, conscients et revendiqués, que les hommes ont dû accomplir en certaines institutions, à l'échelle de l'histoire plusieurs fois millénaire des savoirs mathématiques, pour pouvoir fonder ces savoirs. Cette chaîne d'actes n'apparaît pas, de prime abord, à qui pratique les mathématiques, parce que sa connaissance comme chaîne d'actes n'est pas nécessaire : de même que le boulanger n'a pas besoin de connaître l'histoire des choix qui ont conduit les hommes à concevoir et fabriquer le four où il cuit, mais qui pourtant, tant par son existence que par les

gestes qu'il conduit à accomplir lorsqu'il s'en sert, porte la mémoire de ces choix cristallisée en une organisation d'outils.
L'incursion que nous avons faite dans l'histoire des mathématiques, nous a permis de retrouver quelques-uns de ces « actes fondateurs » ; ou tout au moins leurs traces par l'intermédiaire de la transcription, réglée par les normes spécifiques et historiques propres à ce style d'écriture, de ce que leurs auteurs en ont bien voulu laisser voir dans les ouvrages qu'ils ont écrits.

C'est donc le grand mérite de la théorisation anthropologique, et notamment du travail mené par Bosch et Chevallard, que d'avoir pu identifier et étudier les instruments qui permettent d'accomplir les pratiques mathématiques, les ostensifs et les non ostensifs associés, les produits de ces actes fondateurs. Ces ostensifs ont été choisis, au cours de l'histoire du savoir. Souvent, le choix a été initié par l'extension de l'usage d'un ostensif à un domaine nouveau et il a amené à l'invention d'un non ostensif qui aide à penser l'usage nouveau. Mais tout aussi souvent le choix a été le produit de la longue évolution des manières de répondre aux besoins de l'accomplissement d'autres pratiques, et il a permis aux mathématiciens d'ouvrir un champ de savoir nouveau, qu'il faudra explorer.

Nous avons vu comment par exemple l'ostensif $\frac{dy}{dx}$ créé par Leibniz, ou bien l'identification aux dérivées et différentielles des coefficients du développement en série de Taylor d'une fonction, qui conduit Lagrange à écrire : $f'(x)=\frac{d \bullet fx}{dx}$ se fondent chacun d'une de ces différentes manières sur un travail volontaire de la mémoire et ont ouvert le champ nouveau de l'analyse ; ostensifs et non-ostensifs sont apparus.

C'est ainsi que les chaînes d'actes producteurs d'ostensifs et de pratiques, décisions fondatrices assumées par leurs auteurs, commandent aux chaînes d'actions que l'usage de ces ostensifs engage, puisque les premières correspondent aux choix faits pour les secondes. Ces dernières commandent enfin, à leur tour, les gestes qui permettent l'accomplissement de la pratique. C'est dans ce sens, et dans ce sens seulement, que l'on peut dire que le savoir mathématique est dépôt de mémoire. L'accomplissement d'un geste mathématique actualise le choix du type d'action, donc de l'acte volontaire et soumis à des raisons, dont le savoir est porteur, et qui commande le geste. Pour autant, ces activations ne supposent pas le souvenir narratif des actes fondateurs et des choix qui les ont produits : c'est même parce que la mémoire est cristallisée dans les systèmes d'objets mathématiques, que les mathématiques peuvent sembler une pratique qui ne nécessite pas de mémoire. Il est encore nécessaire d'affiner le modèle que nous venons de décrire en première approximation, car la chaîne des actes que nous avons évoquée, pour un système d'ostensifs et les non-ostensifs associés , n'est en général pas le fruit du travail d'un unique fondateur. Elle s'inscrit plutôt dans l'histoire des actes d'une communauté, celle des mathématiciens, qui, à travers ses pratiques du savoir, transforme parfois les non-ostensifs associés à un ostensif.

C'est par exemple, comme nous l'avons vu pour Lagrange, le cas du non-ostensif « dérivée ». L'ostensif, sa désignation et une partie des pratiques dans lesquelles il entre, demeurent de nos jours, tandis que les raisons de l'acte fondateur sont oubliées, et que certaines des pratiques qui le constituaient (le développement en série de Taylor) n'apparaissent plus comme une nécessité pour son utilisation présente.

Cet exemple montre le processus par lequel les œuvres mathématiques peuvent demeurer présentes dans la mémoire d'une institution donnée, à travers la perpétuation des pratiques utilisant les outils ostensifs bâtis au fil du développement de l'œuvre, alors que les raisons d'être de l'œuvre ont été oubliées. C'est ainsi qu'historiquement apparaît un phénomène que les mauvais esprits reprochent au système d'enseignement mais qui est l'effet ordinaire de la vie des œuvres humaines que sont les savoirs : l'obsolescence des raisons d'être qui fondent ces œuvres. Les raisons ont historiquement tendance à être oubliées, ou tout au moins passées sous silence, pour que demeurent en évoluant certaines des pratiques qui leur correspondent. Leibniz, malgré le peu de bien qu'il pense de la fonctionnalité de la philosophie cartésienne, reconnaît, parce qu'il le rencontre, un des mérites des outils ostensifs que Descartes a travaillés, en déclarant qu'ils permettent de nous « dispenser de travailler avec l'imagination ». C'est bien ce que Descartes a découvert un demi-siècle plus tôt, et qu'il résume dans les *Règles pour la direction de l'esprit* : le savoir doit être conçu, pour sa pratique, comme incorporant des outils qui, soit contiennent une mémoire, soit s'organisent pour soulager l'effort mémoriel personnel indispensable. C'est ainsi que la création d'ostensifs et leur utilisation, réalisent, pour la pratique des mathématiques, le principe d'économie de l'énergie cognitive mis en évidence par Douglas dans le fonctionnement des institutions.

Ce principe d'économie se retrouve, dans la pratique mathématique « ordinaire » : c'est, à travers ce que nous avons pu observer, l'expérience que font, par exemple, les deux élèves de Terminale S que nous avons observés et qui, à quelques semaines d'intervalles, oublient, au sens propre, la coûteuse technique de résolution d'une équation logarithmique qui leur a été enseignée lorsque le défilement du texte du savoir ne permettait encore de disposer ni de l'ostensif, ni du non-ostensif, par lesquels cette économie pouvait s'obtenir. Dans le cas de la pratique des mathématiques, l'oubli résulte de l'appropriation de nouvelles pratiques, plus économiques. Dans le cas d'un producteur de mathématiques, l'oubli est une condition nécessaire à la création de nouvelles pratiques, des pratiques qui porteront solution à des questions que le mathématicien a la charge de résoudre. La mémoire portée par le savoir mathématique est donc institutionnelle plus que sociale, parce qu'elle est locale, liée à une classe de problèmes et à un type de techniques permettant de les résoudre. Extérieure à l'homme, donc relevant d'une « collectivité culturelle » capable d'animer une œuvre, elle est déposée dans des ouvrages ou des pratiques relatives aux différents régimes du savoir, relatifs à la production, l'utilisation, l'enseignement, et la transposition. Au-delà d'un système d'objets, elle est constituée d'outils et de règles opératoires permettant d'engager les gestes pour la manipulation de l'outil.

Dans le cas des mathématiques enseignées, une dimension particulière vient se surajouter : celle du temps didactique. C'est l'obligation d'avoir à se couler dans cette dimension temporelle particulière qui commande au processus de transposition, dans le cas de la transposition didactique. L'institution didactique, même si elle demeure constituée des mêmes personnes, occupant les mêmes places (celles de professeur et d'élève), aux prises avec des pratiques qui peuvent apparaître comme de même nature, celles des mathématiques, se transforme à l'occasion de l'introduction des objets de savoir nouveaux. La mémoire didactique des mathématiques ne peut être alors qu'une mémoire labile, relative à une dynamique institutionnelle dont le rythme d'évolution est particulièrement rapide : c'est sans doute ce qui produit nombre des effets que nous avons observés chez les élèves. Pour progresser dans l'analyse, nous avons distingué trois mémoires : la mémoire pratique est propriété des personnes et de leurs assujettissements institutionnels ; la mémoire ostensive est produit institutionnel des pratiques collectivement travaillées ; la mémoire du savoir permet de penser leur articulation et de transformer volontairement leurs interrelations.

5. 1. 1. 2. La mémoire pratique

Une pratique suppose un dispositif constitué de moyens matériels. Ce dispositif doit être outillé par des gestes, afin que la pratique puisse se déployer. Il est donc nécessaire que soient mobilisés des moyens personnels, pour l'activation du dispositif. Il faut que la personne qui produit les gestes possède une mémoire pour ces gestes ; c'est-à-dire qu'elle puisse reproduire les gestes de la pratique antérieurement appris. C'est ce que nous avons nommé la mémoire pratique de la personne.
Les psychologues du travail, eux aussi, ont pu identifier, avec le vocabulaire propre à ce champ d'étude, ce processus de pratique outillée que nous venons de décrire. La mémoire pratique apparaît, dans la dominante piagétienne classique propre à la psychologie, sous la forme de *schèmes* personnels considérés comme *instruments psychologiques*. C'est ainsi, par exemple que Rabardel (1995) peut formuler cette problématique de la mémoire pratique, en termes de processus d'instrumentation :

> « Nous faisons l'hypothèse complémentaire que dans les situations où la résolution du problème passe par la mise en œuvre d'artefacts, de tels schèmes familiers constituent la composante schème des instruments dont les artefacts forment l'autre composante. Or, non seulement ces schèmes ont une genèse, mais comme les artefacts, ils peuvent se voir attribuer de nouvelles significations. La genèse des schèmes, l'assimilation de nouveaux artefacts aux schèmes (donnant ainsi une nouvelle signification aux artefacts), l'accommodation des schèmes (contribuant à leurs changements de signification), sont constitutifs de cette seconde dimension de la genèse instrumentale : les processus d'instrumentation. » p. 144.[184]

Nous avons considéré ici la mémoire pratique comme le produit de l'incorporation personnelle de chaînes opératoires traditionnelles, portées par « la collectivité culturelle » (les anthropologues disent ethnique), qui joue le rôle de mémoire externe et de médiateur pour l'apprentissage personnel de cette mémoire externe, conservée par une institution humaine

[184] Le terme d'artefact est utilisé par Rabardel pour se démarquer du terme d'objet technique (p. 11). Pour notre part, nous le considérons dans le passage cité comme pouvant signifier « instrument produit par l'homme ».

comme œuvre humaine : la mémoire du savoir. Il nous semble avoir pu retrouver, dans notre travail, cette dynamique (cette genèse, dit Rabardel) de construction de la mémoire pratique, décrite en termes d'assimilation et d'accommodation par Rabardel. En effet, dans un domaine de réalité à l'intérieur d'une institution didactique, si la pratique qui s'y déploie est outillée par les gestes permis par le savoir qui les commande et qui agit comme mémoire de ces gestes pour régler leur activation, l'accomplissement de la pratique par une personne construit simultanément une mémoire nouvelle de cette pratique pour la personne.
Deux conséquences en résultent : *la dynamique de l'étude peut être portée par le travail de la mémoire pratique*, qui s'appuie alors sur des pratiques anciennes pour pouvoir en accomplir de nouvelles, inédites, et *le savoir mathématique peut être tout à la fois vu comme mémoire extérieure*, issue de choix sociaux antérieurs, qui commandent les gestes accomplis dans l'institution, *et comme mémoire construite à partir d'une pratique qui se développe dans l'institution didactique*. Ce deuxième point peut nous aider à comprendre comment certains, dans une vision platonicienne qui semble spontanée, et qui s'avère efficace pour développer des activités de mathématicien, considèrent les mathématiques comme extérieures à l'homme, relevant de l'ordre des idées transcendantes que l'homme découvre par son travail, puis à dénigrer l'existence de processus de transpositions institutionnelles, et ceci est conséquence de cela lorsque l'on considère que le travail mathématique ne saurait produire autre chose que des mathématiques indépendantes de l'institution en laquelle il s'accomplit, puisque les mathématiques sont universellement vraies, étant partout pratiquées de même façon.

Ceci nous permet de revenir sur la question d'une possible « mémoire sémantique », vue comme la question du sens des pratiques, et de son impact dans les phénomènes de mémoire.
La manipulation des ostensifs en situation, dans une institution, se manifeste par les gestes qui se donnent à voir. Le sens, pour sa part, n'est pas directement montrable, mais le geste d'usage d'un outil (même si ce n'est pas un outil ostensif, qui donne à penser) fait sens pour qui connaît une fonction de cet outil : si quelqu'un a en main un grand couteau à lame large, c'est « pour trancher », et si de l'autre main il tient un manche à gigot, il n'y a plus d'ambiguïté sur son activité que si la scène appartient à un film d'Hitchkock et si l'on n'y voit pas le gigot. Il en va de même avec les outils de la pratique mathématique que sont les ostensifs. Poser en ces termes le thème du sens, c'est donc le considérer comme réponse aux questions de la pratique : pourquoi fait-on cela en ce lieu et à cet instant ? D'abord, les questions engendrées par la pratique et relatives aux moyens de la pratique tels qu'ils font signe et ce qu'ils peuvent montrer dans l'institution : qu'est-ce qui s'accomplit ici et comment cela doit-il s'accomplir ? Et ensuite, les questions relatives aux moyens personnels de l'accomplissement de la pratique : de quoi se souvient-on et qu'a-t-on oublié lorsque l'on fait cela, et de quels autres outils doit-on disposer ?
Cette pratique outillée par des ostensifs engage les dimensions mémorielles que nous avons décrites dans ce travail. Les ostensifs masquent les souvenirs des pratiques antérieures, mises à distance - et l'on ne peut les retrouver qu'en procédant comme nous l'avons fait ici : en sortant de l'institution où se déploie la pratique. Les ostensifs peuvent être mis au service d'une pratique nouvelle, commandée par les anciennes pratiques dans lesquelles il était engagé, qui, cependant, deviennent rapidement invisibles pour l'acteur de la pratique actuelle.

Ainsi, le jeu avec des ostensifs induit simultanément un jeu de mémoire pratique et aussi un jeu avec des souvenirs qui ne peuvent se dire dans le cours même de la pratique alors qu'ils peuvent expliquer et justifier les formes mêmes d'accomplissement de cette pratique : les conditions institutionnelles de résurgence des souvenirs permettent le travail technologique de justification et de légitimation des pratiques (ce que l'on recherche lorsque l'on fait appel au sens de l'activité qui se mène) mais ils ne sont pas, d'ordinaire, directement accessibles dans le temps institutionnel de la pratique. Pire, conserver les souvenirs technologiques qui pourraient être appelés par les ostensifs et commandent leur usage, serait déroger au principe d'économie de l'énergie cognitive, dont on a vu qu'il est considéré comme fondamental par Descartes pour soulager la mémoire personnelle et pouvoir ainsi accomplir un travail mathématique raisonné c'est-à-dire, placé sous le contrôle de ce qu'il appelle l'intuition.

Notre théorie permet de rendre compte des apprentissages de l'usage d'ostensifs sans qu'une dimension technologique leur soit associée, comme de nombreux travaux ont montré que c'était le cas dans l'enseignement par ostension déguisée, actuellement dominant en France (Blanchard-Laville et alii, 1997). Sans doute, ces apprentissages permettent-ils d'accomplir, tout au moins en partie, les tâches proposées par l'institution scolaire. La question du sens tient alors à leur capacité à produire du sens technologique lors de l'extension des usages premiers. Notre théorie permet aussi de rendre compte du peu d'efficacité d'un geste enseignant courant : la demande d'explication. En effet, se souvenir continuellement de éléments technologiques et y revenir systématiquement, constitue sans doute un handicap pour la réalisation d'une tâche ; les oublier comme dimension consciente, au moins temporairement, est une nécessité fonctionnelle pour bénéficier de la mémoire pratique que portent les ostensifs. C'est la conclusion que nous avions tirée de l'étude de l'enseignement embarrassé de l'usage des signes dans les sommes algébriques et du maintien en mémoire d'un sens de la valeur absolue (en termes de distance), qui empêche l'accomplissement de la tâche dans laquelle elle est prise. Parler de mémoire sémantique suppose une permanence du sens, observable pour la même personne dans les différents usages d'un objet, alors précisément qu'elle doit oublier de manière sélective et temporaire selon le type de tâches à accomplir qui lui est proposé, et non se souvenir. Si la table de la salle à manger est « pour manger », comment s'y asseoir pour y écrire ou pour y lire ? Mais, du point de vue de l'observation de phénomènes de compréhension que l'on suppose trop souvent appartenir au monde des activités conscientes, comment sera-t-il possible d'observer la compréhension du problème que pose la réalisation d'une tâche, lorsqu'une personne qui ignore les dimensions technologico-théoriques d'une technique pourra la mettre en œuvre pour accomplir la tâche, alors qu'une autre qui les retient sera de ce fait empêchée de l'accomplir ?
Puisqu'en définitive, il faut que certaines choses soient temporairement oubliées pour que d'autres, qui les recouvrent, puissent être apprises, cela signifie un perpétuel changement de l'univers cognitif et des souvenirs exprimables qui pose à l'observation psychologique des questions délicates.

C'est ce que savent d'expérience, par leur soumission volontaire à l'étude dont ils ont souvent organisé personnellement les modalités, les bons élèves que nous avons interrogés. Ils savent

ainsi que l'oubli, relatif à leur mémoire pratique, est sans conséquence pour la réalisation de la tâche qui mobilisait auparavant un souvenir pratique qu'ils ont perdu ; ils parviennent encore, et par d'autres moyens, à l'accomplir. Cette connaissance est un élément du contrat didactique qui renvoie à l'organisation linéaire du savoir transposé.
Ils savent d'expérience, et par contrat, que le savoir enseigné leur garantit la résolution des problèmes relevant d'un enseignement passé et qui leur sont proposés au sein de l'école. Cette possibilité est, pour ce qui concerne la part du contrat à leur charge, garantie par l'apprentissage, une fois la tâche reconnue. Sachant cela, ces élèves travaillent à transformer par l'étude, régulièrement, leur système mémoriel. Par l'étude renouvelée (qui consiste principalement, disait Bachelard dans *Le rationalisme appliqué*, à « repasser ses cours »), les connaissances actuelles, trouvent autour d'elles les moyens de fabriquer des souvenirs. Si cela ne se produit pas, c'est que les moyens d'étude sont insuffisants, ce qui tombera sous un verdict d'apprentissage insuffisant, à moins que, entre les techniques disponibles alors à cet élève et celles de cet élève, actuellement, il y ait trop de différences. Mais ceci a moins d'importance qu'on pourrait le craindre, puisque le savoir enseigné et son étude « garantissent par contrat » l'accomplissement de ces tâches, même à qui aurait oublié la technique ancienne ; ce qui rend compte de la possibilité de demeurer très longtemps un élève moyen, ne développant jamais d'imagination dans le cadre de la discipline qu'il étudie.

Il y a ainsi une véritable puissance de la manipulation ostensive, une redoutable efficacité, pour qui possède la maîtrise des gestes convenables.
Nous avons pu préciser ce que l'on entend par « stabilité des connaissances ». Il s'agit des souvenirs, relatifs à sa mémoire pratique, que la personne peut mobiliser. Ces souvenirs seront d'autant plus faciles à mobiliser que le coût, certes à l'apprentissage, mais ici surtout à l'emploi sera plus faible. La baisse de ce coût est assurée par certains ostensifs, selon le principe d'économie de l'énergie cognitive et c'est sans doute une des raisons pour lesquelles une technique dont l'efficacité est éprouvée efface le souvenir de techniques plus rustiques, jusqu'au moment où une tâche problématique nouvelle amène l'acteur à une régression technique. Mais nous ne pouvons ici nous appuyer sur des travaux qui nous auraient précédé, parce que la problématique générale que nous avons développée est récente, comme le signale Rabardel :

> « […] ces processus que nous qualifions d'instrumentation, de même que ceux relatifs à l'intrumentalisation, n'ont pas véritablement été étudiés en profondeur. Les genèses instrumentales, les processus d'instrumentation et d'instrumentalisation constituent donc un champ de recherche considérable dont le développement est nécessaire. » p. 145.

L'attribution individuelle et personnelle de la mémoire, qui est traditionnelle de l'approche psychologique de la personne et qui contribue à une définition de l'identité, correspond donc en partie à ce que nous avons défini comme la mémoire pratique. Il s'agit, dans le cas de la mémoire pratique des mathématiques, d'une définition de la dimension didactique de l'identité d'élève, ou de mathématicien (si l'on veut bien nommer ici mathématicien celui qui pratique des mathématiques, sans qu'il soit nécessairement professionnel de leur production). La « totalité » du soi d'une personne devra, dans une approche anthropologique, être envisagée

par le jeu des interrelations entre des mémoires personnelles spécifiques de la multitude d'institutions en lesquelles une personne est assujettie : elle n'est donc pas pour nous un objet d'étude, et nous considérons que la conscience de soi ne suffit pas à la fonder comme question devant être étudiée d'emblée.
L'identité didactique est donc à placer dans le cadre d'une histoire personnelle au sein des institutions didactiques auxquelles une personne a été - entre autres - assujettie, soit sa biographie didactique. Elle nous est accessible par l'étude de la dynamique de ces assujettissements. Sa biographie didactique contient sa mémoire pratique, et nous n'avons jamais accès qu'à des fragments biographiques.
L'étude des « couches » de la mémoire pratique personnelle est une voie d'accès nouvelle à ces fragments. Hors de tout dispositif d'observation, l'étude scolaire courante, parce qu'elle se déroule dans une institution, fournit de nombreuses occasions pour l'expression publique de cette mémoire pratique. Les sujets d'une institution doivent donner à voir à l'institution, pour que l'institution puisse vérifier la bonne adhésion des sujets qui la constituent : les théories de l'évaluation ont décrit le parti que les institutions pouvaient tirer de ce phénomène. Ceci est notamment vrai dans les institutions didactiques dédiées aux savoirs hautement techniques, particulièrement aux mathématiques, où le mouvement didactique, le re-travail de la mémoire pratique investie dans les techniques nouvelles est particulièrement rapide. En chaque temps du mouvement institutionnel, ce sont alors les derniers niveaux travaillés de cette mémoire pratique, propre au sujet en position d'élève, qui vont être engagés et qui vont s'exprimer. Mais la personne en position de professeur a aussi à montrer une certaine mémoire relative au savoir.

5. 1. 1. 3. La mémoire ostensive

Nous avons appelé *mémoire ostensive*, cette mémoire qui est délibérément donnée à voir, de manière revendiquée, et par des moyens appropriés, à ses propres sujets ou à d'autres personnes par une institution ou un individu, quelle que soit sa position dans l'institution. Bien qu'elle obéisse, suivant la position occupée par la personne, à certaines règles institutionnelles (par exemple, le professeur évoquera la mémoire officielle du savoir enseigné, l'élève montrera sa mémoire personnelle et pratique du savoir appris), cette ostension peut être réalisée, comme pour les ostensifs outils du travail mathématique, dans le cadre de divers registres perceptifs : gestuel, discursif - langagier, graphique, scriptural.
Ainsi l'espace et les gestes, des uns et des autres, sont-ils sciemment organisés dans la classe pour que certains événements didactiques puissent se produire « au vu et au su » de tous, ou au contraire à destination d'un seul, et à l'abri du regard des autres (par exemple par la remise de la copie personnelle au professeur, et sa restitution après correction et évaluation). Lorsqu'ils sont ou ne sont plus accomplis en direction de tous dans l'institution, ces gestes, qui donnent à voir la mémoire, permettent que soient emmagasinés, oubliés ou rappelés certains souvenirs. On peut dans ce cas qualifier cette mémoire de « mémoire didactique ostensive de la classe », parce qu'elle s'appuie sur des événements relatifs au savoir enseigné

qui ont été publiquement, et intentionnellement pour une grande partie d'entre eux, donnés à voir (ou à entendre, manipuler, etc.), et sur certains que l'on ne montre plus.

Pour qu'un enseignement puisse être assuré, il est nécessaire de ménager des phases d'institutionnalisation qui indiquent une homogénéisation des pratiques personnelles antérieures, puisque est montrée la pratique désormais attendue dans l'institution. À travers cette standardisation des pratiques, c'est une reconstruction du passé, donc un travail de mémoire à travers les pratiques qu'il contient, qui est engagé à un double niveau : public, en ce qui concerne la mémoire didactique ostensive de l'institution, et privé en touchant à la mémoire pratique personnelle, travail qui se poursuivra dans ce dernier cas par l'étude, afin d'atteindre à nouveau à une compatibilité de ces deux types de mémoire.
Mais cette homogénéisation peut aussi être réalisée dans la pratique courante de l'enseignement par ostension, afin de construire un milieu pour l'enseignement d'un savoir. Il s'agit alors, pour le professeur, de montrer les savoirs ou les savoir-faire que les élèves doivent connaître afin qu'il puisse s'engager dans l'enseignement d'un objet nouveau. Ce faisant, ce n'est pas un milieu a-didactique d'action, au sens de la théorie des situations didactiques, qui est créé. Nous assistons plutôt à la production d'un ensemble de souvenirs relatifs à des notions jugées par le professeur communes à un nombre suffisant d'élèves, afin que le cours délivré ne puisse être vu comme un monologue duquel les élèves sont exclus. Cette manière de faire réalise la nécessité de montrer, au sein de l'institution, que l'intention d'enseigner rencontre aussi l'intention d'apprendre, condition nécessaire à la pérennisation de la relation didactique. Mais surtout, tant dans l'institutionnalisation que dans l'ostension, c'est le principe de cohérence institutionnelle qui est en jeu ; dans l'institutionnalisation, pour montrer que tous doivent désormais se comporter envers le savoir de la manière conforme aux usages institutionnels, et dans l'enseignement par ostension, afin de créer une convivialité didactique officielle qui est censée élargir le topos de chaque élève en attribuant à chacun ce qui est une propriété déclarée de l'institution, fiction rendue crédible par le spectacle d'un débat sur l'objet montré : le cours comme exposé d'une démonstration.

La dialectique didactique de l'ancien et du nouveau passe alors par le jeu avec la mémoire ostensive qui entretient, à son tour, un rapport dialectique avec le milieu pour l'enseignement. Si le rappel ostensif permet d'établir ce milieu, c'est aussi ce milieu, évoqué plus que construit à un instant donné, qui détermine un contenu de mémoire ostensive duquel va pouvoir émerger, ou être montré, l'objet nouveau dont l'enseignement est visé. Sans doute, ce milieu peut-il provoquer une nouvelle organisation de la mémoire personnelle d'un élève, lorsque l'un d'eux élève s'en empare pour son propre compte : et il devient alors milieu a-didactique d'action, lui permettant d'apprendre. Puisqu'il est créé par l'enseignant à partir d'une sélection des objets qui s'y trouvent, il y a nécessité, pour qui veut montrer qu'il adhère à ce milieu en accomplissant une pratique qui porte sur les objets du milieu, de renvoyer dans le domaine privé (ce qui ne se montre pas) les rapports personnels antérieurs non conformes aux rapports officiels attendus désormais dans le milieu montré. Le milieu pour l'enseignement est donc fait, pourrions-nous dire, des objets qui ont officiellement été appelés et des mémoires pratiques correspondantes. Son caractère labile, relatif aux différents objets d'enseignement et aux pratiques correspondantes, induit donc des phénomènes de rappel ou d'oubli personnels, pour la mémoire pratique des élèves qui entrent dans des activités engagées à l'aide des objets qu'il contient : les phénomènes dits « de contrat didactique » étudiés par de nombreux chercheurs en didactique depuis les années 80 sont de cette espèce (Schubauer-Leoni & Ntamakiliro, 1994).

Sous cet angle, la mémoire apparaît, une fois de plus, comme un processus cognitif, mais c'est un processus pris en charge, pour partie, par l'institution. Mise en œuvre pour la construction d'un milieu, la mémoire ostensive, en retour, est constamment reconstruite à partir des rapports aux arrangements inédits des objets pris dans la construction du milieu. Ce deuxième type de mémoire, qui définirait les comportements institutionnellement conformes, transmis et attendus à un moment donné du temps didactique, se rapproche du sens couramment attribué à la mémoire collective. Nous y retrouvons cependant cette dimension pratique qui organisait un clivage par rapport aux approches traditionnelles de la mémoire, dans le sens où les souvenirs nécessitent d'être instrumentés pour être travaillés afin d'en construire de nouveaux.

La mémoire pratique de la personne est donc temporairement asservie, pour qui veut bien adhérer au contrat d'ostension, par cette mémoire ostensive qui, dans sa dimension institutionnelle, organise un milieu pour les objets nouveaux d'enseignement. Observé du point de vue de l'institution didactique, l'élève est alors comme interdit d'anticipation, relativement aux organisations mathématiques à venir, ou aux outils possibles de l'activité mathématique : les ostensifs (dans leur nouveauté ou dans l'extension de leur usage), les pratiques en lesquelles ils sont pris, leur extension à d'autres champs. Cette interdiction d'anticipation met les élèves en position d'attente du savoir qui sera enseigné, et donc d'attente envers la personne chargée de le faire advenir : le professeur. On se souvient que c'est ce phénomène qui motive l'étude de Sensevy (1994) sur le temps institutionnel de l'étude. Cette position d'attente est un élément constitutif du contrat didactique, et c'est en ce sens qu'elle est nécessaire au « bon » fonctionnement de la relation didactique. Mais l'interdit sur l'anticipation apparaît parfois comme une fiction institutionnelle, dans la mesure où nous avons montré qu'il existe certains élèves qui, d'une certaine manière, par la pratique personnelle du savoir, se posent à l'avance des questions auxquelles le savoir à venir répond, et que c'est à cela même qu'on peut les reconnaître comme de bons élèves sinon comme de bons sujets. L'institution est de ce fait en partie flouée par l'engagement personnel des élèves dans l'étude : ainsi, de même que les écoles sont dépassées par les élèves qui étudient directement la matière que le professeur expose à distance, car le plus souvent ces élèves ne se montrent pas comme de « bons sujets », de même les églises sont-elles dépassées par leurs saints, qui les questionnent sur leur gestion bureaucratique de l'appel à la conversion. L'étude réalise un travail personnel de la mémoire pratique, réorganisant les souvenirs institutionnellement montrés en des configurations inédites, privées, parfois même à l'écart du droit de regard institutionnel. C'est à l'occasion de ce travail de la mémoire pratique, qui porte sur les ostensifs et les praxèmes, qu'est offerte aux élèves la possibilité d'une créativité mathématique pouvant conduire à une anticipation des objets du temps didactique à venir.

5. 1. 2. Personnes, institutions, mémoire et cognition

Le travail que nous avons mené prend place dans l'étude du cognitif, d'un point de vue anthropologique. Le traitement de la dimension cognitive de l'activité mathématique était abordé, dans la théorie anthropologique du didactique proposée par Chevallard (1989), grâce au concept de *rapport aux objets*. Ce rapport se décline essentiellement selon trois catégories : les rapports institutionnel, officiel et personnel. Ces trois catégories sont définies dans les termes suivants :

> « Le rapport institutionnel " énonce", en gros, ce qui se fait dans I avec O^S, comment O^S est mis en jeu ; ou encore, en termes plus imagés, ce qu'est le " destin" de O^S dans I. […] Le rapport institutionnel $R_I(O^S)$ est ce qui apparaît quand on observe le destin de O^S dans l'institution I vue comme une totalité (comme un système) : on dira qu'il s'agit du rapport systémique à l'objet O^S.
> […] Lorsque l'objet à enseigner O^S est mis en jeu, sur le fond du contrat didactique existant, c'est-à-dire sur la base des objets et des rapports institutionnels ayant antérieurement émergé, un rapport institutionnel à cet objet va se créer que nous appellerons, durant toute la période où l'objet est enjeu didactique, le rapport *officiel* à O^S.
> […] Un individu X ne peut avoir, à un objet de savoir donné, O^S, qu'un *rapport personnel*, lequel est un *émergent* d'un système de *relations institutionnelles* (telle la relation *didactique*), relations *ternaires* où l'individu X entre avec l'objet de savoir O^S et un ou des agents de l'institution I. »

Dans le modèle de la mémoire en trois parties que nous proposons, nous retrouvons ces trois dimensions du rapport d'un sujet à un objet par lesquelles il est possible d'analyser la connaissance de cet objet. La mémoire du savoir est celle du rapport institutionnel, qui définit ce que l'on peut faire avec le savoir dans l'institution qui l'a vu naître : c'est d'abord l'institution de production en laquelle le savoir continue de porter les traces de sa naissance, sinon celles de sa gestation ; ce sont ensuite les institutions didactiques, en lesquelles il est transposé, et où une genèse artificielle prédit un rapport institutionnel qui se réalise parfois dans des formes absolument imprévues. La mémoire ostensive du savoir est celle du rapport officiel, qui se montre durant le temps de l'étude ; ce rapport est clivé selon les places institutionnelles (professeur et élève) et il exprime ce qui doit se faire avec le savoir au point où a mené son étude dans l'institution didactique, du point de vue de l'agent qui le montre. Enfin la mémoire pratique est celle du rapport personnel, celle que la personne mobilise dans son activité mathématique.

Le concept de mémoire apporte une dimension supplémentaire au concept de rapport au savoir, parce qu'il l'inscrit dans une temporalité, donc dans l'histoire de sa constitution et dans la biographie de sa construction. La statique du rapport permettait de montrer son existence et de le définir, ce qui n'est pas rien ; la mémoire ajoute une dimension dynamique à la description en intégrant tout à la fois sa naissance, son patrimoine génétique en quelque sorte, et ce que son histoire en a fait, ce qu'il a conservé ou perdu, donc son développement et sa construction. Elle situe donc respectivement le cognitif (la pensée), son objet (le savoir), et son sujet (l'homme qui apprend par la pratique du savoir), dans un processus. Notre connaissance de cette mémoire des objets de la pratique du savoir, peut permettre de mieux appréhender les processus didactiques en œuvre, tant du point de vue de la mémoire de ces processus telle qu'elle se dit, que du point de vue de leur mémoire dont la pratique s'est imprimée dans les personnes qui étudient. Elle permet donc d'imaginer des dispositifs didactiques capables d'assurer certaines évolutions du rapport personnel au savoir, c'est-à-dire l'apprentissage.

5. 2. La mémoire dans l'étude des mathématiques : quelques développements

5. 2. 1. Un espace personnel pour la créativité par l'extension de la pratique des ostensifs

La présence d'un milieu apparaît, comme on l'a vu, en plusieurs moments des processus didactiques : sous la responsabilité de l'enseignant lors des phases de sa création ostensive pour l'enseignement, sous la responsabilité personnelle de l'élève lorsqu'il se livre à l'étude des notions enseignées et à la résolution de problèmes.

Quelques conséquences peuvent alors être tirées sur les rapports entre mémoires pratique et ostensive. Le milieu est nécessaire pour la mise en œuvre des pratiques d'étude des mathématiques telles, par exemple, celles relatives à la résolution de problème. Le travail d'étude présente une double face dans une institution didactique dont une partie du fonctionnement repose sur l'ostension ou, comme c'est le cas fréquemment désormais, sous le régime de l'ostension déguisée par la mise des élèves « en activité », et qui place l'étude sous une forme montrée comme coopérative. Une des faces est spécifique à la personne et reste privée, et l'autre va être donnée à voir par la personne pour constituer ainsi un des éléments de l'activité sociale produite collectivement dans l'institution. Cette deuxième forme, qui réalise une communication de certains résultats personnels obtenus par le travail de la mémoire pratique, ou certains rapports personnels, concerne la partie relative aux objets de la pratique pour le groupe.
Ces rapports montrés par les élèves, sélectionnés et repris par le professeur, parfois sous d'autres formes, vont constituer une mémoire collective, officielle et didactique telle qu'elle va exister pour la classe à un moment donné. C'est donc à eux que l'on pourra faire de nouveau appel pour constituer un nouveau milieu. Mais, pour autant, dès qu'il y a publicité par communication publique d'un milieu ou d'un fragment de milieu, dès que la mémoire du savoir se parle ou se montre, et ceci quelle que soit la position institutionnelle du sujet, c'est une mémoire ostensive qui s'exprime.

Les deux types de mémoire, pratique et ostensive, entretiennent donc des rapports dialectiques : la gestion par l'élève de cette dialectique définit sa mémoire personnelle, équilibre entre le milieu tel qu'il existe au niveau de la classe à un moment donné, milieu institutionnel donc, et le milieu personnel. Il en résulte qu'il n'est pas toujours nécessaire que l'élève adhère totalement au milieu construit par l'enseignant pour la classe en utilisant la mémoire ostensive si, en biaisant parfois avec l'institution, celui qu'il a construit pour lui-même est suffisant pour l'étude de l'objet mathématique considéré. Ceci peut se produire chaque fois que la situation laisse « un certain jeu » : c'est-à-dire lorsque les personnes (ici les élèves) ont la possibilité de jouer avec l'institution[185]. De ces situations différentes qui laissent du jeu, vont naître, dans la mesure où certains élèves vont l'exploiter, des histoires didactiques personnelles différenciées, puisque relatives à la constitution de milieux différents, débouchant sur des pratiques mathématiques sensiblement différentes et donc des mémoires pratiques personnelles différentes.

Nous avons pu observer des mobilisations indues, au regard d'une institution, de la mémoire pratique des élèves : c'étaient les cas des élèves qui semblaient anticiper sur l'enseignement du théorème de Thalès, des deux élèves qui ne se souvenaient plus de la coûteuse technique de résolution d'équations logarithmiques et, dans une certaine mesure, le cas d'Aurélie. Ce constat a été l'occasion d'élaborer un modèle de la mobilisation en situation de certaines couches de la mémoire pratique.

Nous avons alors montré, sur l'exemple du théorème de Thalès, que l'activation de certaines de ces couches s'opère à partir d'une interprétation de signes débouchant sur une dialectique entre les deux termes du couple (adhésion au contrat didactique ; écologie du savoir transposé). Celle-ci peut être regardée comme un ensemble de chemins qui peuvent être empruntés par des pratiques personnelles à l'intérieur de cet écosystème. Le travail antérieur d'étude qui a permis la construction de couches de mémoire pratique va, au moment de l'engagement de l'élève dans la tâche, donc au moment de l'interprétation personnelle des signes dans la mesure où elle est possible, conduire la personne à s'engager dans certains de ces chemins. En effet, contrairement aux institutions pour la production du savoir, l'engagement des élèves dans une tâche, parce qu'il est sollicité par l'institution didactique, signifie qu'il existe au moins une possibilité technique de la mener à bien grâce au savoir précédemment enseigné. L'interprétation du signe, qui le rend indice ou indication, n'est donc réalisée que sous la contrainte de signification donnée par le contrat didactique.

Se dessine ainsi la voie empruntée par la mémoire pratique en position d'élève. Car cette interprétation interagit à son tour sur une dialectique constituée des interrelations de la tâche et des organisations d'ostensifs qui s'intègrent dans des techniques potentielles permettant de réaliser la tâche.

Les éléments d'histoire des mathématiques que nous avons examinés, par exemple l'étude de la notation différentielle chez Leibniz, ont montré que la recherche de la résolution de problèmes conduit parfois à la création de nouveaux outils, donc à de nouveaux ostensifs, puisque les outils dont on disposait antérieurement n'avaient pas permis cette résolution. Puis, ces nouveaux ostensifs créés, l'étude de leur usage peut déboucher sur de nouveaux problèmes, autonomes des problèmes originels pour lesquels ils furent créés ; par exemple avec l'identification de la dérivée au rapport des différentielles chez Lagrange. Il se peut aussi que l'extension de la pratique crée la pratique nouvelle, sans qu'il soit besoin pour cela de créer de nouveaux ostensifs. C'est le cas, par exemple, de l'extension par Newton des algorithmes de calcul sur des nombres à des expressions algébriques (expressions algébriques

[185] Le terme de jeu est pris ici dans le sens donné par Crozier et Friedberg (1977) : « Le jeu concilie la liberté et la contrainte. Le joueur reste libre, mais doit, s'il veut gagner, adopter une stratégie rationnelle en fonction de la nature du jeu et respecter les règles de celui-ci. […] S'il s'agit d'un jeu de coopération, comme c'est toujours le cas dans une organisation, le produit du jeu sera le résultat commun recherché par l'organisation. » p. 97.

qui peuvent aussi être vues, à leur tour, comme algorithmes de calculs sur des nombres). Dans ce cas, l'extension de la pratique crée la pratique nouvelle, sans qu'il soit nécessaire de créer de nouveaux ostensifs.
Il existe donc pour certains ostensifs une extension possible de leur usage. Elle peut se révéler fructueuse, même si aujourd'hui cette utilisation peut être vue comme indue : c'est le cas par exemple de l'utilisation d'infiniment petits et d'infiniment grands chez Euler, considérés parfois comme des nombres, parfois comme des équivalents, selon les nécessités de calcul. Elle peut produire parfois des résultats faux : c'est le cas de Lagrange qui veut fonder le calcul différentiel sur les développements en série de Taylor des fonctions.
Cette extension est le fruit d'une certaine créativité mathématique : celle qui est relative au prolongement de l'usage, moyennant ou non quelques adaptations des règles d'utilisation. Elle conduit, par la pratique de cette extension, à une deuxième créativité, ou plutôt à une création : la production d'un savoir mathématique nouveau. Le recours à l'extension des usages des ostensifs, par une mise à distance des problèmes qui leur ont donné naissance, permet l'engagement dans des calculs dont vont déboucher des résultats nouveaux. La pratique des ostensifs, conditionnée par un certain oubli des problèmes et des problématiques, par exemple géométriques, desquels ils sont issus, les autonomise par rapport à ces problèmes. Advient alors ce que certains pourraient voir comme une perte du sens, mais qui est en fait une caractéristique de l'utilisation d'outils, et qui a pu être identifié par Rabardel comme relevant de « la transparence des artefacts »[186]. Une autre fonction des ostensifs est mise en évidence par Descartes : parce qu'ils contiennent une certaine mémoire du savoir, ils soulagent la mémoire de leur utilisateur.

Les observations de l'utilisation des ostensifs par les élèves, et celles faites sur des fragments d'histoire de la production du savoir mathématique, se rejoignent en ce point pour laisser entrevoir une direction possible pour l'enseignement et l'étude de certains savoirs mathématiques. Il y a ainsi des éléments communs à une généralité de la pratique du calcul mathématique, que l'on retrouve aussi bien chez les mathématiciens que chez les élèves. Il s'agit alors d'encourager, chez les élèves, l'utilisation contrôlée d'outillage ostensif, propre au savoir mathématique ou créé par eux-mêmes, afin qu'ils fassent l'expérience du bénéfice de ces outils mémoriels pour une pratique qui est alors mathématique. Car les ostensifs permettent, par la mémoire qu'ils contiennent à travers les manipulations réglées qu'ils autorisent, d'accéder à la mémoire pratique universelle des objets et des rapports aux objets qui constitue le savoir mathématique ; ils forment donc une dimension du savoir, identifiée par Bosch (1994), qui permet de fonder, selon les situations et le champ mathématique, des situations d'enseignement nouvelles.
Ce travail des ostensifs dans des situations construites pour l'enseignement d'un savoir nouveau, peut conduire à une « créativité mathématique » personnelle des élèves sur laquelle le travail du professeur s'appuiera afin de la faire déboucher sur le savoir dont l'enseignement est un objectif. En effet, les gestes accomplis dans un milieu a-didactique d'action, commandés par des ostensifs, peuvent alors faire émerger pour la personne l'objet de savoir visé. C'était l'expérience faite de manière privée par Aurélie qui, par la pratique des ostensifs

[186] Rabardel (1995), op. cit., pp. 183-193.

relatifs au logarithme, parvenait à la nécessité de l'exponentielle. Si cette expérience ne permettait pas de recouvrir, pour son cas personnel, tout l'enseignement à venir sur l'exponentielle, elle réalisait cependant pour cette élève une avancée considérable dans l'apprentissage, avancée que nous avions pu mesurer par rapport à ces trois autres camarades qui ne comprenaient pas le sens, à travers sa finalité, du cours qui leur était enseigné.
Un enseignement basé sur la découverte et la pratique des ostensifs suppose, dans sa conception, que soient aussi prévus, à côté des moments pour l'utilisation personnelle de ces outils, des moments d'institutionnalisation des ostensifs qui permettent la pratique commune des mathématiques. Suivant le principe de la répétition mentionné par Descartes, il semble aussi possible d'envisager d'intégrer, dans la progression didactique, des moments où des savoirs précédemment enseignés seront repris, afin de tenter d'en apprendre quelque chose de nouveau grâce aux outils mathématiques appris entre temps.

Emprunter ces voies en les faisant vivre dans des classes suppose une ingénierie didactique bâtie à partir d'un solide travail d'analyse *a priori* du savoir à enseigner, en ce qui concerne son organisation mathématique. Il faut en effet connaître l'espace des manipulations ostensives possibles *a priori*. On peut aussi prévoir que, si elles se produisent, les créations de manipulations ostensives, inédites pour les élèves tout au moins, vont les engager dans un travail de nature technologico-théorique puisqu'il sera nécessaire de contrôler leur autorisation afin d'en valider leur usage par la communauté d'étude. Ce travail d'analyse *a priori* doit aussi porter sur l'organisation didactique, puisqu'il est nécessaire d'anticiper les moments d'étude par lesquels la situation a-didactique dévolue a des chances de faire passer les élèves. Il est par ailleurs nécessaire que le travail d'étude en classe soit mené par chacun, mais aussi, qu'il soit visible et profite à tous ; ce qui correspond à un travail personnel de la mémoire pratique qui doit se traduire en une mémoire ostensive.
L'accomplissement de ce travail ouvre ainsi la voie à l'étude des dimensions technologico-théoriques des organisations didactiques. Alors que l'observation d'une situation ordinaire, ne nous donne accès qu'à certains types de tâches didactiques, dont la technique idiosyncrasique échappe, le plus souvent, à la conscience de la personne qui la met en œuvre et dont les dimensions technologico-théoriques, si tant est qu'elles existent, relèvent de l'idéologie personnelle de l'enseignant et nous sont alors difficilement accessibles.
Cela suppose enfin, de la part de l'enseignant, l'acceptation de la perte momentanée du contrôle de la situation et de son évolution, donc du temps didactique, contrôle que lui assurait dans une large mesure l'enseignement par l'ostension déguisée. Il s'agit donc de donner aux élèves des moyens personnels d'étude les rendant aptes à ouvrir leur avenir à l'irruption du nouveau, en leur donnant une certaine maîtrise de leur passé, c'est-à-dire en leur faisant re-travailler leur mémoire pratique, travail mené collectivement, sous la direction de l'enseignant. Cette dimension collective du travail d'étude présente de nombreux avantages. Tout d'abord, est montrée à tous la nécessité d'un travail personnel d'étude en même temps qu'en est fourni un cadre social, alors que d'ordinaire ce travail, relevant du domaine privé, est accompli avec des moyens individuels. Par ailleurs, ce travail devant se montrer, il doit être formalisé, ce qui enclenche de nouveau un travail de la mémoire pratique vers la mémoire ostensive. Enfin, ce travail est socialement contrôlé par le groupe, ce qui évite à la personne

de persister dans un travail d'étude qui conduit à des impasses, et invite à l'évaluation de ce travail et des résultats auxquels il aboutit ; c'est donc une dimension réflexive supplémentaire qui est prise en compte dans cette forme de travail d'étude.

5. 2. 2. Un exemple de dispositif didactique permettant le travail de la mémoire pratique à partir du travail des ostensifs

Nous montrons dans ce qui suit des extraits d'une expérience menée par une équipe dirigée par A. Mercier dans le cadre d'un travail conjoint ENFA, IUFM d'Aix-Marseille et de Toulouse, INRP, et dont le dépouillement, donc l'analyse des résultats, est en cours. Il s'agit d'un enseignement des systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues dans des classes de 3^e^, réalisé au cours de six séquences par un professeur (bénévole) de collège. Ces séquences sont organisées en trois « tableaux » pensés pour permettre l'écriture des formules, leur observation, la résolution des équations et l'établissement des méthodes générales de résolution. Chaque tableau est fait d'une classe de problèmes dont la résolution passe par une modélisation à l'aide d'un système d'équations. Des groupes de quatre à cinq élèves sont constitués dans la classe. Après une phase de dix à quinze minutes de recherche individuelle des problèmes du tableau, le travail est ensuite mené dans chaque groupe, afin de réaliser en commun un transparent qui sera montré à la classe pour qu'elle en débatte, lors d'une phase d'exposé des travaux des groupes. Les séances sont filmées et elles sont précédées et suivies d'entretiens enregistrés avec le professeur de la classe. Les feuilles de travail des élèves et les transparents sont photocopiés et conservés. Nous montrons quelques extraits des productions auxquelles nous avons eu accès.

Pour le premier tableau, les intentions didactiques des concepteurs de l'expérience sont énoncées, en direction du professeur de la classe, de la manière suivante :

> « Ainsi, **au premier tableau**, les élèves ont progressivement appris à *écrire des formules* qui expriment les calculs correspondant à la situation, puis ils ont cherché comment réaliser une égalité qui vérifie la solution. Les formules expriment les relations entre les grandeurs dont parle l'énoncé du problème, que l'on appelle *des variables*. L'ensemble des formules correspondant à un problème propose des égalités entre grandeurs ; ces égalités doivent être vérifiées par toute solution : c'est *un modèle de la situation* que l'énoncé expose. Les élèves ont progressivement compris que chacun des quatre problèmes du premier tableau relie chaque fois *deux variables*. Cela produit un phénomène nouveau : *la solution d'un de ces problèmes vérifie deux formules à la fois*. »

De ce premier tableau, nous extrayons le deuxième problème :

> *Deuxième problème* : Un grand hôtel dispose de 50 chambres et peut recevoir 83 personnes. Il y a des chambres pour une personne et des chambres pour deux personnes. De combien de chambres pour une personne et de combien de chambres pour deux personnes dispose cet hôtel ?

La production ostensive est très diverse dans l'échantillon de transparents de groupe dont nous disposons. Elle peut parfois se limiter à une écriture langagière qui expose le travail mené dans le groupe. C'est le cas du groupe 2 qui rédige un transparent, pour ce problème, de la manière suivante :

Deuxième problème.
Pour trouver le résultat, nous avons encore effectué une soustraction. Nous avons soustrait le nombre de personnes au nombre de chambres. Donc 83-50 est égal à 33. Alors il y a 33 chambres de 2 lits et 17 chambres à 1 lit. »

Le groupe 3 est plus laconique et sa solution, dans sa rédaction, réalise une économie substantielle par rapport à celle du groupe 2. La référence à la nature des choses (chambre ou lit) à laquelle se rapportent les nombres n'est plus mentionnée, et les symboles - et = remplacent la rédaction en français du groupe 2. Elle est la suivante :

2ème problème
83-50=33
Donc il y [a]33 chambres de 2 lits.
50-33=17
Donc il y [*de nouveau manque le a*] 17 chambres de 1 lit.

La rédaction du groupe 6 introduit, quant à elle, des ostensifs (encadrements, flèches, disposition des calculs) qui lui sont spécifiques :

Problème n°2
Il y a 50 chambres et 83 personnes.
Pour 80 personnes et toujours 50 ch.

	$\boxed{30}$	chambres à 2 lits →30×2=	$\boxed{60}$
+	$\boxed{+20}$	chambres à 1 lit →20×1=	$\boxed{+\ 20}$
	↓		=
	50		80
			+3
30+3=33		(33×2)+17= ⟶	83
20-3=$^{+}$17			
50			

Il est nécessaire de rappeler que dans ce premier tableau, les élèves n'en sont encore qu'à l'exploration d'une solution. C'est donc « par tâtonnement » qu'ils parviennent à trouver les nombres du résultat. Il est remarquable de noter que, dans l'écriture de la solution du groupe 6, les ostensifs accompagnent et commandent cette recherche, « par tâtonnement », de la solution. Ainsi, après avoir ramené le problème à 80 personnes (les 3 qui restent pouvant être réparties, soit en utilisant une chambre à 2 lits et une chambre à 1 lit, soit trois chambres à 1 lit), les nombres encadrés représentent respectivement une décomposition des 50 chambres en 30 et 20 qui permet de décomposer à son tour les 80 personnes utilisées dans cette première étape. La correspondance est indiquée par les « petites » flèches qui indiquent qu'à la décomposition 30+20 peut être associée une décomposition 60+20. Reste le problème des 3 personnes. Par un heureux hasard dû aux donnés du problème, l'erreur commise dans le raisonnement qui suit va cependant conduire à la solution. En effet, ce nombre de personnes (3) se transmute en nombre de chambres soustrait et ajouté au nombre de chambres de chacun des types (ce qui ne modifie pas leur somme, mais change la répartition des personnes qui ne correspond alors plus à la correspondance du deuxième encadré), tandis qu'il est ajouté aux 80 personnes pour arriver aux 83 à répartir. On obtient alors 33 chambres à 2 lits et 17 à 1 lit, ce qui est effectivement la solution du problème, obtenue de manière chanceuse (puisque les 3 chambres ajoutées correspondent à 6 personnes ajoutées et les 3 chambres retirées à 3 personnes soustraites, donc à une somme algébrique égale aux 3 personnes à rajouter à 80). La vérification est notée et correspond, à l'aide de l'ostensif « flèche », aux 83 personnes. La manipulation ostensive s'accompagne donc ici d'une erreur, mais elle économise, et masque, toute la description du raisonnement que nous venons d'exposer. On peut raisonnablement imaginer que, pour parvenir à faire accepter et noter cette écriture dans le groupe, il a sans doute fallu discuter, argumenter, montrer et expliciter ce raisonnement. On retrouve alors ici cette propriété des ostensifs de conserver la mémoire du débat ou du raisonnement, et dont nous pouvons, à travers cette rédaction, retrouver quelques éléments.

Lors du deuxième tableau, après avoir vu que ces problèmes peuvent être modélisés par des systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues, les élèves sont invités à revenir sur les problèmes du premier tableau afin de réaliser cette modélisation et de les résoudre. C'est ce qu'indique le document remis au professeur dont nous reproduisons un extrait :

> « **Au deuxième tableau**, armés des formules, les élèves peuvent maintenant reprendre chacun des problèmes du premier tableau : les manières de le chercher qu'ils ont inventées peuvent les aider à imaginer des raisonnements intéressants fondés sur l'observation de leurs formules. Ces raisonnements formalisent ces calculs, et les élèves savent vérifier leurs calculs puisqu'ils connaissent les valeurs des variables qui sont les solutions du problème. »

Le troisième problème du premier tableau était le suivant :

> *Troisième problème* : Dans un refuge de montagne, il n'y a que des chambres à deux lits et des chambres à 4 lits. Aujourd'hui elle affiche complet, 30 randonneurs occupant tous les lits des 12 chambres du refuge. Combien de chambres à 2 lits et combien de chambres à 4 lits y a-t-il dans le refuge ?

Lors du deuxième tableau, une élève suivant la consigne revient à ce problème qu'elle avait résolu lors du premier tableau, en utilisant ici aussi des ostensifs qui lui sont propres, de la manière suivante :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Chambres à 2 lits}\\ \text{Chambres à 4 lits}\end{array}\right\}\text{30 randonneurs}$$

---

12 chambres
12→ au moins 2 personnes=24
30-24=6÷~~2~~
↓
si on divise 6 par 2 ça fait 2×3 randonneurs à placer 2+2=4
donc
3 chambre à 4 lits et 9 chambres 2 lits

Lors du deuxième tableau, maintenant qu'elle dispose des ostensifs appropriés, elle peut alors les utiliser pour écrire :

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 2x + 4y = 30 \end{cases}$$

Ceci la conduit à développer sa propre « créativité » mathématique, sous la forme de deux techniques qui lui permettent de retrouver la solution trouvée lors du premier tableau. La première est la suivante :

$2x+4y=30$
$x+y=30-x-3y$
$12=30-x-3y$
$x+3y=30-12$
$x+3y=18$
$x+y=18-2y$
$12=18-2y$
$2y=18-12$
$2y=6$
$y=3$
$x=12-3=9$

Cette première technique, « inventée » ici par cette élève, consiste donc à faire apparaître la première équation à partir de l'autre afin de substituer à la première la constante à laquelle elle est égale, et à itérer le procédé jusqu'à « disparition », dans la deuxième équation, d'une des inconnues. Ceci permet, au bout d'un certain nombre d'étapes, de la résoudre comme équation du premier degré à une inconnue, et à tirer de là la valeur de la deuxième inconnue. Cette élève parvient, dans un deuxième temps, à perfectionner sa technique, et elle écrit alors :

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 2x + 4y = 30 \end{cases}$$

Plus court → $2x+4y=30$ $\qquad$ $2(x+y)+2y=30$
$2(x+y)=30-2y$ ←
$2\times12=30-2y$
$24=30-2y$
$2y=30-24$
$2y=6$
$y=3$
$x=12-3=9$

Il s'agit donc d'une amélioration de la technique précédente, qui va dans le sens d'une économie, tant de l'énergie cognitive à déployer que de l'expansion de l'écriture ostensive, dans la mesure où la double itération du procédé consistant à faire apparaître $x+y=12$ dans $2x+4y=30$ peut être remplacée par une factorisation par 2 après décomposition de $4y$.
Cette pratique ostensive permet un travail de la technique qui va dans le sens d'une économie, identifiée par l'élève, et qui contient et s'appuie sur la mémoire de la technique précédente, moins élaborée. C'est ainsi, encore une fois, un travail de la mémoire pratique qui permet un travail de la technique. Il n'a pas échappé que cette technique n'a pu être créée et vivre que grâce aux coefficients particuliers du système et que, par ailleurs, les techniques dont l'enseignement est l'objet, techniques d'addition et de substitution (d'une inconnue et non d'une équation), n'émergent pas encore du travail d'étude de cette élève.

Cet état de fait peut alors être judicieusement utilisé par le professeur, en engageant la classe à travailler sur la portée de cette technique. Cette technique nous mène-t-elle à la solution à tout coup ? Sinon, dans quels cas fonctionne-t-elle ? Et comment faire dans les cas de systèmes pour lesquels elle est inapplicable ? Que sont ces systèmes et pourquoi est-elle inopérante alors ? C'est alors toute la dimension technologique des techniques disponibles à cet instant qui peut être travaillée par la classe.

Ceci n'a pas échappé au professeur de la classe, lors d'un entretien *post* séance, durant laquelle a été travaillé le premier problème du deuxième tableau :

> *Premier problème*
> Dans mon porte-monnaie j'ai 56 euros. J'ai vingt pièces, certaines sont à 1 euro et d'autres à 5 euros. Combien ai-je de pièces de 1 euro et combien ai-je de pièces à 5 euros ?

Le système associé au problème est :

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x + 5y = 56 \end{cases}$$

et le professeur relate en ces termes, l'émergence dans la classe d'une technique comparable à celle décrite précédemment pour cette élève, à partir de laquelle les questions de portée et de technologie sont apparues :

> 37. **P** : […] À partir du moment où il y en a un qui a eu cette idée de retrancher *x+y* et de retrancher 20, et qu'il a été dit tout de suite : oui mais de toute façon on retranche, on peut retrancher et ajouter un même nombre aux deux membres d'une égalité ; on a vu ça, donc c'est bon. Ils sont restés sur cette piste-là, en se demandant comment ils pouvaient, par soustraction, faire… procéder à la transformation. […]
> 39. **P** : […] Et après, j'ai fait venir quelqu'un d'autre au tableau, qui a proposé… qui est la copine d'Émilie d'ailleurs, et qui a proposé cette méthode où finalement on décompose : 5y. Et qui a eu énormément de mal à l'expliquer. Et j'ai vu, c'est quelqu'un qui est souvent en retrait, et qui tenait beaucoup à venir, parce que je pense qu'elle s'était appropriée la méthode de la voisine, et qu'elle voulait montrer comment on faisait avec cette méthode-là. Et alors, il y a eu tout un débat sur : il manque des étapes, et trois fois je lui ai dit : est-ce que tu peux expliquer ce que tu fais ? Et bien, le double de x et de y, 2x et 2y, c'est égal au double de 86. […] Bon, il y avait un autre débat, parce qu'il y a tellement de choses qui sont sorties de là. C'est que… l'autre débat c'est : on perd, on perd en route des conditions qui doivent être remplies, et euh… comment, quel choix va-t-on faire, et est-ce qu'on aurait le droit de rajouter, d'associer à ces deux premières équations ce fameux 2x+2y = 172. Alors moi, je leur ai posé la question, il n'y a pas eu de réponse.

Émergent aussi d'autres débats de nature technologique, comme l'indique le professeur lors un entretien *ante* séance :

> **P** : Oui. Si ce n'est que dans l'un des deux, je ne sais pas s'il t'avait dit, mais on est arrivés à un problème de théorie qui est finalement : quel est le nombre minimum nécessaire d'équations pour résoudre ce type de problème.

Ce qui permet au professeur d'intervenir, en choisissant de donner un problème qui va trancher le débat :

> **P** : […]J'ai fabriqué à la va-vite, parce que j'ai pas trop le temps en ce moment, un petit problème où on interroge plusieurs personnes qui sortent d'une boulangerie, en leur demandant etc… il y en a trois qui sont interrogées. Et donc avec ce système de trois équations… bon alors, si on en arrive là, ça prendra plus de temps ;

[…]Mais si ça revient, moi je prends le temps de travailler là-dessus. En leur disant que finalement, on n'a pas les outils pour l'instant pour démontrer, hein… que deux sont nécessaires et suffisantes, mais que, effectivement, sur cet exemple là, ils peuvent bien se… prendre conscience de ça et ils verront plus tard. C'est comme l'unicité. Si leur problème revient, je leur dirais : effectivement il y a qu'une solution et vous verrez plus tard, l'année prochaine ou au lycée euh… on vous justifiera, vous pourrez avoir la justification de cette réponse. J'ai pas d'autre moyen de me sortir…

Le « principe d'économie de l'énergie cognitive » est identifié par les élèves, ce que note le professeur, de la manière suivante, lors de deux entretiens :

P : […]donc, à la quatrième séquence sont apparues les deux méthodes principales, par substitution et par addition, avec d'autres à côté, du type méthode des fonctions par exemple. Ils ont trouvé ça, plus encore une ou deux autres, mais ils se sont bien rendus compte que finalement les deux qui étaient efficaces, qu'ils utiliseraient sûrement, ce sont celles-là.

27. **P** : […] Dans l'autre classe on a eu le temps de mettre en forme les deux méthodes, on a eu le temps d'étudier la deuxième méthode, où elle écrit dans les deux équations x en fonction de y, où elle a même développé l'argument : de toute façon, si on divise par deux ce n'est pas un problème, on s'en débarrasse après. Donc, ça a été accepté par tout le monde comme étant une troisième méthode possible, mais un peu en retrait des autres, ce qui est intéressant, parce que moins économique.

Enfin le travail des ostensifs mené par les élèves leur apparaît personnellement, à travers la diversité des écritures créées parfois par les élèves eux-mêmes, dans sa dimension mémorielle qui facilite l'exécution du calcul, et qui contient la mémoire des dimensions technologiques associées à la technique. Dans ce travail des ostensifs, c'est le travail de la mémoire pratique, avec ces variantes personnelles, qui peut être mené collectivement et sous la direction du professeur :

43. **P** : […] Et, lui avait écrit, il avait écrit ceci : 2x+4y = 232 et en dessous il avait écrit, il avait préparé son accolade, c'est important, parce qu'il y en a qui ont toujours pas éprouvé le besoin…
44. […]
45. **P** : De coder l'association des deux conditions. Alors il y en a qui numérotent, il y en a qui ont laissé de l'espace, ça se voit. Et c'est vrai que ceux qui… et pourtant ça a été suggéré. C'est le bon moyen de faire comprendre au cerveau qu'on associe les deux conditions. Et ben non. Comme c'est pas écrit formellement sur le… et qu'on a pas appris une leçon qui dit qu'il faut mettre une accolade, il a écrit : je fais 2x-2x ça fait hein… 5y-3y = 232-162.

Les ostensifs interviennent alors dans la mémoire ostensive de la classe, en montrant à tous la nécessité d'y recourir, et les difficultés qui surgissent lorsqu'on déroge à leur utilisation :

47. **P** : Alors, le débat, il y en a qui comprenaient plus d'où ça sortait ça, pourquoi il écrivait ça ; alors il a commencé à expliquer qu'il faisait une soustraction. Et puis finalement, je me suis rendue compte que, le fait de le laisser persister avec une écriture comme celle-là, avec la deuxième équation associée à nouveau à celle-ci, ça apportait une confusion complète, et le sens de la soustraction membre à membre disparaissait, au profit d'un autre problème qui était : est-ce qu'il faut absolument continuer à associer ces deux conditions, est-ce que celle-là elle est absolument nécessaire. Alors le débat…

Une place importante est laissée au professeur dans le pilotage de la classe, mais le prix qu'il a à payer se mesure en la difficulté à gérer le temps :

31. **P** : Et finalement, j'arrive, au bout de quatre séquences, à l'objectif que je m'étais fixé en deux, je crois ; non ?

13. **P**. : […]Et après je n'ai pas pu, c'est peut-être moi, je n'ai pas trouvé de moment propice, il y a rien qui est apparu. Parce que par exemple, Michael il y a eu au moins trois minutes de discussion sur (*le professeur va montrer au tableau*) et c'est moi qui… et moi je regardais la montre, je me disais : c'est pas vrai, on ne va pas s'en sortir. Il voulait absolument, il avait écrit ici […]

Difficulté à laquelle s'ajoute celle de l'inattendu. C'est ce qu'indique le professeur en ces termes :

P : […] Les séances c'est pas du tout comme je les avais prévues au départ.

8. **O** : Alors, pas de méthode par substitution, c'est marrant.
9. **P** : Mais quand je dis pas, c'est pas. Il y en a pas un qui…
10. **O** : Quand même, on était persuadés qu'elle allait sortir majoritairement, enfin presque, peut-être exclusivement.
11. **P** : Oui. Alors, je me dis, finalement, c'est pas que j'ai bien travaillé, mais comme je les ai amenés à travailler sur cette méthode par addition, finalement elle a pris le pas sur l'autre.
12. **O** : Complètement.
13. **P** : Et pourtant, je suis restée en retrait. J'ai vraiment essayé de rester… de m'impliquer le moins possible dans le choix de la méthode pour pas que… ils aient l'impression qu'il y en a une que je privilégie, donc qui était meilleure que l'autre.

Mais le professeur, à tout instant, a la possibilité d'arrêter le processus et de reprendre une forme de cours traditionnelle par l'ostension de la mémoire pratique qui a émergé.

En fait, sur le cas particulier qui est montré ici, celui de la modélisation de problèmes par des systèmes d'équations, les élèves de 3^{e} disposent d'une mémoire pratique relative à l'arithmétique qui n'est pas très riche. Des techniques utilisées en arithmétique et relevant du calcul segmentaire que les élèves apprenaient, avant la réforme des mathématiques modernes, dès les classes de Cours Moyen, puis qui continuaient à vivre dans les premières classes du Collège pour des problèmes résolus ensuite par des techniques algébriques, ne sont plus mises à disposition des collégiens. Ceci peut expliquer l'absence d'apparition de la méthode par substitution, très utilisée pour exprimer une grandeur inconnue en fonction de l'autre dans les techniques recourant à une modélisation à l'aide de segments, et qui étaient auparavant enseignées durant les années précédant la classe de 3^{e}.
Pour cette même raison, les ostensifs algébriques prennent le dessus, dans les productions d'élèves du deuxième tableau, pour constituer une mémoire pratique relative à l'algèbre rapidement dominante sur d'autres pratiques plus personnelles menées grâce à quelques ostensifs « inventés » par les élèves, tels les flèches, les encadrements, certaines dispositions des calculs et raisonnements, etc.

L'expérience que nous venons de décrire rapidement indique la voie qui peut être prise par un type d'enseignement en lequel le temps de l'étude est en grande partie pris en charge par le professeur. Mercier (1998a) souligne ce trait de l'enseignement ordinaire qui conduit à ce que « le travail des savoirs désignés indirectement par les épisodes didactiques ne peut trouver place dans le cours ordinaire de la classe, parce qu'il ne produit pas de progression du temps didactique. » Les épisodes qui signent des moments d'apprentissage personnel, pour un élève donné, de savoirs pertinents pour l'enseignement à venir d'autres éléments de savoir, autrement dit le travail de l'idonéité du rapport au savoir, est mené le plus souvent de façon privée, hors de la classe. Mais des dispositifs didactiques, tels que celui décrit, qui assurent, sous la direction de l'enseignant, le travail personnel de la mémoire pratique avant sa mise en commun, donc qui prennent en compte le processus de construction de cette mémoire et montrent qu'il appartient à chacun de le poursuivre selon ses nécessités personnelles, peuvent favoriser le travail de l'idonéité du rapport au savoir, parce qu'il n'est plus laissé à la charge exclusive des élèves.

5. 2. 3. Le travail des systèmes d'objets pour la pratique est à la base du travail cognitif

Ratsimba-Rajohn (1992 & 1995) introduit la notion de « macle de contradictions » pour appréhender le rapport d'une personne, d'un élève, à un savoir mathématique. En fait, le sens premier du terme renvoie à la cristallographie, où il désigne un cristal constitué d'une association de plusieurs cristaux de même espèce, mais qui sont orientés différemment, et qui s'interpénètrent. Ratsimba-Rajohn (1995) recourt à cette analogie pour, dit-il :

> « …rendre une image plus fidèle de l'idée que nous nous faisons de ces ensembles d'éléments de connaissances qui sont objectivement contradictoires mais qui coexistent et s'interprètent plus ou moins chez un même individu, au sein d'une même communauté d'individus ou chez une société d'une époque, et qui sont à la base des choix de leurs actions et de leurs productions. » pp. 104-105.

Pour illustrer cette définition, il cite de nombreux exemples, tirés de situations d'enseignement mais aussi notamment de l'histoire des mathématiques et des sciences et qui montrent, dans ce dernier cas, la généralité du phénomène, puisqu'il concerne des personnalités scientifiques incontestables telles que Carnot, l'équipe Bourbaki ou Einstein pour ne citer que les plus célèbres, mais elles aussi confrontées à ces macles de contradictions[187].

Du côté des élèves, l'un des exemples donnés a plus particulièrement attiré notre attention, même si Ratsimba-Rajohn mentionne que ce type de macle se rencontre rarement dans l'histoire des mathématiques. Il s'agit d'une observation ancienne (1983) portant sur des élèves de seconde et de 1[e] A (littéraire) à qui l'on avait demandé quel est le plus grand des deux nombres suivants : 1 ou 0,9999999999…999… ? Comme on s'en doute, l'écrasante majorité (198 réponses) indique que 1 est le plus grand, tandis qu'une infime minorité (16) donne la réponse exacte. Ce qui intéresse Ratsimba-Rajohn (1992) est l'étude des réponses qui signalent une macle, et qui sont du type « 1 est plus grand mais souvent on dit qu'ils sont égaux » ou « 1 est plus grand mais on peut démontrer qu'ils sont égaux ». Il propose un modèle « des différentes parties constituant les connaissances » chez un élève pour que de telles contradictions n'apparaissent pas[188], mais ce modèle nous paraît rester à un niveau trop général pour être fonctionnel.

[187] Ratsimba-Rajohn (1992), op. cit., pp.66-69.

[188] Citons : « a) toutes les procédures qui contrôlent le modèle de la situation, reflet fidèle de la situation, sont produites par des stratégies spécifiques de la classe de situations-problèmes proposées b) les éléments de ces

L'entrée dans la question par la problématique des ostensifs, outils dépositaires des connaissances mathématiques, et donc de la mémoire du savoir, nous semble apporter des réponses plus satisfaisantes.
Tout d'abord, 1 et 0,9999999999…999… sont des ostensifs singuliers à ce niveau d'étude. L'un est trivial ou tout au moins très familier, l'autre se rencontre très rarement et il est bien mal commode pour les pratiques calculatoires dans lesquelles ce type d'ostensif (un nombre) est communément engagé : c'est d'ailleurs une des raisons pour lesquelles on le rencontre si peu. Par ailleurs, l'écriture ostensive d'un tel nombre comporte des notations peu usuelles à ce niveau, comme le recours aux pointillés.
Nous n'avons pas eu, bien sûr, accès aux 294 réponses données par ces élèves, mais nous pouvons cependant tenter une explication des réponses fausses ou contradictoires données par les élèves, à partir des couches de mémoire pratique travaillées ou qui n'ont pu l'être, parce que, dans ce dernier cas, la possibilité de rencontrer un tel type de travail ne leur en a jamais été donnée dans l'enseignement antérieurement reçu sur ces ostensifs. La réponse tient dans le développement décimal d'un nombre, et les ostensifs qui le représentent. Pour répondre à la question posée aux élèves, ceux-ci doivent avoir rencontré le problème auquel l'écriture ostensive correspondant au développement décimal d'un nombre répond. Notamment, ils doivent savoir que l'écriture 0,9999999999…999… est une écriture ostensive particulière de la somme, ou plus précisément de la limite de la somme : $9.10^{-1}+9.10^{-2}+\ldots+9.10^{-n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
La réponse à la question posée en découle :

$$9.10^{-1}+9.10^{-2}+\ldots+9.10^{-n}=9.10^{-1}(1+10^{-1}+10^{-2}+\ldots+10^{-(n-1)})$$

$$=9.10^{-1}\frac{1-10^{-n}}{1-10^{-1}}=1-10^{-n}$$

Or $\lim\limits_{n\to\infty}(1-10^{-n})=1$. Donc 0,9999999999…999…=1.

Une rapide enquête menée sur les savoirs officiellement enseignés en 1983 montre que, tant en seconde et 1^eA, que dans les 1^eCDE qui allaient devenir les 1^eS, et en faisant abstraction des difficultés relevant de la technicité du calcul algébrique à mener, et de l'absence de la connaissance des limites et de la somme d'une suite géométrique, les élèves ne disposaient pas de l'écriture ostensive 0,9999999999…999… qui leur aurait permis de s'engager dans la démonstration établissant l'égalité. La preuve en est que la « Représentation d'un nombre réel par une suite décimale illimitée » ne fut au programme que des seules Terminales C et E (programme de 1971 en vigueur pour la dernière année) ; la démonstration classique que nous avons donnée est d'ailleurs extraite d'un manuel de cette époque[189] qui s'en sert pour montrer la non-unicité du développement décimal pour tout *x* réel !

---

stratégies ont été choisis par les savoirs spécifiques de la situation a-didactique c) les stratégies ont été validées correctement par la théorie que constituent les savoirs. » p. 75.

[189] Mathématiques, Tome 1, Nombres - Probabilités, Terminale CE, Collection Queysanne-Revuz, Fernand Nathan, p. 178, 1974.

On peut alors se poser la question des connaissances sur l'écriture ostensive et sur les techniques de comparaison des nombres qui sont disponibles pour les élèves testés. Sans doute les meilleurs élèves de seconde et 1^{e}A de cette époque avaient-ils un souvenir de la rencontre, au Collège, avec les écritures décimales périodiques des rationnels, mais la technique permettant de trouver l'écriture fractionnaire d'un rationnel à partir de son écriture décimale périodique n'y était pas enseignée, contrairement à des périodes de l'histoire du système éducatif où elle était au programme de certaines classes, par exemple des classes de Brevet Supérieur[190]. L'écriture ostensive correspondant au développement décimal illimité d'un nombre a donc une valeur praxématique très faible si on la rapporte aux pratiques que l'on peut supposer disponibles pour les auteurs de la question adressée aux élèves, question portant sur la comparaison de deux formes d'écriture du même nombre 1[191]. Autrement dit, avec l'écriture de 1 sous la forme 0,9999999999…999…, les élèves ne peuvent pas s'engager dans une technique convenable permettant une comparaison de nombres. La seule qu'ils connaissent, lorsqu'ils ont à comparer deux nombres écrits sous forme décimale, est enseignée à l'École primaire pour les décimaux, et consiste à comparer les coefficients de même rang du développement décimal « en partant de ceux qui sont le plus à gauche et en allant vers la droite ». C'est cette technique qu'ils utilisent indûment ici et qui aboutit aux 198 réponses donnant 1 comme étant le plus grand.
Ainsi l'ostensif 0,9999999999…999… les engage dans la mobilisation de couches de leur mémoire pratique qui coïncident bien peu avec la mémoire du savoir autorisant cette écriture. Ce que nous pourrions dire aussi sous la forme suivante : l'objet ostensif 0,9999999999…999… commande des pratiques qui ne sont pas du même type selon que l'on est un élève de seconde ou 1^{e}A, ou que l'on est une personne qui connaît la pratique qui autorise l'ostensif, c'est-à-dire qui connaît une partie de la mémoire du savoir contenue dans l'ostensif, et qui va l'utiliser pour répondre à la question posée.

On peut alors s'interroger sur la nature « contradictoire » de la macle lorsqu'on la réfère à la pratique et à la « logique pratique ». La contradiction n'apparaît en effet que dans la logique de celui qui rend compte des phrases produites par les élèves, phrases du type « 1 est plus grand mais souvent on dit qu'ils sont égaux » ou « 1 est plus grand mais on peut démontrer qu'ils sont égaux », et qui, par sa pratique des mathématiques, sait bien que deux nombres ne peuvent être égaux et inégaux à la fois.
Il en va tout autrement pour les élèves producteurs de ces phrases : la première partie « 1 est plus grand » correspond à la pratique par les élèves de la comparaison des nombres telle que nous avons pu la décrire précédemment, tandis que le « mais on » réfère à un autre type de

[190] La technique consiste à multiplier le nombre écrit sous forme décimale périodique par des puissances de 10 dont l'exposant représente le rang de la décimale qui permet d'obtenir complètement la première période pour l'une, et la longueur de la partie décimale a-périodique pour l'autre. Ainsi, si $x=7,3\underline{459}$, alors $10^4x-10^1x=73386$. Donc $9990x=733386$, ce qui donne : $x=\dfrac{1359}{185}$.

[191] Nous faisons abstraction d'éventuels effets de contrat qui peuvent jouer ici. Par exemple la question posée sous-entend que l'un des deux nombres est plus grand que l'autre, et donc qu'ils ne peuvent être égaux. De plus, la pratique par les élèves des nombres écrits sous forme de développement décimal, éventuellement illimité, les a régulièrement conduits à associer des nombres différents à deux écritures décimales différentes, donc à considérer que l'écriture décimale d'un nombre est unique, si l'on néglige l'écriture ou non de certains zéros.

pratique. Nous ne pouvons aller trop loin dans l'analyse, faute de disposer du matériau empirique constitué des résultats de l'enquête, et qu'il aurait sans doute fallu compléter d'entretiens avec les élèves. Mais ce « mais on » nous semble renvoyer à l'impersonnel de pratiques se déployant dans d'autres institutions, plus ou moins extérieures à celle dont est issue la pratique permettant au « sujet-élève », producteur de la phrase, d'écrire en première personne « (je dis que) 1 est plus grand ». En effet, le « on dit qu'ils sont égaux » renvoie à un usage en troisième personne, dans une institution supposée, pour laquelle lorsque deux nombres sont si proches l'un de l'autre, il a été convenu d'un commun accord de dire qu'ils sont égaux. Le « on peut démontrer qu'ils sont égaux » renvoie, lui-aussi, à une autre institution supposée, en laquelle certaines pratiques autorisées, dont l'élève ne dispose pas (encore), permet de démontrer ce résultat quelque peu mystérieux de l'égalité de 1 et de 0,9999999999…999…

Si on la réfère à la pratique, la dimension contradictoire de la macle semble alors tomber. C'est d'ailleurs ce qui est entrevu dans le travail de Ratsimba-Radjohn (1992), lorsqu'il cite comme exemple de macle de même nature que la précédente, la coexistence dans le même ouvrage de mathématiques chinoises du XVII^e siècle, le Zhoubi suanjing, de deux systèmes de représentation de la Terre. Dans le premier chapitre, la Terre est plate, tandis que dans le second, elle est courbe ; sans que cela ait ému la communauté des mathématiciens chinois de cette époque. La raison de ce qui nous paraît être contradictoire obéit, encore une fois, à une logique pratique qui transparaît dans l'extrait de l'ouvrage de Martzloff que Ratsimba-Radjohn (1992) cite : elle est plate dans le premier chapitre « car cette hypothèse s'accorde bien avec ce que permet de faire le gnomon », et courbe « car cette fois-ci, l'instrument sur lequel les déductions s'appuient est la sphère armillaire »[192]. Autrement dit, la contradiction saute lorsqu'on oublie la Terre en tant que système, pour se concentrer sur les modèles qui lui sont associés, et qui permettent la réalisation de pratiques qui donnent en retour des informations sur le système interrogé. Dans le prolongement de cette approche « par les pratiques », il serait donc nécessaire de s'interroger sur la logique pratique d'un autre type qui conduit à considérer comme contradictoire qu'un nombre puisse à la fois être égal et différent d'un autre, ou que la Terre puisse être à la fois plate et courbe…

Il peut paraître inattendu de trouver en ce point de cette thèse une nouvelle analyse portant, de surcroît, sur un nouvel objet rencontré pour la première fois ; on s'attend ici plutôt, selon le style convenu pour une conclusion, à une ou des synthèses ! Que l'on ne se méprenne pas cependant : l'exemple que nous venons de traiter nous fournit l'occasion d'une synthèse attendue.

Il montre en effet que le système d'objets donnés commande, en référence aux pratiques précédemment rencontrées, les pratiques nouvelles qu'il autorise pour une personne. Il contient, dans sa définition ontologique, en tant qu'objet ou système d'objets, le souvenir des pratiques pour lesquelles il a été conçu, dans une ou plusieurs institutions données : c'est le cas de 0,9999999999…999…, ou de la représentation plate ou courbe de la Terre. La

[192] Le gnomon est un cadran solaire, donc il est plan. La sphère armillaire est constituée d'un ensemble de cercles représentant le ciel et les astres et au centre desquels se trouve un globe figurant la Terre.

contradiction logique n'apparaît guère, pour une personne, que lorsque, par comparaison, elle examine les pratiques menées dans d'autres institutions que les institutions en lesquelles il a été créé, et en lesquelles d'autres personnes utilisent l'objet en tant qu'outil pour un autre usage : utiliser 0,9999999999…999… pour une technique qui relève de la comparaison des nombres en écritures finies en disant qu'ailleurs, dans d'autres institutions, on fait et on trouve différemment, ou utiliser deux objets de nature géométrique différente (un plan et une sphère) pour des pratiques qui apparaissent, en d'autres institutions, comme relatives à un seul et même objet physique, la Terre. Autrement dit, utiliser une mémoire pratique pour l'usage de l'objet différente de celle requise pour les pratiques desquelles il est ou semble être originellement issu.
Les mémoires, celle du savoir pour l'objet, celle de la pratique de l'objet, celle qui porte sur ce que l'on donne à voir des pratiques dans lesquelles intervient l'objet et que nous avons appelé « la mémoire ostensive », ainsi que les dimensions qui peuvent apparaître logiques ou contradictoires de ce que l'on dit à propos de l'objet, relèvent, bien entendu, de ce que l'on peut désigner comme étant le domaine de la cognition en tant que faculté pour connaître. Le sens de cette thèse s'inscrit dans une perspective plus large qui considère que cette dimension cognitive n'est pas qu'une propriété d'un sujet qui « conceptualiserait dans sa tête ». Pour l'objet de la thèse, qui est la mémoire en mathématiques, nous avons en effet montré que ce cognitif était à rechercher dans les objets et les pratiques dans lesquelles ils sont pris comme outils, à l'intérieur d'institutions données. Ce point nous a conduit à ne plus considérer la mémoire comme s'identifiant simplement au souvenir ou à l'oubli, bien que notre définition de la mémoire englobe ces catégories, mais comme activité cognitive inscrite dans les corps et dans leur prolongement par l'activation d'objets qui deviennent outils. En retour, ces outils inscrivent dans les corps des souvenirs de pratiques réglées dans lesquelles ils ont été engagés, parce qu'à leur tour ils autorisent ou interdisent certaines pratiques, ces pratiques relevant d'une classe de situations sociales d'usage, donc dans l'enseignement de situations didactiques au sens donné par Brousseau, qui donnent sa sémioticité à l'objet.

Nous avons indiqué en 5. 2. 2., à travers un exemple, vers quelle orientation pour la mise en place d'ingénierie didactique se donnant pour objet la prise en charge de la direction du travail du rapport au savoir des élèves, permettaient de déboucher les résultats de cette thèse. Ce travail des pratiques autorisées, ou que l'on s'autorise, par les manipulations d'ostensifs permises ou extrapolées, nous a permis de comprendre comment le travail privé de la mémoire pratique permettait à un élève d'apprendre, ou encore de « rencontrer son ignorance grâce aux dimensions a-didactiques des situations d'enseignement ordinaire » pour reprendre les résultats de travaux de Mercier.
Il serait plus juste de parler désormais du travail du rapport aux objets en tant qu'outils pour la pratique du savoir, à la place de l'expression « rapport au savoir ». Car, comme nous l'avons indiqué lorsque nous avons été amené à traiter des ostensifs, nous avons pu bénéficier, en mathématiques, du remarquable travail mené par Chevallard et Bosch qui ont pu définir ce que sont les outils de l'activité mathématique, travail qui a constitué une condition nécessaire pour l'engagement dans cette thèse. L'extension de ses résultats à d'autres disciplines scolaires, relevant de « savoirs hautement techniques » selon la définition de Johsua,

nécessite, parce qu'ils sont « techniques » précisément, que le travail d'analyse, et de définition des outils que ces savoirs se sont donnés, ait été mené au préalable. Ou encore que l'on ait pu clairement dégager quels sont les outils engagés pour les pratiques qui relèvent de la discipline que l'on appelle le français, ou les langues étrangères, les sciences physiques ou la biologie, etc. À notre connaissance, ce travail reste désormais à mener pour les savoirs extérieurs aux mathématiques.

BIBLIOGRAPHIE

Accardo A. & Corcuff P.(1986) : *La sociologie de Bourdieu. Textes choisis et commentés*, Le Mascaret, Bordeaux, 2e édition revue et augmentée 1989.

Accompagnement des programmes de 5e et 4e, (1997), Livret 3, Centre National de Documentation Pédagogique.

Althusser L. (1967 ; 1974) : *Philosophie et philosophie spontanée des savants (1967)*, François Maspero, Paris, 1974.

Althusser L. (1976) : *Positions*, Éditions sociales, Paris.

Althusser L. (1982 ; 1994) : *Le courant souterrain du matérialisme de la rencontre (1982),* in *Louis Althusser, Écrits philosophiques et politiques, Tome I*, Stock/IMEC, Paris, 1994, pp. 539-579.

Artaud M. (1997) : *Introduction à l'approche écologique du didactique, l'écologie des organisations mathématiques et didactiques*, in *Actes de la IXe École d'été de didactique des mathématiques*, ouvrage coordonné par Bailleul M., Comiti C., Dorier J.-C., Lagrange J.-B., Parzysz B., Salin M.-H., ARDM éditeur, pp. 101-139.

Bachelard G. (1934) : *Le nouvel esprit scientifique*, PUF, Paris, 17e édition 1987.

Bachelard G. (1938) : *La formation de l'esprit scientifique*, Librairie philosophique J. Vrin, Paris, 14e édition 1989.

Bachelard G. (1949) : *Le rationalisme appliqué*, PUF, Paris, 1986.

Baddeley A. (1993) : *La mémoire humaine : théorie et pratique*, Presses universitaires de Grenoble, Grenoble.

Bautier É & Rochex J-Y. (1998) : *L'expérience scolaire des nouveaux lycéens. Démocratisation ou massification ?*, Armand Colin, Paris.

Bergson H. (1896) : *Matière et mémoire*, PUF, 5e édition 1997.

Berthelot R. & Salin M.–H. (1992) : *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse de l'Université de Bordeaux I.

Blanchard-Laville C., Chevallard Y., Schubauer-Leoni M.-L. (1996) : *Regard croisés sur le didactique*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Bosch M. (1994) : *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad,* Thèse de doctorat, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelone.

Bosch M. & Chevallard Y. (1999) : *La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique,* Recherches en didactique des mathématiques, 19/1, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 77-124.

Boudon R. (1979) : *La logique du social*, Hachette, Pluriel, Paris, édition de 1997.

Bourbaki N. (1969) : *Éléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris.

Bourdieu P. (1980) : *Le sens pratique*, Éditions de minuit, Paris.

Bourdieu P. (1987) : *Chose dites*, Éditions de minuit, Paris.

Bourdieu P. (1992) : *Réponses, Pour une anthropologie réflexive*, Éditions du Seuil, Paris.

Bourdieu P. (1993) : *La misère du monde*, Éditions du Seuil, Paris, Collection Points, février 1998.

Bourdieu P. (1994) : *Raisons pratiques. Sur la théorie de l'action*, Éditions du Seuil, Paris.

Bouveresse J. (1995) : *Règles, dispositions et habitus*, in *Critiques* n°579/580, Éditions de Minuit, Paris, pp. 573-594

Brousseau G. (1986a) : *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, Thèse de doctorat d'État, Université de Bordeaux I, Bordeaux.

Brousseau G. (1986b) : *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*, Recherches en didactique des mathématiques, 7/2, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 33-115.

Brousseau G. (1990) : *Le contrat didactique : le milieu*, Recherches en didactique des mathématiques, 9/3, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 309-336.

Brousseau G. (1996) : *L'enseignant dans la théorie des situations didactiques*, *,* in *Actes de la VIII^e École d'été de didactique des mathématiques*, Noirfalise R. et Perrin-Glorian M-J. éds., IREM de Clermont-Ferrand, pp. 3-46.

Brousseau G. & Centeno J. (1991) : *Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant*, Recherches en didactique des mathématiques, 11/2&3, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 167-

210.

Bulletin officiel de l'Éducation Nationale, n°4 hors série, du 12 juin 1997.

Candau J. (1996) :*Anthropologie de la mémoire*, coll. Que sais-je ?, PUF, Paris

Candau J. (1998) : *Mémoire et identité*, PUF, Paris.

Castella C. & Mercier A. (1994) *: Peut-on enseigner les méthodes ? Comment les élèves apprennent-ils des méthodes ?*, in *Le journal de la commission inter-IREM didactique n°1*, pp. 9 à 38

Centeno J. (1991) : *La mémoire dans le contrat didactique*, communication à l'École d'été de Didactique des Mathématiques, Plestin les Grèves, 28 août-6 septembre 1991.

Centeno J. (1995) : *La mémoire didactique de l'enseignant*, thèse posthume inachevée, LADIST, Bordeaux.

Changeux J-P. & Connes A. (1989) : *Matière à pensée*, Éditions Odile Jacob, Paris.

Charlot B. (1997) : *Du rapport au savoir. Éléments pour une théorie*, Anthropos, Ed. Economica, Paris.

Chevallard Y. (1981) : *Pour la didactique*, texte présenté lors de la journée de rentrée de l'IREM d'Aix-Marseille, le 22 septembre 1981, document interne de l'IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard Y. (1982) : *Sur les corpus expérimentaux*, note pour la II^e^ École d'été de didactique des mathématiques, Olivet 5-17 juillet 1982.

Chevallard Y. (1985) : *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble, 2^e^ édition 1991.

Chevallard Y. (1988a) : *Esquisse d'une théorie formelle du didactique*, in *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique*, La Pensée sauvage, Grenoble, pp. 97-106.

Chevallard Y. (1988b) : *Sur l'analyse didactique, deux études sur les notions de contrat et de situation*, brochure n°14, IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard Y. (1988c) : *Notes sur la question de l'échec scolaire*, brochure n°13, IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard Y. (1989) : *Le concept de rapport au savoir – Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel*, Actes du *Séminaire de didactique des mathématiques et de* *l'informatique 1988-1989*, Université Joseph Fourier, pp. 211-235.

Chevallard Y. (1991a) : *Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique,* Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique de Grenoble, Université Joseph-Fourier., pp. 103-117.

Chevallard Y. (1991b) : *Sur la déconcertation cognitive*, Interactions didactiques n° 12, Université de Neuchâtel, pp. 27-51.

Chevallard Y. (1992) : *Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique*, Recherches en didactique des mathématiques, 12/1, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 73-112.

Chevallard Y. (1994a) : *Les processus de transposition didactique*, in *La transposition didactique à l'épreuve*, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 135-180.

Chevallard Y. (1994b) : *Résumé des séances de l'UV de didactique des mathématiques, licence de mathématiques*, département de mathématiques, faculté des sciences de Luminy, Université d'Aix-Marseille II.

Chevallard Y. (1996) : *La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique, in* Actes de la VIII^{e} École d'été de didactique des mathématiques, Noirfalise R. et Perrin-Glorian M-J. éds., IREM de Clermont-Ferrand, pp. 83-122.

Chevallard Y. (1997a) : *Questions vives, savoirs moribonds : le problème curriculaire aujourd'hui*, *in* Actes du Colloque *Défendre et transformer l'École pour tous*, IUFM d'Aix-Marseille.

Chevallard Y. (1997b) : *Familière et problématique, la figure du professeur*, Recherches en didactique des mathématiques, 17/3, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 17-54.

Chevallard Y. (1999) : *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*, Recherches en didactique des mathématiques, 19/2, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 221-266.

Chevallard Y. & Mercier A. (1987) : *Sur la formation historique du temps didactique*, publication n°8 de l'IREM d'Aix-Marseille, Marseille.

Clot Y. (1999) : *La fonction psychologique du travail*, PUF, Paris.

Collette J.-P. (1973) : *Histoire des mathématiques*, Tome I, Éditions du renouveau pédagogique Inc., Montréal.

Commissaire H. & Cagnac G. (1936) : *Cours de mathématiques spéciales,Tome III, Calcul intégral, courbes et surfaces du second degré*, Masson et C[ie], Paris.

Corcuff P. (1995) : *Les nouvelles sociologies*, Nathan, Paris.

Crozier M. & Friedberg E. (1977) : *L'acteur et le système, les contraintes de l'action collective*, Éditions du Seuil, Paris.

Dahan-Dalmedico A. & Peiffer J. (1986) : *Une histoire des mathématiques, routes et dédales*, Éditions du Seuil, Paris.

Delachet A. (1949) : *L'analyse mathématique*, coll. Que sais-je ?, PUF, Paris.

Deleuze G. (1964) : *Proust et les signes*, PUF, Paris, 2[e] édition « Quadrige » 1998.

Descartes R. (1637; 1947) : *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*, Éditions Pierre Cailler, Genève.

Descartes R. (1637 ; 1954) : *La géométrie*, in *The geometry of René Descartes with a facsimile of the first edition*, (1925), Dover edition.

Descartes R. (1701 ; 1996) : *Règles pour la direction de l'esprit*, traduction et notes par J. Sirven, Librairie philosophique J. Vrin, Paris.

Dieudonné J. (1978) : *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*, Tome I, Hermann, Paris.

Dieudonné J. (1987) : *Pour l'honneur de l'esprit humain, les mathématiques aujourd'hui*, Hachette, Paris.

Doaudy R. (1986) : *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*, Recherches en didactique des mathématiques, 7/2, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 5-31.

Douglas M. (1986) : *Ainsi pensent les institutions*, trad. franç., Usher, Paris, 1989.

Euler L. (1748 ; 1796) : *Introduction à l'analyse infinitésimale*, Tome I, traduit par J.B. Labey, chez Barrois aîné libraire, Paris.

Florès C. (1972) : *La mémoire*, coll. Que sais-je ?, PUF, Paris, 3[e] édition 1978.

Fraïssé R. (1982) : *Les axiomatiques ne sont-elles qu'un jeu ?*, in *Penser les mathématiques*, Séminaire de philosophie et mathématiques de l'École normale supérieure (J. Dieudonné, M. Loi, R. Thom), Éditions du Seuil, Paris, pp. 39-57 et pp. 123-132.

Friedelmeyer (1989) : *Arbogast ou la formule oubliée*, in *La démonstration mathématique dans l'histoire*, IREM de Besançon et IREM de Lyon, pp. 339-354.

Gauquelin M. & F. et al. (1971) : *La psychologie moderne de A à Z*, collection Les encyclopédies du savoir moderne, Retz, Paris.

Guedj D. (1996) : *L'empire des nombres*, Gallimard, Paris.

Halbwachs M. (1925 ; 1994) : *Les cadres sociaux de la mémoire*, Postface de G. Namer, Albin Michel, Paris.

Halbwachs M. (1950 ; 1997) : *La mémoire collective*, Préface et postface de G. Namer, Albin Michel, Paris.

Hilbert D. (1899 ; 1971) : *Les fondements de la géométrie*, édition critique préparée par Paul Rossier, ouvrage publié avec le concours du CNRS, Dunod, Paris.

Houzel C., Ovaert J.-L., Raymond P., Sansuc J.-J. (1976) : *Philosophie et calcul de l'infini*, François Maspero, Paris.

Johsua S. (1994) : *La didactique des sciences et des mathématiques : une praxéologie ou un modèle théorique ?* in *Actes du congrès de l'AFIRSE « Recherche scientifique et praxéologie dans le champ des pratiques éducatives »*, Département des sciences de l'éducation d'Aix-en-Provence, tome 1, pp. 101-108.

Johsua S. (1996) : *Qu'est-ce qu'un « résultat » en didactique des mathématiques ?*, Recherches en didactique des mathématiques, 16/2, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 197-220.

Johsua S. (1998) : *Des « savoirs » et de leur étude : vers un cadre de réflexion pour l'approche didactique*, L'année de la recherche en sciences de l'éducation, pp. 79-97.

Johsua S. (1999) : *L'école entre crise et refondation*, La dispute, Paris.

Johsua S. & Dupin J-J. (1993) : *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*, PUF, Paris.

Lafont R. (1978) : *Le travail et la langue*, Flammarion, Paris.

Lagrange J.-L. (1797) : *Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel*, Imprimerie de la République, Prairial an V, Paris.

Lebesgue H. (1934 ; 1975) : *La mesure des grandeurs*, Nouveau tirage, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris.

Lemoigne J.-L. (1977) : *La théorie du système général, théorie de la modélisation*, Troisième édition mise à jour 1990, PUF, Paris.

Leutenegger F. (1999) : *Contribution à la théorisation d'une clinique pour le didactique, trois études de cas en didactique des mathématiques*, thèse présentée à la Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Éducation de l'Université de Genève, sous presse Interactions didactiques, Collection didactique comparée, Genève.

Lerbet G. (1973) : *Piaget*, « psychothèque », Éditions universitaires, Paris.

Leroi-Gourhan A. (1964) : *Le geste et la parole II, La mémoire et les rythmes*, Albin Michel, Paris.

Lieury A. (1986) : *La mémoire. Résultats et théories*, Pierre Mardaga Éditeur, Bruxelles.

Lieury A. (1996) : *Méthodes pour la mémoire. Historique et évaluation*, Dunod, Paris.

Margolinas C. (1992) : *Éléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion*, Recherches en didactique des mathématiques, 12/1, La pensée Sauvage, Grenoble, pp. 113-158.

Margolinas C. (1995) *: La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations*, *in* « Les débats de didactique des mathématiques, Actes du séminaire national 1993-1994 », La pensée Sauvage, Grenoble, pp. 89-102.

Martinelli B. (1998) : *La mémoire en travail. À propos de la forge au Burkina-Faso*, in Les territoires du travail n°1, Mémoires en actes, Catéis, Marseille, pp. 65-76.

Matheron Y. (1993) : *Les répercussions des changements de programme entre 1964 et 1989 sur l'enseignement du théorème de Thalès*, petit *x* n° 34, IREM de Grenoble, pp. 59-82.

Matheron Y. (1994) : *De la proportionnalité vers le théorème de Thalès, point d'appui et évolution du rapport au savoir*, mémoire de DEA, UFR de psychologie et sciences de l'éducation, Université d'Aix-Marseille I.

Matheron Y. (1999) : *Un exemple d'utilisation du concept d'organisation praxéologique pour l'analyse d'un savoir à enseigner*, Le journal de la commission inter-IREM de didactique n°4, IREM de Clermont-Ferrand.

Mercier A. (1978) : *Étude des notions « opérateur » « machine »,* mémoire de DEA de didactique des mathématiques, Université de Bordeaux I et IREM d'Aix-Marseille.

Mercier A. (1992) : *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique*, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I.

Mercier A. (1993-1994) : *Les effets de l'intervention enseignante dans le milieu des situations a-didactiques*, in *Les débats de didactique des mathématiques, Actes du séminaire national 1993-1994*, ouvrage coordonné par Claire Margolinas, La pensée sauvage, Grenoble, 1995, pp. 157-168.

Mercier A. (1995) : *La biographie didactique d'un élève et les contraintes temporelles de l'enseignement*, Recherches en didactique des mathématiques, 15/1, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 97-142.

Mercier A. (1996) *: Comment appréhender le cognitif, depuis la position de la didactique des mathématiques ?*, communication au symposium REF, 1996, Université de Montréal.

Mercier A. (1998a) : *La participation des élèves à l'enseignement*, Recherches en didactique des mathématiques, 18/3, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 279-310.

Mercier A (1998b) : *Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches*, Formation doctorale « Systèmes d'apprentissage, systèmes d'évaluation », Université de Provence.

Merker C. (1989) : *Euler, l'infini, et les nombres imaginaires*, in *La démonstration mathématique dans l'histoire*, Actes du VII^e colloque inter-IREM « Épistémologie et histoire des mathématiques », Édition IREM de Besançon et IREM de Lyon, pp. 221-232.

Muxel A. (1996) : *Individu et mémoire familiale*, Nathan, Paris.

Namer G. (1987) : *Mémoire et société*, Méridiens Klincksieck, Paris.

Namer G. (1994) : *Postface* à la réédition des *Cadres sociaux de la mémoire* de M. Halbwachs, Albin Michel, Paris, pp. 299-367.

Namer G. (1997a) : *Postface* à la réédition de *La mémoire collective* de M. Halbwachs, Albin Michel, Paris, pp. 239-295.

Namer G. (1997b) : *Halbwachs*, in *Maurice Halbwachs 1877-1945*, Presses universitaires de Strasbourg, pp. 11-16.

Newton I. (1740 ; 1994) : *La méthode des fluxions et des suites infinies*, traduit par M. de Buffon, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris.

Nouet M. (1994) : *La méthode chez Leibniz*, in *Questions de méthodes au XVII^e^ siècle*, ouvrage collectif réalisé par le Groupe histoire des mathématiques de l'IREM des Pays de la Loire - Centre du Mans.

Ogien A. (1994) : *Les propriétés sociologiques du concept*, in *L'enquête sur les catégories de Durkheim à Sacks*, Raisons pratiques n°5, Éditions de l'École des Hautes Études en Sciences Sociales, Paris, pp. 243-269.

Ovaert J. – L. & Verley J. – L. (1997) : *FONCTIONS représentation & approximation des*, in *Dictionnaire des mathématiques, algèbre, analyse, géométrie*, Encyclopædia Universalis et Albin Michel, Paris, pp. 361-400.

Passeron J.-C. (1991) : *Le raisonnement sociologique, l'espace non-poppérien du raisonnement naturel*, Nathan, Paris.

Perrin-Glorian M.-J. (1992) : *Aire de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM2-6^e^*, Thèse de doctorat d'État, Université Paris VII.

Piaget J. & Inhelder B. (1968) : *Mémoire et intelligence*, PUF, Paris.

Platon : *Protagoras, Gorgias, Ménon*, texte établi et traduit par Alfred Croiset avec la collaboration de Louis Bodin, (1984), Gallimard, Paris.

*Programmes du cycle central, 5^e^ et 4^e^*, (1997), Direction des lycées et collèges, direction de la communication, MEN.

Quéré L. (1994) : *Présentation*, in *L'enquête sur les catégories de Durkheim à Sacks*, Raisons pratiques n°5, Éditions de l'École des Hautes Études en Sciences Sociales, Paris, pp. 7-40.

Rabardel P. (1995) : *Les hommes & les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*, Armand Colin, Paris.

Ratsimba-Rajohn H. (1977) : *Étude de l'introduction ostensive d'un objet mathématique*, Mémoire de DEA, Université de Bordeaux I.

Ratsimba-Rajohn H. (1992) : *Contribution à l'étude de la hiérarchie implicative. Application à l'analyse de la gestion didactique des phénomènes d'ostension et de contradictions*, Thèse de l'Université de Rennes I.

Ratsimba-Rajohn H. (1995) : *Les macles de contradictions : outils d'aide à l'analyse didactique et instrument de gestion de situation didactique*, in *Les débats du séminaire de didactique des mathématiques, Actes du séminaire national 1993-1994*, ouvrage coordonné par Claire Margolinas, La pensée sauvage, Grenoble, 1995, pp. 103-112.

Reuchlin M. (1977) : *Psychologie*, PUF, Paris.

Reymonet C. & Tonnelle J. (1996-1997) : *L'évaluation externe*, Petit x n°43, IREM de Grenoble, pp. 5-26.

Schubaueur-Leoni M. - L. & Ntamakiliro L. (1994) : *La construction de réponses à des problèmes impossibles*, Revue des sciences de l'éducation, vol. XX, n°1, pp. 87-113.

Sensevy G. (1994) : *Institutions didactiques, régulation, autonomie. Une étude des fractions au cours moyen*, Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille I.

Sensevy G. (1996) : *Le temps didactique et la durée de l'élève. Étude d'un cas au cours moyen : le journal des fractions*, Recherches en didactique des mathématiques, 16/1, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 7-46.

Stevin S. (1585) : *La disme*, reproduction de l'édition des œuvres de S. Stevin par A. Girard (1634), in *Reproduction de textes anciens I*, IREM Paris VII, 1980.

Tadié J-Y. & Tadié M. (1999) : *Le sens de la mémoire*, Gallimard, Paris.

Taylor C. (1995) : *Suivre une règle*, *in* Critique n° 579/580, Éditions de minuit, Paris, pp. 554-572.

Tiberghien G. (1994) : *Psychologie de la mémoire humaine*, in Sciences humaines n°43, pp. 25-28.

Vergnaud G. (1981) :*Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques*, Recherches en didactique des mathématiques, 2/2, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 215-232.

Vygotski, L. (1978) : *Mind in society, thedevelopment of higher psychological processes,* Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, London, England.

Vygotski, L. (1933-1934 ; 1985) : *Le problème de l'enseignement et du développement mental à l'âge scolaire*, in *Vygotsky aujourd'hui*, sous la direction de B. Schneuwly et J-P Bronckart, Delachaux & Niestlé, Neuchâtel-Paris, pp. 95-117.

Vygotski, L. (1934 ; 1985) : *Pensée et langage*, Messidor / Éditions sociales, Paris.

ANNEXES

ÉLÈVES POST COURS DES 16 ET 17 MARS 1999 INTERROGÉS LE 18 MARS

Binôme 1

1. Q : Racontez-moi le cours de mardi, le morceau de mercredi, l'interro écrite, etc. Alors, le cours de mardi pour commencer en suivant l'ordre chronologique…
2. Aurélie : On n'a fait que des exos.
3. Alexandre : Oui, on n'a fait que des exos.
4. Aurélie : Avec des limites, des dérivées, études de fonctions.
5. Q : Qui portaient tous sur l'exponentielle ?
6. Aurélie et Alexandre : Oui.
7. Q : Et des difficultés ? Des problèmes ? Des nouveautés ?
8. Aurélie : Non. C'est la même méthode que d'habitude.
9. Q : Oui. Rien ne change ?
10. Aurélie : Non, pas spécialement.
11. Q : Sauf ; les propriétés changent…
12. Aurélie : Oui, voilà…Mais on étudie les variations. On fait d'abord le dérivée, le signe de la dérivée… Puis on fait les limites.
13. Q : Et l'interro d'hier, ça portait sur quoi ?
14. Alexandre : Fonction exponentielle.
15. Aurélie : Oui, c'était vachement long.
16. Q : Ah bon !
17. Aurélie : C'était pas très dur quoi, mais très long. C'était plusieurs études de fonctions qui retombaient plus ou moins les unes sur les autres.
18. Q : C'est-à-dire ?…
19. Aurélie : Ben, il fallait étudier le signe d'une fonction. D'abord étudier les variations de la fonction et après étudier le signe en cherchant pour quelles valeurs g(x) était égal à 0. Et après, fallait se resservir de ça pour une troisième partie où on nous demandait d'exprimer en fonction de g(x), donc commencer à mettre les variations de g(x)…
20. Q : Ah oui ! Parce que quand on dérivait g(x) on retombait sur la fonction peut-être ?…
21. Aurélie : Oui.
22. Q : Et c'était quoi comme fonction f ?
23. Aurélie : C'était e^{x2}, un truc comme ça.
24. Alexandre : Moins quelque chose.
25. Aurélie : Oui, c'était $-x^2$; e^x-x^2.
26. Alexandre : Elle était pas…
27. Q : Oui, P a été sympa. C'était gentil. Et donc il fallait étudier les variations. Après, déterminer le signe de cette fonction ?…
28. Aurélie : D'abord, en fait elle était dessinée… En fait, elle était tracée sur une feuille de papier millimétrée, quoi, qu'on nous avait distribuée. Fallait l'étudier un peu par rapport au tracé qu'on nous donnait.
29. Alexandre : Construire une tangente.
30. Aurélie : Hmm, construire une tangente qui passe par l'origine et après fallait faire… l'étude de la dérivée de la fonction.
31. Alexandre : Oui, oui, c'est ça.
32. Q : Et quand on dérivait, on retombait sur cette fonction, la deuxième fonction ?

33. Aurélie : Euh, non.
34. Q : Et y'avait pas que ça quand même ?…
35. Aurélie : Non, non. Et après, y'avait une deuxième partie où il fallait chercher les valeurs de la tangente passant par l'origine.
36. Q : L'équation ?
37. Aurélie : Oui, l'équation. On savait qu'elle passait par l'origine, donc il fallait trouver l'équation. Et après, en troisième partie, y'avait encore une étude de fonction. C'était $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, et donc ça se simplifiait dans le rapport et on retombait sur ce qu'on avait étudié juste au-dessus, quoi.
38. Q : C'était finalement qu'un seul problème en plusieurs parties ?
39. Aurélie : Oui, c'était un sujet de bac de 84.
40. Q : Et dans l'ensemble, ça a marché ?
41. Aurélie : Ben moi, j'ai pas fait les deux dernières questions.
42. Q : Ah bon, pourquoi ? Par manque de temps ?
43. Aurélie : Oui.
44. Q : Et toi ?
45. Alexandre : Moi, c'est pareil. J'ai pas fait les deux dernières questions aussi.
46. Q : Et les deux dernières questions, c'était ?…
47. Aurélie : Dans la dernière, il fallait tracer la courbe, mais il fallait faire autre chose, un autre truc avec, et j'ai pas eu le temps. Et la question d'avant, il fallait trouver laquelle était au-dessus de laquelle…
48. Q : Il fallait comparer deux fonctions ?
49. Aurélie : Oui, voilà.
50. Q : Et ensuite, vous avez fait cours après un heure et quart d'interro ?…
51. Aurélie : Oui. Sur les fonctions exponentielles.
52. Q : Quoi par exemple ?
53. Aurélie : Ben logarithme en base 10, qu'on se sert en physique.
54. Q : Que la base 10 vous avez fait ? !
55. Aurélie : Oui, en base a !
56. Q : Et l'exponentielle aussi ?…
57. Aurélie : Oui, un peu je crois.
58. Alexandre : On a vu un peu l'idée des puissances.
59. Aurélie : Oui voilà.
60. Q : a^x ?…
61. Aurélie : Oui *(dubitatif)*.
62. Q : P a donné la définition ?
63. Aurélie : Oui *(dubitatif)*.
64. Q : Qu'est-ce que vous avez fait sur le logarithme de base a ?
65. Aurélie : Ben, on se rappelle plus ! [rires]
66. Alexandre : Juste la formule. C'était logarithme de c sur logarithme de a.
67. Q : Oui, logarithme de <u>x</u>…
68. Alexandre : Oui : logarithme de x…
69. Aurélie : Sur logarithme de a.
70. Q : Et après, vous avez étudié ces fonctions ?
71. Aurélie : Ben, pas trop. On n'a pas trop eu le temps en fait, autant que je me souvienne.
72. Q : En trois quarts d'heure ? !…
73. Aurélie : Le temps que P ramasse les copies !…
74. Q : En une demie heure ?…

75. Aurélie : Oui, une demie heure. On a cherché… On a tracé sur nos calculatrices lnx sur ln2 et on a vu que c'était symétrique de ln1/2…, que c'était symétrique par rapport à l'axe des x. Puis voilà !
76. Q : P va continuer mardi ?
77. Aurélie : Oui.
78. Q : Donc vous avez terminé le chapitre j'imagine ?…
79. Aurélie : Ben oui.
80. Q : Qu'est-ce que P vous a dit qu'il restait ?
81. Aurélie : P a rien dit.
82. Q : Donc pour l'interro, vous pensez vous en être tirés correctement en dehors de ce manque de temps ?
83. Aurélie : Oui, moi y'a une limite que j'ai pas trouvée.

Binôme 2

1. Q : Dites-moi un peu le cours de mardi et ce qui s'est passé mercredi.
2. Sarah : Mardi, c'était heu… Mardi, qu'est-ce qu'on a fait déjà ?… Ah ben, on a corrigé des exercices sur la fonction exponentielle, puis on en a fait d'autres et c'était essentiellement, comme on l'avait dit la dernière fois, des simplifications d'écritures, après, y'avait des calculs de dérivées, puis des calculs de limites et puis des études de fonctions.
3. Q : Oui, tu avais su faire dans l'ensemble ?
4. Sarah : Dans l'ensemble ?…Ben, les exos sur les limites, je les ai pas faits parce que je les avais pas pris et sinon, le reste… Non, j'ai eu du mal quand même, parce que c'était le début et qu'on n'en avait pas encore faits, tout ça, donc je m'étais pas habituée, comme j'avais dit la dernière fois, à ce que ce soit l'opposé de la fonction logarithme, et tout… Donc, non ça a pas trop marché les exos que j'avais faits. Mais sinon, après, quand j'ai commencé à faire les premiers exercices, et tout, quand il a fallu faire les recherches de limites, et puis les études de fonctions, là ça allait.
5. Q : Donc à l'interro, comment ça s'est passé ?
6. Sarah : Mal !…[rires]
7. Q : Ah bon ! Pourquoi ?
8. Sarah : Parce que c'était… J'ai eu des problèmes sur… Ouais sur, euh…À partir de… Je sais pas en fait. Je me suis perdue à un moment et puis après, y'a tout qui… Mais enfin, quand je dis mal, c'est que j'ai pas réussi à tout faire et puis en plus, ce que j'ai fait, je pense que c'est bon mais j'ai pas réussi à tout faire, donc c'est pas bien…
9. Q : Oui, mais c'était long, non ?
10. Sarah : Eh oui, c'était long !
11. Q : Et qu'est-ce que tu as fait alors dans cette interro ?
12. Sarah : Ben, j'ai fait tout ce qui était tableaux de variations de fonctions, tout ça. Et puis,…
13. Q : Et les limites ?
14. Sarah : Et les limites…
15. Q : Tu as réussi à les faire ?
16. Sarah : Y'en a une que j'ai pas réussi à faire, dans le II.
17. Q : Qu'est-ce que c'était ?
18. Sarah : La fonction, je m'en rappelle plus… La fonction c'était… Parce que y'en avait plusieurs de parties… Euh… Ah oui, c'était $-x_0(x-1)+e^{x0}$ je crois. Et donc là, j'ai eu un problème à la limite en $+\infty$. Parce que, bon, en plus y'avait une indication qui disait…
19. Ludivine : Ah non, c'est pas ta fonction !

20. Sarah : Bon, enfin, y'avait une indication qui disait e^x, on admettra que la limite de $\frac{e^x}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$ c'est $+\infty$. Donc j'ai commencé à factoriser, et tout, et je me retrouve bien avec un produit de deux termes où y'avait $\frac{e^x}{x^2}-\frac{e^x}{x}$. Donc ça me faisait une forme indéterminée $+\infty-\infty$. Donc je me suis dit c'est pas possible et tout. J'ai cherché comment faire. Au lieu de factoriser, je faisais d'autres trucs et tout…
21. Q : Tu n'as pas pensé à factoriser par $\frac{e^x}{x^2}$?…
22. Sarah : Ah !… Non., oui j'ai pas pensé à ça. J'ai pensé à $\frac{e^x}{x}.\ \frac{e^x}{x^2}$ j'en sais rien. Enfin, sinon après y'avait un truc sur… C'était…
Ludivine : L'asymptote.
23. Sarah : Ah oui ! Montrer que le signe de g'(x) est égal au signe de –u(x). Alors là, blocage ! Je sais pas pourquoi ? Ça devait être facile, mais j'ai pas réussi à montrer que c'était les signes… Enfin que les variations étaient pareil, et tout. Du coup, après la suite de ça quoi, donc j'ai pas…
24. Q : Alors ça t'a bloqué ?
25. Sarah : Oui, après on me demandait le tableau de variations donc, du coup, on m'affirmait que les variations étaient comme ça, je pouvais le faire, mais… On voyait des trucs qui bloquaient au niveau de la fonction quoi… Parce que la fonction, elle faisait ça, comme ça, comme ça *(Sarah dessine du doigt une courbe fictive)* et que là elle coupait 0 en un point, et là je pensais qu'elle recoupait pas 0… Du coup ça m'a mis en l'air le tableau de variations. Et puis après, y'avait une recherche d'asymptote oblique que je pouvais pas faire parce que j'avais pas pu faire le reste avant. Voilà quoi ! Ça a pas super bien marché.
26. Q : Et ensuite y'a eu le cours ?
27. Sarah : Oui, sur les autres fonctions logarithmes. Et là, je peux pas vous en dire plus [rires]…
28. Q : Tu as pas regardé ?…
Sarah : Après le test, c'était…
29. Q : Trop préoccupée par le test ?…
30. Sarah : Ah ouais, ouais, ouais… Ah non, ça m'a démoralisé ! J'avais révisé et tout… Et puis voilà, quoi !
31. Q : Tu es déçue, donc, de l'interro ?
32. Sarah : Ouais, ouais. Déçue de moi.
33. Q : Tu l'attribues à quoi ?
34. Sarah : Je l'attribue à quoi ? Ben…À mon travail quoi, mes révisions…
35. Q : Ben si tu l'avais vachement révisé…
36. Sarah : Ouais, mais j'avais peut-être pas révisé dans le bon sens, mais j'avais révisé tout ce qui était… Ben, tous les exercices qu'on avait faits, les limites, tout ça. Mais j'avais pas re-regardé comme suivre jusqu'au bout une étude de fonction, pour les asymptotes. Je me rappelais plus comment on recherchait une asymptote oblique, et puis… Ah non, c'est de ma faute hein ?
37. Q : Sur l'asymptote oblique… Mais sur le reste, sur les calculs de limites, les trucs comme ça, tu avais révisé, non ?
38. Sarah : Ah ouais !
39. Q : Donc en dehors de la formule qui donne les asymptotes obliques.
40. Sarah : Ouais.
41. Q : Mais ça, vous l'aviez fait ? Parce que la recherche de l'équation d'une asymptote oblique… Ou bien on donne l'équation de la droite et on demande de vérifier, montrer, que

cette droite est asymptote. Donc la recherche des coefficients, vous l'aviez fait en cours ça ?
42. Sarah : Non.
43. Q : Comment tu pouvais te débrouiller alors, pour la recherche de l'asymptote oblique ?
Sarah : Ben, je sais pas…
44. Q : On te donnait l'équation, non ?
45. Sarah : Non, non, non. Ben, on pouvait le savoir !
46. Q : Oui, mais toi tu dis que vous l'avez pas vu !…
47. Sarah : Oui mais parce que je l'avais fait sur… Quand on avait fait… Après les limites et les dérivées, sur le livre, je m'étais fait une fiche pour les asymptotes et je me rappelle, y'avait un truc sur les asymptotes obliques et tout, comment chercher. Et puis j'ai oublié…
48. Q : Oui, mais si on met de côté l'asymptote oblique, ça n'entraînait pas, quand même, la suite du problème ? C'était pas…
49. Sarah : Non, mais… Oui bon, alors c'étaient pas les révisions. Alors c'était moi quoi, parce que je suis pas assez futée pour le faire quoi. Je sais pas.
50. Q : Tu avais refait les exos ou tu les avais regardés ?
51. Sarah : Ah non, non : je les avais refaits intégralement. Je regarde pas…
52. Q : Tu avais pas lu simplement le corrigé ?
53. Sarah : Non, non, non. J'avais tout refait.
54. Q : C'est décourageant !
55. Sarah : Eh oui, c'est décourageant ! En plus c'était le soir même qu'on les ait faits, donc je les avais même pas re-regardés quoi. Je les avais directement faits. J'avais tout bien fait et tout, et puis j'arrive au test, et j'y suis pas arrivée… Voilà ! Mais bon, ça portait pas que sur ça, donc c'est pour ça !
56. Q : Dommage !
57. Sarah : Voilà ! Mais sinon sur les fonctions, sur les autres fonctions logarithmes…
58. Q : Oui, là tu as pris le cours mais… C'est comme si… C'est tout pareil !
59. Sarah : [rires]… Non, c'est comme si je l'avais pas pris quoi !

ÉLÈVES POST COURS DES 23 ET 24 FÉVRIER 1999 INTERROGÉS LE 25 FÉVRIER 1999

Binôme 1

1. Q : Je voulais vous demander ce que vous aviez retenu des deux heures de cours que vous avez eues l'autre jour. Est-ce que vous pouvez vous souvenir de ce qui s'est passé ?
2. Aurélie : Que la limite de xlnx est égale à 0 quand x tend vers…, je sais plus.
3. Alexandre : On a étudié tout ce qui était limite avec différentes fonctions logarithmes. On a étudié la courbe.
4. Aurélie : La limite de lnx sur x quand x tend vers $+\infty$, c'est 0.
5 Q : Oui. Et puis en dehors de ça ?
6.Aurélie : Ben… *(long silence).*
7. Q : En deux heures de cours, vous avez vu autre chose que cette simple limite…
8. Aurélie : On a fait quelques limites quoi. À chaque fois on revenait à cette limite ou on essayait de simplifier pour essayer de résoudre les limites, quoi.
9. Q : Avec quel but ?
10. Alexandre : Je sais pas. En connaître plus… je sais pas… concernant le logarithme.
11. Q : Et avant d'attaquer le cours, la partie de cours sur les limites ?…
12. Aurélie : On a corrigé les exercices.
13. Q : Oui, vous aviez su les faire ?
14. Alexandre et Aurélie : Oui.
15. Q : Vous avez appris quelque chose de la correction des exos par rapport à ce que vous aviez fait, par rapport à ce que P a dit ?
16. Aurélie : Non. Enfin, les fautes qu'avait faites l'élève, moi je les avais pas faites.
17. Q : Oui, et ensuite, quand il y a eu le cours proprement dit, puisque P vous a donné des exos à chercher, est passé voir le travail des uns et des autres, là, vous faisiez quoi ? Vous aviez réussi à trouver la méthode de calcul de la limite de logarithme de x sur x ?
18. Aurélie : Non.
19. Q : Parce qu'il me semble que P a donné… Enfin, il me semble qu'à ce moment-là, il y a eu des tentatives dans la classe pour arriver à lever l'indétermination.
20. Aurélie : Oui, ben en fait, dans notre groupe quoi, chaque fois on essaie de tous se mettre ensemble pour trouver…
21. Q : Oui. Et vous aviez essayé des méthodes ?
22. Aurélie : Oui, ben la méthode, pareil que sinus x sur x. Ça marchait pas du tout.
23. Q : Et toi ? Vous étiez dans le même groupe ?
24. Alexandre : Oui, oui.
25. Q : En fait, je me souviens plus. Y'a quelqu'un qui a eu l'idée de la méthode ou c'est P qui a ?…
26. Aurélie : Non, c'est Sylvain, le redoublant, qui a eu l'idée…
27. Q : Oui, lui, il avait l'air de se souvenir et d'être bien dans le bain. Et à votre avis, ces méthodes-là, enfin qu'est-ce que vous en tirez comme conclusion avec $\sqrt{x}$?
28. Aurélie : Ben, qu'elle permet de lever l'indétermination souvent, quoi, quand on nous demandera de trouver des limites.
29. Q : Et les limites que vous avez établies en cours, celles-là, vous voyez pas à quoi elles peuvent servir ? Non. Et là, vous allez continuer par quoi maintenant ? Hier, vous avez fait quoi ?
30. Aurélie : Hier, on a corrigé le bac blanc. On a fait de la géométrie dans l'espace.
31. Q : Oui, et vous allez recommencer le logarithme ?…

32. Aurélie : Mardi.
33. Q : Mardi et mercredi prochains je crois.
34. Aurélie : Mercredi, on a test.

Binôme 2

1. Q : Je voulais te demander un petit peu ce que tu retenais de la dernière fois, quand je suis venu filmer, ce qu'il s'est passé… que tu me racontes en gros ce que vous avez fait dans le cours.
2. Sarah : Heu, qu'est-ce qu'on a fait en cours ?…
3. Q : Enfin, quand je dis « cours », c'est toutes les deux heures.
4. Sarah : Oui, oui, bien sûr. Ben, on a corrigé les exercices sur les équations, donc, heu…
5. Q : Tu avais su les faire ?
6. Sarah : Oui, mais la première j'avais pas su la faire parce que je m'étais trompée dans le lnx +, heu, je sais pas combien, +lntruc égale… Moi, j'avais fait, en fait… J'avais fait comment ?. Oui, j'avais mis x+3 plus, au lieu de multiplier en fait.
7. Q : D'accord.
8. Sarah : Donc je m'étais trompée sur ce point-là et puis sinon, le reste, ça allait. Et après les exercices, on a continué la leçon, et heu… sur, heu… Je me rappelle plus !… Alors ça !… Vous pouvez pas m'aider, j'ai un petit trou…
9. Q : Il me semble que P a fait chercher des limites.
10. Sarah : Ah oui, voilà ! Alors, les limites, heu… Ça, on l'avait fait déjà. On avait étudié les limites de ln, de la fonction lnx, puis, on continue sur, sur, heu… *(long silence)* Oh !…
11. Q : Ben, il me semble que P vous a donné des limites à chercher. Ensuite vous vous êtes engagés dans ce travail-là. Des petits groupes ont travaillé. P est passée dans les rangs voir un petit peu comment vous essayiez de vous en sortir.
12. Sarah : C'était la limite de… De quoi déjà ? Ah oui ! Oui, oui : en fait, limites de fonctions composées.
13. Q : Oui, alors ?
14. Sarah : Je pense que c'était xlnx, $(\ln x)^2$, … Je vous avoue franchement que j'ai bien compris, en fait, et que… il fallait que je revoie le cours parce que, parce que j'ai du mal avec les limites et que, et que en plus avec ln de x… [rire]
15. Q : Oui, oui, oui.
16. Sarah : Mais oui, en fait c'était des fonctions composées, et donc, y'avait comme fonction, $(\ln x)^2$ et puis… qu'est-ce qu'y avait encore ?…
17. Q : Tu te souviens de la raison d'être de ces calculs de limites, pourquoi P se posait des questions de ce type-là ?
18. Sarah : [rire] Telle est la question ! [rire] Heu. Pourquoi on s'est posé la question ?
Ludivine arrive à ce moment dans la pièce. Tu arrives au bon moment !
19. Q : Voilà, je lui ai simplement demandé si tu te souvenais de ce que vous aviez fait pendant les deux heures où je suis venu, l'autre jour, filmer dans la classe.
20. Ludivine : Oui, on a corrigé les exercices et on a continué le cours.
21. Q : Sur les exos alors, attends, sur les exos ?
22. Ludivine : Sur les exos, on a corrigé les équations. Et, alors attendez, le cours ?
23. Q : Tu avais su les faire ces exos ?
24. Ludivine : Oui, ça va, oui.
25. Q : Est-ce que la correction t'a appris quelque chose ?
26. Ludivine : Oui, quelques trucs.
27. Q : Oui, quoi par exemple ?

28. Ludivine : Ah oui ! J'ai fait une erreur dans le premièrement là, oui. J'ai mis ln de… j'ai mis plus au-lieu de multiplié. Et puis aussi, y'avait, dans le dernier, y'avait ln de truc moins ln de un nombre ; moi, en fait pour le signe, j'avais mis ça sous forme de fraction…
29. Q : Oui.
30. Sarah : Ah oui ! Moi, en fait, c'était la même chose !
31. Ludivine : Alors il fallait en fait que les deux termes, le numérateur et le dénominateur, soient positifs. Moi, j'avais pris la fraction dans l'ensemble.
32. Q : Oui, d'accord. Donc, y'avait eu un problème au niveau de l'ensemble de définition de l'équation, quoi ?
33. Sarah et Ludivine : Oui.
34. Q : Donc en fait, vous aviez cherché des solutions… vous aviez trouvé des solutions qui n'étaient pas forcément dans le domaine de définition de l'équation.
35. Ludivine : Mmm.
36. Q : Toutes les deux ? Toi aussi ?
37. Sarah : Oui.
38. Q : Oui, vous l'aviez fait ensemble ?
39. Ludivine : Moi en fait, j'ai compris, grâce à l'exercice, que les solutions dépendaient de l'ensemble de définition que j'avais pas pris en compte.
40. Q : Oui, ça c'est le grand truc, hein ? Oui, c'est ça. Oui, alors, après ?
41. Sarah : La leçon !… [rire]
42. Q : Oui, y'avait du cours ! Alors, vas-y !
43. Ludivine : On étudié le ln ! [rire] La leçon ? La leçon ?… Heu. Aide-moi ! [rire]
44. Sarah : Tu vois, c'est dur, hein ! C'était chercher des limites de fonctions…
45. Ludivine : Oui, en $+\infty$ et en 0 !
46. Q : Oui, quelles fonctions ? Tu t'en souviens ?
47. Ludivine : Oui ! lnx sur x, en fait, on a cherché… On a simplifié. On a dit que limite de xlnx quand x tend vers 0 égale 0 et que limite de lnx sur x quand n tend vers $+\infty$, c'est $+\infty$.
48. Q : Mouais, c'est ça ?
49. Sarah et Ludivine : Non. [rires]
50. Ludivine : Non, c'était 0.
51. Sarah : C'était 0, oui.
52. Q : Tu te souviens pourquoi P, on s'est arrêté là tout à l'heure, pourquoi P se posait la question de la limite de ln de x sur x ?
53. Ludivine : Ben, parce que, en fait la courbe, elle tend vers $+\infty$, mais on dirait qu'elle… heu…
54. Sarah : Ah oui, voilà ! C'était en fait pour comparer…
55. Ludivine : … les tangentes puisqu'elles…
56. Sarah : ln de x à… à la courbe de ln de x…
57. Ludivine : Au début on dirait qu'elle…
58. Sarah : Pour voir comment elle tendait vers $+\infty$
59. Ludivine : Voilà ! Au début elle est vraiment croissante, et après elle a tendance à faire… elle monte comme ça.
60. Q : Oui, voilà. Et donc vous avez donc vu limite de ln de x sur x en l'infini, après ?…
61. Ludivine : xln de x
62. Q : xln de x… Après, vous avez fait d'autres choses, il me semble. Non ?… Toi, tu te souvenais d'autres choses…
63. Sarah : $(\ln x)^2$… non…
64. Q : En fait P vous a fait chercher ces limites, etc… Y'avait des petits groupes qui travaillaient. P est passée dans les rangs, y'a eu des propositions de solutions. Y'en a qui ont trouve, etc. Vous, vous étiez dans quelle catégorie, là ?

65. Ludivine et Sarah : [rires]
66. Sarah : Ceux qui avaient du mal plutôt !
67. Ludivine : Boh ! Moi, j'ai compris… J'avais compris. J'ai pas anticipé le… cours quoi.
68. Q : Non, mais y'en a un, il me semble, qui se souvenait.
69. Sarah et Ludivine : Oui, mais lui c'est un redoublant ![rires]
70. Q : Oui, oui. Et à votre avis, ça sert à quoi ce cours ?
71. Sarah : Des relations…
72. Q : Oui, P a posé des exos à la fin de l'heure, il me semble…
73. Ludivine : Oui, oui, oui. Mais P les a reportés en fait…
74. Q : C'était sur quoi ces exos ?
75. Ludivine : Ça doit être sur les tangentes je pense, sur les limites… $+\infty$…
76. Sarah : Oui, ça doit être sur les tangentes.
77. Ludivine : Oui, c'est sur les limites, P les a donnés au tableau.
78. Sarah : Ah ! c'était sur les limites…
79. Q : Moi, je vous cache pas que je me souviens pas bien parce que j'étais préoccupé par la caméra, les cassettes, etc.
80. Ludivine : Non, c'était sur les limites de quelques fonctions.
81. Q : Oui. Et vous avez une idée de l'utilité de ce genre de choses ?
82. Ludivine et Sarah : Pff…
83. Q : Enfin de ce chapitre, de toute cette partie quoi, des limites du logarithme ?
84. Sarah : Ben, c'est pour les études de fonctions.
85. Ludivine : Voilà, moi je pense aussi que c'est pour des études de fonctions différentes des autres. Il faut …
86. Sarah : Savoir étudier les limites de la fonction logarithme, c'est important pour les problèmes…
87. Q : C'est-à-dire que dans les problèmes, on peut vous donner des fonctions avec la fonction logarithme et d'autres fonctions dedans et… .D'accord. Et là, depuis le cours, vous ne l'avez pas retravaillé ? Comment est-ce que vous vous y prenez pour bosser les maths.
88. Ludivine : Ben, ça dépend… Y'a des jours par exemple… Là par exemple, on a un test de physique-chimie et on a plus travaillé la physique-chimie que de relire le cours…
89. Sarah : Oui, ce week-end…
90. Ludivine : Oui, ce week-end… Voilà, on s'organise comme ça, quoi. Ça dépend des tests, des devoirs qu'il y a à faire dans les autres matières…
91. Sarah : Y'a pas qu'une seule façon de travailler parce que si on doit le voir le soir même…
92. Q : Je sais pas moi, là…
93. Sarah : Non, mais c'est pour dire… Le soir même… Le mieux c'est de tout revoir le soir même mais là, pff… Mais sinon, pour travailler, moi je regarde ce qu'on a fait, j'essaie de comprendre et après je fais les exos sans regarder…
94. Q : C'est-à-dire que vous commencez par relire le cours.
95. Sarah : Ah oui, oui, oui là c'est sûr On fait des fiches quoi, moi je fais des fiches et après j'essaie de faire des exos sans rien quoi.
96. Q : D'accord. Donc d'abord l'apprentissage du cours…
97. Ludivine et Sarah : Oui, voilà.
98. Q : … et après les exos. Et les exos sans le cours ou bien ?…
99. Ludivine et Sarah : Sans le cours…
100. Sarah : Parce qu'il faut savoir bien le cours et…
101. Ludivine : Quand on sait pas, quand je sais pas moi, je regarde le cours [rire].
102. Q : Et le cours, c'est uniquement le cours de P, le cahier de cours ou bien vous regardez…

103. Ludivine : Ça dépend. Des fois quand je comprends pas très bien le cours, ça arrive quoi, je regarde sur le livre.
104. Q : C'est quoi, c'est le Terracher que vous avez ?
105. Ludivine : Non, c'est…
106. Q : C'est le même qu'en 1e, non ?
107. Ludivine : Non, c'est un nouveau, c'est un livre bleu, là.
108. Q : Ah oui, c'est leTransmath.
109. Ludivine et Sarah : Voilà !
110. Q : Et donc, lui, il vous aide le Transmath ?
111. Ludivine : Euh, au niveau des exercices, oui un peu. Y'a des exercices de Bac.
112. Q : Oui. Corrigés ?
113. Ludivine : Euh, non.
114. Q : Donc, vous vous lancez dans les exos sans avoir le moyen de vérifier si, ensuite, ce que vous faites est juste ou non. Y'a pas la correction ?…
115. Sarah : Si parce que les exos, moi, je refais ceux qu'on a faits mais sans regarder la correction de ce qu'on a fait, quoi. Après je fais des fiches et puis en complémentaire, soit des annabacs, soit des exercices corrigés…
116. Q : Oui, d'accord.
117. Ludivine : Je travaille sur les annabacs aussi.
118. Q : Et dans le Transmath, il me semble qu'il y a des exos typiques avec le corrigé. Vous les regardez ça de temps en temps ?
119. Ludivine : Oui, oui, oui. Des fiches jaunes ?
120. Q : Oui, voilà y'a des fiches…
121. Ludivine : Oui, ça je le fais.
122. Q : Ça, vous vous en êtes servis pour quoi ?
123. Ludivine : Pour les limites…
124. Sarah : Oui, un peu les limites et les primitives aussi, les tangentes…
125. Q : Dans le calcul algébrique, l'analyse quoi ?
126. Sarah : Oui.
127. Q : Et en géométrie, tu l'utilises ?
128. Sarah : Oui, en géométrie
129. Ludivine : Moi, moins. Quand on a fait barycentre, tout ça.
130. Sarah : Oui en géométrie, c'est vrai que… En fait, on fait un peu tout en même temps, quoi.
131. Ludivine : Là, on fait logarithme, barycentre et…
132. Q : Géométrie dans l'espace ?…
133. Ludivine : Dérivées et primitives…
134. Sarah : … Dérivées et primitives, et géométrie dans l'espace ! [rire] On a du mal à…[rire]. Alors comme ça, ça nous fait plein de choses l'une sur l'autre.
135. Q : Et donc, si je résume, quand vous étudiez votre cours, enfin quand vous avez des exos etc… que vous voulez apprendre les maths, vous commencez par lire le cours, éventuellement faire des fiches, ensuite faire les exos sans regarder le cours. Toi, tu disais j'essaie de les refaire, ceux qui sont corrigés, sans regarder la correction. Ça, c'est pour préparer une interro ?
136. Ludivine : Ah oui !
137. Sarah : Oui, mais même pour retravailler le cours d'un jour sur l'autre, pour bien comprendre.
138. Q : Là par exemple, on vous a donné quelques exos. Pour les faire, vous allez vous y prendre comment ?
139. Ludivine : Ah moi j'aime pas vérifier !

140. Q : En règle générale, vous faites comme ça ? Vous faites des fiches avant de commencer à faire les exos ?
141. Sarah : Ah oui, oui, oui. Oui, parce que c'est plus facile de retenir un cours quand on fait une fiche. Parce que c'est nous qui le faisons donc, heu, c'est nous qui sélectionnons …
142. Ludivine : Puis on met le principal.
143. Sarah : Oui, et puis avant de faire un exercice, il faut savoir le cours parce que sinon, c'est…
144. Q : D'accord. Et donc, sur ces fiches, vous y inscrivez quoi essentiellement ?
145. Sarah : Tout mais vraiment concentré quoi.
146. Q : Les démonstrations ?…
147. Ludivine : Les étapes quoi, l'organisation, les fiches particulières.
148. Q : Et les démonstrations, vous les mettez ?
149. Sarah et Ludivine : Non, non, non.
150. Ludivine : Non, je les lis. Je me reporte toujours à mon cours que j'ai fini.
151. Sarah : Oui, les démonstrations on les travaille sur le cours, mais on les transcrit pas.
152. Ludivine : Vu que au bac on n'a pas besoin de tout démontré, heu, les théorèmes…
153. Sarah : [rire]
154. Ludivine : Non mais c'est vrai…
155. Q : Et les exemples, vous les retranscrivez ?
156. Ludivine : Non, on les regarde.
157. Sarah : Oui, on les regarde.
158. Q : Donc, y'a définitions, théorèmes, propriétés…
159. Ludivine : Oui, oui, c'est ça.
160. Q : Courbe…
161. Ludivine : Oui et puis méthodes aussi. Des exercices types.
162. Q : Ah oui. D'accord. Et ça, c'est en exemple ou dans le cahier d'exos ?
163. Ludivine : Non, c'est sous forme de fiches.
164. Q : Non, mais dans le cours, comment tu les repères les exos types ?
165. Sarah : En les mélangeant, euh… Après le cours qui porte sur ça. Par exemple pour les asymptotes et les tangentes, après les dérivées, on avait fait des fiches…
166. Q : Mais ça, c'est P qui vous avait dit c'est des exos types ou…
167. Sarah et Ludivine : Non…
168. Q : Vous aviez repéré que…
169. Ludivine : Ben, c'est sur le livre justement.
170. Q : Ah oui, d'accord, dans le Transmath.
171. Sarah et Ludivine : Oui.

COPIES DE QUATRE ÉLÈVES SUR LA PREMIÈRE QUESTION DU PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE DE SECONDE DE L'ÉVALUATION EXTERNE DE L'IREM D'AIX-MARSEILLE EN 1995

Premier élève

Deuxième élève

Troisième élève

Quatrième élève

SUR LA CONSTRUCTION DES PROBLÈMES EXPOSÉS EN 3. 2.

À l'énoncé du problème prototypique de l'enquête internationale a été adjointe, pour ces trois problèmes, la question : « Vous êtes-vous servi de connaissances mathématiques étudiées cette année ? avant ? jamais ? Expliquez ? » ; ceci afin de recueillir des informations complémentaires permettant une explication du phénomène s'il s'avérait vérifié.

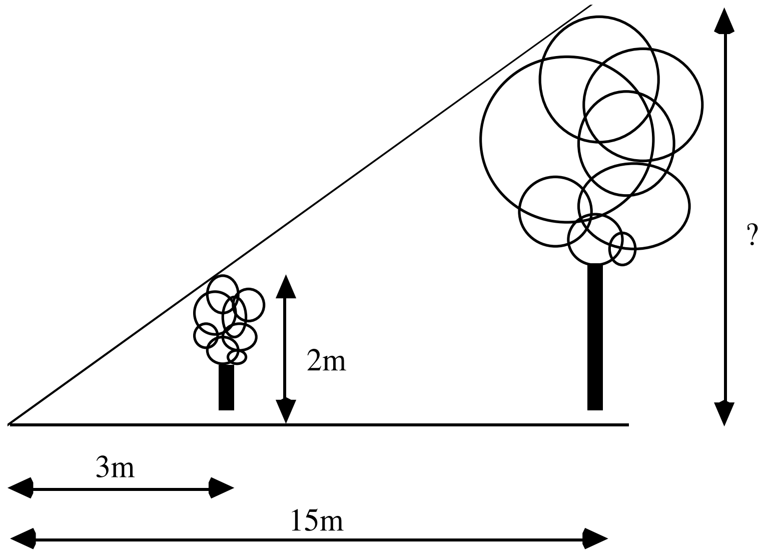
Le premier est le problème-type tel que posé en 1982-1983. Dans le deuxième problème, la projection n'est pas orthogonale et aucune indication n'est donnée : l'énoncé du 1er problème contient l'indication « Le dessin ci-dessus *montre* comment *Pierre utilise le petit arbre pour trouver la hauteur du grand* ».

Au travers la passation du troisième problème, voulait être testée l'hypothèse que les élèves, démunis du savoir relatif au théorème de Thalès, pouvaient cependant donner la réponse convenable en décodant la convention didactique en jeu ici. C'était donc en modifiant cette convention, en « brouillant les cartes », de manière à la rendre plus difficilement lisible que l'on pouvait vérifier si cela influait ou non sur les réponses données. Deux éléments étaient pris en compte pour réaliser cette modification de la convention : le premier est géométrique, le deuxième numérique.

Pour ces problèmes, l'énoncé donne trois nombres et demande d'en calculer un quatrième. Le théorème de Thalès fournit l'hypothèse (mathématique) sous laquelle il sera possible d'utiliser les trois nombres donnés pour calculer une quatrième proportionnelle : les droites doivent être parallèles. Ce parallélisme des droites, qui est une condition d'application du théorème de Thalès, est suggéré par les figures des problèmes. Il peut être considéré comme une « convention didactique » pour l'application du théorème de Thalès. Les élèves, avant enseignement du théorème de Thalès, décriptent-ils cette convention ? Le troisième problème qui, comme le deuxième, ne fournit aucune indication sur la manière de faire, est rédigé avec les mêmes nombres et posent la même question que les deux autres problèmes, mais dans un cas où l'on ne peut pas utiliser le théorème de Thalès, car les droites représentées par l'inclinaison des arbres ne sont pas parallèles.

Dans les pages qui suivent, on trouve les énoncés de ces trois problèmes :

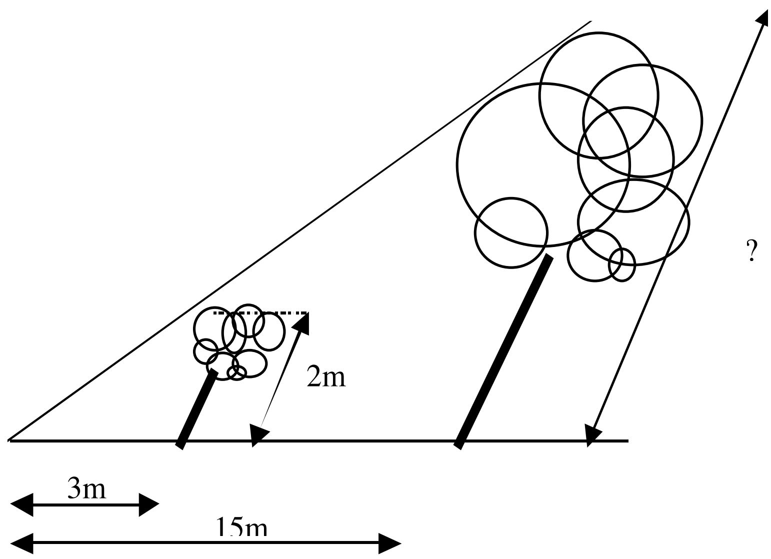
Premier problème :



Le dessin ci-dessus montre comment Pierre utilise le petit arbre pour trouver la hauteur du grand. Quelle hauteur va-t-il trouver ?

Vous êtes-vous servi de connaissances mathématiques étudiées cette année ? Avant ? Jamais ? Expliquez.

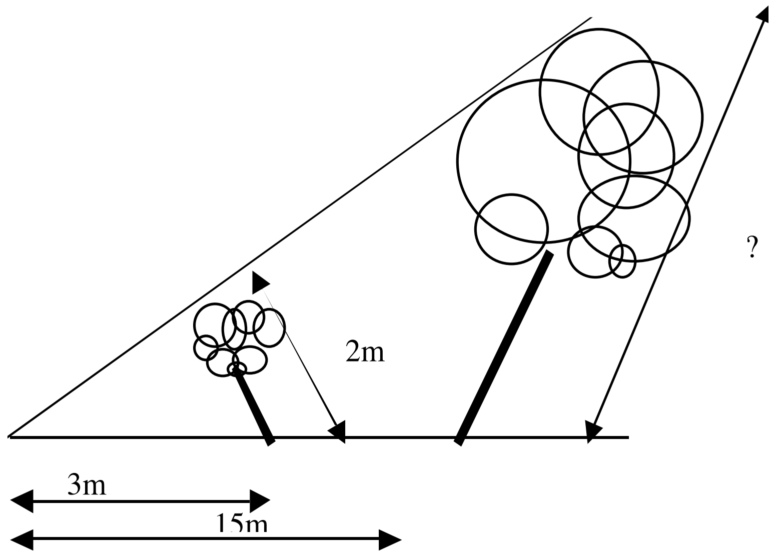
Deuxième problème :



Un petit et un grand arbre ont été couchés par le vent, comme l'indique ce schéma. Pierre a réussi à trouver la longueur du grand. Quelle longueur a-t-il trouvée ?

Vous êtes-vous servi de connaissances mathématiques étudiées cette année ? Avant ? Jamais ? Expliquez.

Troisième problème :



Dans ce schéma représentant un petit et un grand arbre, Pierre a réussi à trouver la longueur du grand. Quelle longueur a-t-il trouvée ?

Vous êtes-vous servi de connaissances mathématiques étudiées cette année ? Avant ? Jamais ? Expliquez.

COURS DU 5/2/98 : LOGARITHME, EXPONENTIELLE

1. *Un élève est désigné pour corriger les exercices donnés la veille. Il écrit* :

$(\ln x)^2+\ln x=2$
$(\ln x^2)+\ln x=2$
Puis :
$(\ln x)^2+\ln x=2$ **Df=]0;+∞[**
$\Leftrightarrow (\ln x)^2+\ln x-2=0$

Puis, en direction de P, il fait le geste d'un X à la place de lnx
2. P : « Bon. On reconnaît, tout le monde l'a pas reconnu, hein ?… une équation du second degré en logarithme de x. Logarithme de x est la solution d'une équation du second degré, d'accord ? Tu avais pas vu ça Nac.? … En fait, tu t'es débrouillé… »
3. Nac. : « Non, non, on n'avait pas vu ça »
4. P : « Tu l'avais pas vu, alors que tu l'as résolue quand même. Tu as écrit la forme canonique, c'est du second degré, ça! Tu as pas raccroché la forme canonique à du second degré »
5. *L'élève au tableau a écrit :*

On prend $\ln x=X$
$\Leftrightarrow X^2+X-2=0$
$\Leftrightarrow X=1$ ou $X=-2$

6. P : « Oui, j'aime pas beaucoup la façon dont tu l'écris. Regarde, pousse-toi. Quand tu écris un truc comme ça :

$A \Leftrightarrow B$

on doit comprendre, on doit être d'accord que si A est vrai B est vrai, et que si B est vrai A est vrai. Et si je regarde ça, je comprends rien *(P montre* **$(\ln x)^2+\ln x-2=0$** *et* **$\Leftrightarrow X^2+X-2=0$** . *P l'efface).*
Tu as deux solutions. Ou bien tu peux dire :
lnx est solution de $X^2+X-2=0$
Si tu veux l'écrire avec des mathématiques, tu dis : c'est pareil que de dire qu'il existe un nombre X qui vérifie $X^2+X-2=0$ et c'est logarithme de x :

$$\Leftrightarrow \exists X, \begin{cases} X^2 + X - 2 = 0 \\ X = \ln x \end{cases}$$

D'accord ? C'est un peu compliqué ; en terminale, vous pouvez vous contenter de faire ça *(P montre* **lnx est solution de $X^2+X-2=0$***)*
Tu résous ton équation. Bon, ça se fait sans calculs »
7. *L'élève écrit* :

$\Leftrightarrow X=1$ ou $X=-2$
$\ln x=1$

8. P : « C'est comment lnx=1 ?! Tu apprends ton cours de temps en temps ?! »
9. Un élève : « Canaille! »
10. *P continue de vérifier le travail personnel des élèves, tandis que l'élève au tableau écrit*:

$\Leftrightarrow$ lnx=1 ou lnx=-2
$\Leftrightarrow$ lnx=lne ou lnx=-2lne
$\Leftrightarrow$ x=e ou x=-2e

Puis après quelques secondes de réflexion et consultation de ses camarades, il efface -2e et écrit :

$\Leftrightarrow$ x=e ou x=e^{-2}

11. P : « C'est juste! Donc, ensemble des solutions ?… »
12. *L'élève écrit* :

S={e;e^{-2}}

13. P : « Bon, y'en a combien qui avaient trouvé ? 1, 2, 3 c'est tout ? 4! Alors, la deuxième maintenant. Tu la fais sur l'autre tableau. Tu me laisses celui-là » (*Tableau sur lequel est écrite la résolution de la première)*
14. *L'élève écrit* :

(lnx^2)+lnx=2
$\Leftrightarrow$ 2lnx+l

15. P : « Si tu parlais du domaine de définition, quand même ? »
16. *L'élève écrit* :

Df=]0;+∞[

puis reprend

$\Leftrightarrow$ 2lnx+lnx=2
$\Leftrightarrow$ 3lnx=2lne

Puis il réfléchit quelques secondes et écrit :

$\Leftrightarrow x^3=e^2$
$\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{e^2}$
$\Leftrightarrow x=\sqrt{e}$

17. P : « Quoi, quoi, quoi ? Tu simplifies par ln de…! »
18. *L'élève efface* **$x=\sqrt{e}$**
19. P : « Alors, écoute-moi! Qu'est-ce que ça veut dire $\sqrt[3]{e^2}$? Ça veut dire que si tu mets ce nombre-là au cube tu trouveras e^2, d'accord ? Si tu mets :

$(\sqrt{e})^3$

qu'est-ce que tu vas trouver ? Tu vas trouver…

20. L'élève : « $e\sqrt{e}$ »
21. P : « Tu vas trouver $e\sqrt{e}$, pas e^2

$$\mathbf{(\sqrt{e})^3 = e\sqrt{e}}$$

Attention!… Bon, c'est vrai qu'on n'a pas vu encore les puissances fractionnaires!… Ça va ?… C'est-à-dire que pour rédiger ça, on va plutôt rédiger, puisqu'on n'a pas vu les exposants fractionnaires… *(P rajoute)*

$$\mathbf{\Leftrightarrow 3\ln x = 2\ln e \Leftrightarrow \ln(x^3) = \ln(e^2)}$$
$$\mathbf{\text{Donc } x^3 = e^2 \text{ donc } x = \sqrt[3]{e^2}}$$

Bon, celui-là vous l'avez mieux réussi que l'autre. Alors, regardez ces deux équations. Evidemment, le gros truc, c'est ça *(P entoure* $(\ln x)^2$ et $(\ln x^2)$*)*. Qu'est-ce qu'on a fait, là? Dans les deux, on a composé la fonction logarithme avec la fonction carré. Seulement, on les a pas composées dans le même sens! Ici *(sous* $(\ln x)^2$*)*, on a d'abord fait ln et ensuite la fonction carré :

$$\mathbf{x \xrightarrow{\ln} \ln x = X \xrightarrow{\text{carré}} X^2 = (\ln x)^2}$$

(Puis sous ($\ln x^2$)).

$$\mathbf{x \xrightarrow{\text{carré}} x^2 = X \xrightarrow{\ln} \ln(X) = \ln(x^2)}$$

Ici *(sous* $(\ln x)^2$*)*, ça donne un polynôme de degré 2 où la variable a été remplacée par lnx:
X^2+X-2
Donc on est conduit à faire un changement de variable. En le voyant vous devez être capable de reconnaître que ça c'est un truc où lnx joue un rôle de variable. Donc d'abord je vais chercher lnx, c'est-à-dire que d'abord je vais travailler sur cette histoire de carré et après je travaillerai à ce niveau-là *(P montre* **lnx=X***)*. Alors qu'ici *(sous* $\mathbf{(\ln x)^2}$*)*, c'est logarithme de quelquechose plus logarithme de quelquechose égale 2. Je vais transformer ça, je sais transformer ça, en logarithme de machin égale logarithme de truc. Et donc tout de suite, en voyant ça, vous devez être capables, tout de suite, de comprendre que vous n'allez pas faire du tout la même chose… qu'ici *(sous*($\mathbf{\ln x^2}$)*)* vous allez vous ramener à logarithme de machin égale logarithme de truc :

$$\mathbf{\ln \blacksquare = \ln \bullet}$$

et ici *(sous* $\mathbf{(\ln x)^2}$*)* vous allez vous ramener à ça *(P montre* $\mathbf{X^2+X-2}$*)*, d'accord ? Alors quand vous avez une équation avec des logarithmes, c'est toujours l'un des cas qui se passe. Alors, on a vu que, hier, y'a un premier problème, toujours, c'est le problème du domaine de définition, c'est un problème très important. La deuxième chose qu'il faut voir, c'est que tantôt on se ramènera à ça *(P montre sous*($\mathbf{\ln x^2}$)*)*, et que tantôt on se ramènera à ça *(P montre sous* $\mathbf{(\ln x)^2}$*)*. Suivant que le logarithme joue un rôle d'inconnue, vous pouvez toujours vous ramener à une forme où le logarithme joue un rôle de variable. Ou bien alors, vous pouvez transformer votre équation en logarithme de quelque chose égale logarithme d'autre chose. Voilà, quand vous avez compris ça, vous pouvez faire toutes les équations en logarithmes possibles. Alors on va regarder des systèmes. »
22. *P écrit* :

$S_1\begin{cases}\mathbf{x + y = -2} \\ \mathbf{\ln x + \ln y = 1}\end{cases}$

$S_2\begin{cases}\mathbf{\ln x \times \ln y = -2} \\ \mathbf{\ln x + \ln y = 1}\end{cases}$

« Cherchez-moi ça »

P circule dans la classe, vérifie le travail et conseille les élèves

23. P : « Est-ce que vous avez fini le premier ? »
24. Des élèves : « Non »
25. P : « Vous m'étonnez! »
26. P : « Personne a fini le premier ? »
27. Des élèves : « Non »
28. P : « Vous avez commencé par écrire quoi ? »
29. Des élèves : « x+y=-2 »
30. P : « Ben, vous avez commencé par ce qu'il fallait pas! On a travaillé hier, qu'est-ce qu'on a dit ? D'abord on commence par voir une équation dans laquelle il y a des x et des y, avec des logarithmes… Qu'est-ce qu'on regarde d'abord ? En premier… »
31. Des élèves : « Le domaine de définition »
32. P : « Domaine de définition. Racontez-moi le domaine de définition… »
33. Des élèves : «]0;+∞[»
34. P : « x strictement positif, y strictement positif. Alors, question ?… Est-ce que je vais trouver des solutions à ça ? »
35. Des élèves : « Non »
36. P : « Ben non, évidemment! Si x et y sont dans le domaine de définition, x+y il risque pas d'être égal à -2 ! Vu ? Vous avez une tête pour penser, hein…

P écrit à droite de S_1 :

$\mathbf{S_1}\begin{cases}\mathbf{x + y = -2} \\ \mathbf{\ln x + \ln y = 1}\end{cases}$ **Df={(x;y)/** $\begin{matrix}\mathbf{x > 0} \\ \mathbf{y > 0}\end{matrix}$ **} sur Df, x+y>0 donc pas de solution**

Alors, qu'est-ce que vous allez m'écrire d'abord dans le deuxième ? »

37. Des élèves : « Domaine de définition »
38. P : « Ah! Bien! (rires) Je vais le faire

Df={(x;y)/ $\begin{matrix}\mathbf{x > 0} \\ \mathbf{y > 0}\end{matrix}$ **}**

Ensuite, deuxième réaction devant ça ?… »

39. Un élève : « On développe »
40. P : « C'est-à-dire, qu'est-ce qu'on va faire ?… »
41. Une élève : « Transformer »
42. P : « Ce qu'on va chercher d'abord, c'est quoi ?… C'est pas directement x et y ?… »
43. Des élèves : « Non »
44. P : « Bon, c'est-à-dire qu'on va résoudre :

$\begin{cases}\mathbf{XY = -2} \\ \mathbf{X + Y = 1}\end{cases}$

Somme et produit, comment on résout ça ? Vous vous rappelez ? X et Y sont les solutions de … »
45. Une élève : « x^2-Sx+P »
46. P : « J'ai plus de x… Qu'est-ce qu'on va mettre ? On va mettre ξ

$\boldsymbol{\xi^2 - S\xi + P = 0}$ **ξ : xsi**

Bon, alors la nôtre, c'est quoi ?

$$\boldsymbol{\xi^2 - \xi - 2 = 0}$$

Est-ce que ça a des solutions ?
47. Un élève : « Non, ça en a pas »
48. P : « Est-ce que ça a des solutions?… Allez, le second degré ?… Oui, parce que… »
49. Des élèves : « S et P… »
50. P : « Oui, parce que S et P sont de signes contraires. Allez, dépêchez-vous de trouver les solutions »
P circule dans la classe et répond aux questions des élèves, ou corrige leurs erreurs
51. P : « Bon, quelles sont les solutions de cette équation, ça y est ? »
52. Des élèves : « 2 et -1 »
53. P : « Bon

$\boldsymbol{\xi=2}$ **ou** $\boldsymbol{\xi=-1}$

Donc mon système-là, S_2, il devient équivalent à…

$\boldsymbol{S_2 \Leftrightarrow ((\ln x=2) \text{ et } (\ln y=-1))}$

Est-ce que j'ai fini ?… »
54. Des élèves répondent : « Non, lnx=-1 »
55. P : « Bon,…

ou ((lnx=-1) et (lny=2))

$$\boldsymbol{S_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^2 \\ y = \frac{1}{e} \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x = \frac{1}{e} \\ y = e^2 \end{cases}}$$

Bon, alors on va reprendre celui-là. On va mettre 1+e à la place :

$$\boldsymbol{S_3 \begin{cases} x + y = 1 + e \\ \ln x + \ln y = 1 \end{cases}}$$

56. *Des élèves discutent entre eux* : « Mais on l'a fait! Il a pas de solution ». « Non, on passe au domaine de définition, c'est ce que P a dit ». « Non, il a pas de solution »
57. P : « C'est S_3 »
58. *P circule dans la classe tandis que les élèves travaillent* :
« C'est drôle comme vous voyez pas les choses! ». « ax^2+bx+c ». « Comme c'est compliqué ce que tu fais! Ah voilà! Ça c'est clair au moins! ». « Tes signes me laissent rêveur! ». « Tu as deux nombres de somme positive et de produit positif, comment pourraient-ils être

négatifs ? ! ». « Bien ». « Bien ». « On vient de dire que le log, ça transforme les produits en sommes, pas les sommes en produits! ». « Non, c'est pas bon, c'est pas bon du tout »
59. *Une élève est envoyée au tableau sur lequel subsiste* :

$S_3\begin{cases}\mathbf{x+y=1+e}\\ \mathbf{\ln x+\ln y=1}\end{cases}$ $\qquad$ $\mathbf{Df=\{(x;y)/}\begin{matrix}\mathbf{x>0}\\ \mathbf{y>0}\end{matrix}\mathbf{\}}$

Elle écrit :

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\mathbf{x+y=1+e}\\ \mathbf{\ln xy=\ln e}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\mathbf{x+y=1+e}\\ \mathbf{xy=e}\end{cases}$$
$\mathbf{X^2-SX+P=0}$

60. P : « Bon, x et y sont solutions de l'équation X^2-SX+P=0 »
61. L'élève écrit :

$\mathbf{X^2-(1+e)X+e=0}$
$\Delta=$

62. P : « Bon, c'est pas la peine d'écrire Δ, parce que, quand même, c'est assez évident que les solutions de cette équation c'est 1 et e : la somme c'est 1+e et le produit c'est e! »
63. L'élève efface Δ et écrit :

S={1;e}
soit (x=1) et (y=e)

64. P : « Ils ont écrit ça sous formes de couples, on va l'écrire sous forme de couples »
P efface **soit (x=1) et (y=e)** *et écrit :*

$$\begin{cases}\mathbf{x+y=1+e}\\ \mathbf{xy=e}\end{cases}\Leftrightarrow \mathbf{((x;y)=(1;e))\text{ ou }((x;y)=(e;1))}$$

Il y a deux solutions qui sont deux couples

S={(1;e), (e;1)}

Si on a le temps, on va faire le suivant. Vous avez vu qu'on avait -2, ça marchait pas *(P parle de l'équation x+y=-2 de S_1).* On a mis 1+e, ça marche. Alors on va mettre m :

$\mathbf{S_4}\begin{cases}\mathbf{x+y=m}\\ \mathbf{\ln x+\ln y=1}\end{cases}$ $\qquad$ $\mathbf{Df=\{(x;y)/}\begin{matrix}\mathbf{x>0}\\ \mathbf{y>0}\end{matrix}\mathbf{\}}$ »

65. *P circule dans la classe tandis que les élèves travaillent.*
« Tu viens de le faire, refais la même chose Cam., franchement! ». « Oui, y'a m, et ben oui! ». « Oui, continue ». « Alors, toi tu y sautes à pieds joints ». « Oui, c'est juste ». « Y'a des gens qui ont la mémoire courte! ». « Pour avoir la solution, il va falloir que j'en envoie deux au

tableau. Y'en a un qui a la moitié de la discussion et l'autre l'autre moitié! ». « Bon, Rol. au tableau! Tu vas te forcer à écrire bien. ».
66. *Rol. écrit* :

1er cas m≤0 pas de solution
2ème cas m>0

$$\begin{cases} \mathbf{x+y=m} \\ \mathbf{\ln(xy)=\ln e} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x+y=m} \\ \mathbf{xy=e} \end{cases}$$

67. P : « Bien, on va se ramener comme tout à l'heure à un système somme et produit. Donc on résout l'équation… »
68. *Rol. écrit* :

X^2-mX+e=0
Δ=m^2-4e
1er cas $\Delta>0 \Leftrightarrow m>2\sqrt{e}$

69. P : « Voilà, là on recueille le fruit de notre astuce d'ici. On travaille avec m positif, alors $m^2>4e$, et bien, sur m positif c'est équivalent à $m>2\sqrt{e}$, d'accord ? Sur les positifs… ça tu l'avais pas écrit *(P s'adresse à un autre élève)* »
70. Cet élève : « Si, je l'ai écrit! »
71. P : « Tu l'as écrit dans ta tête, pas sur ton cahier… »
72. L'élève : « Non, je l'ai écrit sur mon cahier »
73. *L'élève au tableau a écrit* :

$$\mathbf{2s°\frac{m-\sqrt{m^2-4e}}{2}\ et\ \frac{m+\sqrt{m^2}}{}}$$

74. P : « Oh, que c'est mal écrit ça! » *et P efface*
75. *L'élève écrit sous la dictée de P* :

$$\mathbf{(x;y)=(\frac{m-\sqrt{m^2-4e}}{2};\frac{m+\sqrt{m^2-4e}}{2})}$$
$$\mathbf{ou\ (x;y)=(\frac{m+\sqrt{m^2-4e}}{2};\frac{m-\sqrt{m^2-4e}}{2})}$$

puis seul

2ème cas $\Delta=0 \Leftrightarrow m=2\sqrt{e}$
1 seul couple $(-\frac{b}{2a};-\frac{b}{2a})$
$(x;y)=(\sqrt{e};\sqrt{e})$
3ème cas $\Delta<0 \Leftrightarrow m<2\sqrt{e}$
pas de solution

76. P : « Regardez, quand vous êtes là *(P montre* $\begin{cases} \mathbf{x+y=m} \\ \mathbf{xy=e} \end{cases}$*)*, y'a quelquechose d'intéressant, c'est de regarder ça graphiquement en représentant un couple (x;y) par un point

du plan. Comment vous pouvez représenter ça graphiquement ? xy=e, ça vous donne quoi ? Quel est l'ensemble des points du plan de coordonnées (x;y) tels que xy=e ? »
77. Un élève : « Une droite »
78. P : « Ben oui. Alors on travaille sur x positif et y positif, donc on travaille seulement dans le quart des positifs *(P trace la branche positive de l'hyperbole)* le reste du plan on n'en veut pas. $y=\frac{e}{x}$, ça va donner une hyperbole et x+y=m, ça va donner quoi ?… »
79. Des élèves : « Une droite… »
80. P : « Une famille de droites qui va varier avec m. Alors elles sont comment ces droites ?… »
81. Une élève : « Elles ont toutes le même coefficient directeur »
82. P : « Elles ont toutes le même coefficient directeur, qui est ?… »
83. Des élèves : « -1 »
84. P : « -1. C'est-à-dire qu'elles sont comment ? Elles ont… »
85. Un élève : « Parallèles »
86. P : « Elles sont parallèles. On a une famille de droites parallèles en fait. *(P trace quelques-unes de ces droites)*. Voilà les droites x+y=m, m il est là *(P montre l'ordonnée à l'origine d'une de ces droites).* Vous voyez bien que quand est-ce que ça va couper. Ça va commencer par la tangente, puis après ça coupe en deux points. On voit bien que, à partir d'une certaine valeur, ben ça marche. *(P montre l'ordonnée à l'origine de la tangente).* Alors la valeur ici, c'est $2\sqrt{e}$. *(P complète la figure par les coordonnées ($\sqrt{e}$; $\sqrt{e}$) du point de contact de la courbe et de la tangente).* Si on voit ce système comme ça, on comprend tout de suite comment les choses vont se passer. Après on fait le calcul pour trouver les points, on comprend très bien que si m est trop petit ça va pas toucher, puis ça va toucher en un point, puis après ça va toucher en deux points. »

COURS DU 28/1/97 : CORRECTION D'EXERCICES SUR L'EXPONENTIELLE

1. P : « Prenez vos cahiers. Il s'agit des premiers calculs de dérivées concernant la fonction exponentielle »

Le premier exercice est l'exercice n°43 p.168 de l'ouvrage de Terminale S de la collection Terracher :
Dans chacun des exercices 43 à 46, préciser sur quel intervalle (ou réunion d'intervalles) la fonction considérée est dérivable, et exprimer sa dérivée.
$f(x) = e^{3x}$; $f(x) = e^{x2 - x+ 1}$

2. Mél. passe au tableau et écrit :

$\mathbf{f_1(x) = e^{3x}}$ **Df = R**

« C'est la formule $e^{u(x)}$ »

$\mathbf{f_1(x) = e^{u(x)}}$
$\mathbf{f'_1(x) = 3e^{3x}}$

3. P : « C'est bon, on continue »
4. *Mél. écrit* :

$\mathbf{f_2(x) = e^{x2 - x+ 1}}$ **Df = R**
$\mathbf{f'_2(x) = (2x - 1)\, e^{x2 - x+ 1}}$
Mél. continue par l'exercice n°44 dans lequel :
$f(x) = e^{\sin x}$ $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$

$$\mathbf{f_3(x) = e^{\sin x}\ \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1 + 2}{e^x - 1} = 1 + \frac{2}{e^x - 1}}$$

$$\mathbf{f'_3(x) = (\cos x)e^{\sin x}}$$

$$\mathbf{f_4(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}}$$ **Df = R***

5. P : « Tout le monde a bien vu ça ? Domaine de définition de cette fonction ?…e^x différent de 1, x différent de 0. On a vu la dernière fois que la fonction e^x est égale à 1 en 0. Comme elle est bijective, elle est égale à 1 seulement en 0 »
6. *Mél. continue d'écrire au tableau* :

$$\mathbf{f'_4(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x(e^x + 1)}{(e^x - 1)^2} = \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2}}$$

P regarde le travail des élèves et commente :
7. P : « Quand vous avez quelque chose comme ça, regardez, vous avez une astuce de calcul

fréquente. Je veux dériver $\frac{e^x+1}{e^x-1}$. Il y a une façon de se débrouiller qui est très simple, c'est de faire une division ; de dire que :

$$\mathbf{\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{e^x-1+2}{e^x-1}=1+\frac{2}{e^x-1}}$$

Vous voyez que ça ressemble à une division de polynômes, bien que ça ne soit pas des polynômes, bien sûr. Et quand on a ça, c'est beaucoup plus facile à dériver. On a une fonction inverse au-lieu d'avoir un quotient :
$-\frac{u'}{u^2}$, je trouve tout de suite $\frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$. C'est un bon réflexe à avoir ça : passer d'une forme comme ça à une forme constante +… Vu ? C'est pratique avec les fonctions $\frac{ax+b}{cx+d}$: ça, vous avez l'habitude en général. Mais si je remplace x par une autre fonction, si je compose, je peux faire des calculs comme ça et ça simplifie les choses. Vu ? »
8. *Mél. continue d'écrire au tableau la fonction de l'exercice n°48 à étudier « Exprimer, en fonction de n la dérivée $n^{ième}$ des fonctions : $f(x)=e^x\cos x$ »*

$f_5(x)=e^x\cos x$

9. P : « Ouh la! On vous demandait la dérivée $n^{ième}$, j'avais pas vu que c'est la dérivée $n^{ième}$ qu'on vous demandait. »
10. Mél. : « Je sais pas »
11. P : « C'est un peu compliqué, mais ça ne fait rien, on va essayer »
12. Plusieurs élèves (incompréhensible)
13. P : « Ah! On va calculer tout simplement la dérivée. Est-ce qu'il y en a qui sont arrivés à calculer la dérivée $n^{ième}$ -là ? »
14. Plusieurs élèves : « Oui »
15. P : « Oui ? La dérivée seconde : c'est la dérivée de la dérivée. La dérivée troisième, c'est la dérivée de la dérivée seconde, etc… Il faut continuer comme ça à dériver »
16. Un élève : « Ah!… »
17. Un autre élève : « On n'y est pas arrivé »
18. P « Il s'avère que quand on a une fonction cosx, quelles sont les dérivées successives de cosx ? Il faut réfléchir un peu au problème d'abord. »
19. P avec des élèves : « cosx, après ? -sinx, après ? -cosx, après ? +sinx, ensuite ? +cosx, et là vous voyez, ça repart. On va avoir une suite de fonctions périodique. Avec la fonction sinus, bien entendu même phénomène, et donc là il va se passer des choses liées à ce phénomène de suite périodique des dérivées pour la fonction cosinus et pour la fonction sinus. Alors on va regarder un petit peu les choses. »
20. Les élèves : « ?… »
21. P : « Ben, on va dériver et on va regarder un petit peu ce qui se passe. Alors, écris-nous les dérivées successives. Ceux qui n'ont pas fait, vous prenez un papier, un crayon et vous le faites. On va écrire les dérivées successives de $e^x\cos x$. Allez, on y va : elle au tableau et vous sur votre cahier. »
P regarde le travail des élèves tandis que Mél. écrit au tableau :
22. Mél. :

$$f'_5(x) = e^x \cos x - \sin x e^x$$

$$f'_5(x) = e^x(\cos x - \sin x)$$

23. P : « Maintenant tu fais la dérivée de la dérivée. Vas-y »
24. Mél. en coopération avec P et des élèves :

$$f''_5(x) = e^x(\cos x - \sin x) + (-\sin x - \cos x)e^x$$

$$= e^x(-2\sin x) = -2\sin x\, e^x$$

25. P : « Bien, alors on repart d'ici. Alors, on dérive f'''… »
26. P : « Ah bien, jusqu'à ce qu'on trouve quelque chose qui ressemble à une façon de dire $f^{(20)}$ ce sera ça. On cherche. On n'aura pas un phénomène périodique, mais on cherche à trouver une régularité : on nous demande la dérivée $n^{\text{ième}}$. »
27. P : « Pourquoi on dérive à chaque fois ? Qu'est-ce qu'on cherche Bar.? »
28. Bar. : « La dérivée $n^{\text{ième}}$. »
29. P : « On cherche la dérivée $n^{\text{ième}}$. On s'arrête quand on aura compris comment ça se passe. Pour le moment, on n'y voit pas trop clair. On voit bien qu'il y aura toujours des e^x et des sinus et des cosinus, mais pour l'instant on voit pas grand-chose. Pour l'instant, qu'est-ce qu'on a vu ? Vas-y, factorise. La fonction ; la dérivée première, elle est là ; la dérivée seconde, la voici ; la troisième, tu es entrain de faire une faute de signe *(en direction de Mél. au tableau)* »
30. Mél. corrige et écrit :

$$f'''_5(x) = -2\cos x\, e^x - 2\sin x\, e^x$$

$$= -2\, e^x(\cos x + \sin x)$$

31. P : « C'est bon. Alors, la quatrième ?… Est-ce que ça va s'améliorer ? Alors pour la quatrième, on écrit comme ça :

$$f_5^{(4)}(x)$$

le 4, le n de la dérivée $n^{\text{ième}}$, est entre parenthèses. Evidemment, il ne faudra pas confondre avec les puissances. Alors, égale… »
32. Mél. écrit :

$$f_5^{(4)}(x) = -2e^x(\cos x + \sin x) - 2e^x(-\sin x + \cos x)$$
$$= -2e^x(2\cos x)$$
$$= -4e^x \cos x$$

33. P : « -4 quoi ? Qu'est-ce que c'est ça ? Regarde! »
34. Mél. : « C'est f(x). -4f(x) »

$$= -4f(x)$$

35. P : « Alors $f^{(5)}$, ce sera quoi sans le calculer ? »
36. Un élève : « -5f(x) »

37. P : « Non : f dérivée d'ordre 5. Ce sera quoi ? »
38. Un autre élève : « -4… »
39. P : « f dérivée d'ordre 4, c'est -4f. f dérivée d'ordre 5, ce sera quoi ? »
40. Un élève : « -4f'(x) »
41. P : « Ah! Quand même! -4f'(x)! f dérivée d'ordre 6, ce sera quoi ? »
42. P avec des élèves : « -4f''(x) »
43. P : « f dérivée d'ordre 7 ? »
44. P et Mél. : « -4f'''(x) »
45. P : « Et f dérivée d'ordre 8 ? »
46. Un élève : « Ben, -4 fois -4 »
47. P : « Ça fait quoi ça ? »
48. Des élèves : « -16… »
49. P : « Ah ? -4 fois -4, ça fait -16 ?! »
50. Un élève : « 16, 16f(x) »
51. P : « 16f(x) , bien! Alors si je vous demande $f^{(20)}$ par exemple ? »
52. Des élèves cherchent (on entend des murmures)
53. P : « $f^{(4)}$, c'est -4f(x). On a dit $f^{(8)}$, c'est quoi ? »
54. Un élève : « 16f(x) »
55. P : « C'est 16f(x). $f^{(12)}$?… »
56. Un élève : « 24 ?… »
57. P : « Allez, bougez un peu vos neurones! »
58. Un élève : « -4 exposant 3 »
59. P : « -4 exposant 3, oui! f(x), alors on va l'écrire. Allez, trouvez-moi d'abord les multiples de 4 :

$\mathbf{f^{(4)}(x)=-4f(x)}$
$\mathbf{f^{(8)}(x)=16f(x)}$
$\mathbf{f^{(12)}(x)=(-4)^3f(x)}$

60. P (en direction de Mél.) : « Est-ce que tu saurais m'écrire $f^{(4k)}$? Sachant que ça c'est 4 fois 1, ça c'est 4 fois 2, ça c'est 4 fois 3… »
61. Un élève : « -4 exposant k »
62. P : « -4 exposant k : on est d'accord les autres ?…

$\mathbf{f^{(4k)}(x)=(-4)^kf(x)}$

Bon, et puis les autres comment on fera ? Avec les autres dérivées … »
63. Un élève : « On divise par 4, avec le reste… »
64. Un autre élève : « On fait pareil… »
65. P : « Oui, d'accord. f dérivée d'ordre 4k+1 : »
66. Un élève : « Ce sera avec f' »
67. P : « Et bien oui :

$\mathbf{f^{(4k+1)}(x)=(-4)^kf'(x)}$

On continue :

$\mathbf{f^{(4k+2)}(x)=(-4)^kf''(x)}$
$\mathbf{f^{(4k+3)}(x)=(-4)^kf'''(x)}$

En direction de Mél. qui a écrit les calculs au tableau :
68. P : « Et puis 4k+4, qu'est-ce que tu trouverais ? »
69. Mél. : « Ben, 4k+4 ? (-4) puissance k+1 ?… »
70. P : « Voilà, on retombe sur cette forme-là. Vous avez pigé ? »
71. Des élèves : « Oui »
72. P : « Bon, on va pas prendre ta formule, elle est un peu trop sophistiquée. On va laisser comme ça. On a une espèce de… C'est pas de la périodicité, mais vous voyez que tout ça, ça vient du fait que les dérivées successives de sinus et cosinus, bien se retrouvent toujours. »
73. Des élèves : « On avait le 49 »
74. P : « C'est vrai ? On avait aussi le 49! Je vous avais gâtés! Bon, on le garde pour jeudi : je veux vous faire les limites rapidement. On avait d'abord travaillé sur la notion de bijection, d'application réciproque. On avait fait apparaître la fonction racine carrée, puis on avait vu la racine n-ième, puis on est passé à la fonction réciproque de la fonction logarithme. On a tracé le graphe, on a vu qu'elle était dérivable, on a calculé la dérivée. On a vu les formules concernant l'addition et la multiplication : fonction qui transforme non pas un produit en somme comme la fonction logarithme, mais au contraire une somme en produit et on va passer aux questions de limites »
75. P : « Alors, on a déjà vu lorsqu'on a tracé le tableau de variation à partir du dessin, à partir du tracé de la courbe, on a vu que la limite en $+\infty$ c'est ?… »
76. Un élève : « $+\infty$ »
77. P : « C'est $+\infty$. Mais on l'a lu sur le dessin, on va le démontrer par un calcul maintenant. Pour le prouver par un calcul, on va comparer la fonction exponentielle à la fonction qui à x associe x. Donc on va comparer la fonction :

$\mathbf{x \to e^x}$ à
$\mathbf{x \to x}$

Alors, comment vous faites pour comparer ces deux fonctions ?
78. Une élève : « On étudie le signe de la différence »
79. P : « On étudie le signe de la différence. Donc on va donner un nom à la différence :

$$\boldsymbol{\varphi(x) = e^x - x}$$

et je voudrais étudier le signe de ça. Comment je peux faire pour étudier le signe de ça ? »
80. Un élève : « La dérivée ?… »
81. P : « Ben oui, j'étudie la fonction, parce que ça je ne peux pas faire d'algèbre dessus : c'est pas un truc algébrique. Alors, allez-y! »
82. Un élève : « C'est e^x-1 »
83. P : « Oui, alors le signe ? Allez-y. On sait pas grand-chose sur notre fonction, mais on a déjà établi qu'elle a une dérivée qui était elle-même »
84. Un élève : « Elle est positive sur $[0; +\infty[$… »
85. P : « Et puis on sait aussi qu'en 0, elle est égale à 1. Donc on sait des choses, hein ?

x		**0**	
e^x	+		+
e^x	$\nearrow$	**1**	$\nearrow$

Alors :

$\varphi'(x) = e^x - 1$

e^x-1 est positif lorsque ?… »
86. Des élèves : « x supérieur à 0 »
87. P : « On a une fonction qui est strictement croissante et qui est égale à 1 en 0. Donc quand x est plus grand que 0, elle est plus grande que 1. Quand x est plus petit que 0, elle est inférieure à 1.Bien, alors je vais pouvoir tracer les variations de ma fonction φ. La dérivée est nulle en 0, elle est négative avant 0 et positive après. Donc, voici le sens de variation. »

x		**0**	
φ'	-	**0**	+
φ	↘		↗

88. P : « Qu'est-ce que je calcule maintenant ? »
89. Un élève : « Ben, les limites »
90. P : « Les limites, non! Puisque je suis entrain de chercher des limites. Les limites, je peux pas, je connais pas. Qu'est-ce que c'est que je vais calculer là ?… »
91. : Un élève : « Un minimum »
92. P : « Ben oui, le minimum. Alors qu'est-ce que c'est le minimum ? $\varphi(0)$?… »
93. Des élèves : « C'est 1 »
94. P : « C'est 1

$\varphi(0)=1$

Bon, qu'est-ce qu'on peut conclure de ça ? »
95. Un élève : « Elle a des limites… »
96. P : « Qu'est-ce que je cherchais ? Non, je cherchais pas les limites. Je cherchais quoi ?… »
97. Un élève : « Le signe »
98. P : « Le signe! Le signe de quoi ? »
99. Le même élève : « De φ »
100. P : « De φ. Quel est le signe de φ ? »
101. Des élèves : « Toujours positif »
102. P : « Bon! Ça c'est un truc dont il faut que vous vous souveniez : j'ai pas besoin des limites, j'ai pas besoin de connaître l'intervalle ici et l'intervalle ici *(P montre le tableau de variation de φ)* pour savoir le signe de cette fonction. Dans certains cas, pas toujours, simplement le sens de variation avec un minimum, quand il est bien placé, et bien ça suffit. C'est pas la peine d'aller chercher… c'est une faute que vous faites souvent, ça, en devoir. Bien souvent, un petit calcul comme ça tout simple, les variations et un extremum bien choisi, ça suffit pour trouver le signe. C'est pas la peine de s'embêter à faire des calculs de limites. De toute façon, ici, on peut pas les faire car on connaît pas la limite de la fonction exponentielle : on est entrain de la chercher! Donc :

$\forall x, \varphi(x) \geq 1$

$\varphi(x) > 0$

$e^x > x$

Vous vous rappelez du théorème ? »
103. Des élèves : « Oui »
104. P : « Qu'est-ce que c'est que ce théorème ? »
105. Un élève : « Ben, supérieur à toute limite supérieure… »
106. P : « Une fonction qui est supérieure à une fonction qui tend vers $+\infty$, tend elle-aussi vers $+\infty$; on a vu ça. Donc :

<u>Conclusion</u> : $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Alors maintenant, on va regarder ce qui se passe en $-\infty$ .Qu'est-ce qui se passait en $-\infty$ sur le dessin ?
107. Un élève : « Il est négatif »
108. D'autres élèves : « Non, ça tend vers 0 »
109. P : « On va avoir une limite égale à 0. Et qu'est-ce qu'il y avait sur le dessin en $-\infty$ »
110. Une élève : « Une asymptote »
111. P : « Une asymptote, quoi ?… Une asymptote horizontale. Hein ? La courbe était asymptote à l'axe des x
P dessine les représentations graphiques des fonctions exponentielle et logarithme népérien.
112. P : « Voilà, ici on avait une branche infinie avec une asymptote horizontale. Nous, notre but, c'est de prouver que la limite de la fonction e^x en $-\infty$, c'est 0. C'est ça qu'on voudrait vérifier. Est-ce que vous vous rappelez comment on avait trouvé la limite de la fonction log. en 0 à partir de la limite de la fonction log en $+\infty$? »
113. Murmures des élèves
114. P : « Vous vous rappelez comment on avait démontré la limite de la fonction log. en 0 ? »
115. Une élève : « Avec un… »
116. P : « On a utilisé le fait que $\ln\frac{1}{x}$, c'est -lnx. Reprenez votre cours, regardez. Allez! Cherchez! »
117. Un élève en lisant son cours : « $\ln\frac{1}{x}$, c'est -lnx »
118. P : « Bon, alors on a une formule qui est… »
119. Le même élève : « équivalente ? »
120. P : « … qui sort de ça, qui est un peu issue de là sur la fonction exponentielle »
121. Des élèves avec P qui écrit au tableau :

« $\mathbf{e^{-x} = \frac{1}{e^x}}$ »

122. P : « Alors je voudrais chercher la limite de e^x en $-\infty$, comment je vais écrire e^x ? »
123. Des élèves : « $\frac{1}{e^{-x}}$ »
124. P : « D'accord, oui c'est ça :

$\mathbf{e^x = \frac{1}{e^{-x}}}$ »

125. P avec des élèves : « Quand x tend vers $-\infty$, -x tend vers $+\infty$, e^{-x} tend vers $+\infty$, $\frac{1}{e^{-x}}$

tend vers 0. »
126. P : « Bon alors :

$$\lim_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$$
$$\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$$

Voilà notre asymptote. »
127. P : « Vous vous rappelez que, quand on avait étudié la fonction logarithme, on n'a pas seulement étudié la limite en $+\infty$ et la limite en 0, ensuite on a étudié la limite en $+\infty$ de $\frac{\ln x}{x}$. Alors ici, c'est pareil on va étudier la limite en $+\infty$ de $\frac{e^x}{x}$. Vous pourriez peut-être trouver le résultat si vous vous rappeliez tout ce qu'on a dit un jour où vous m'avez posé un tas de question sur les asymptotes obliques. Vous m'avez demandé comment on fait… vous vous rappelez ?… pour trouver une asymptote oblique quand on la donnait pas. »
128. Un élève : « Y a une technique »
129. P : « Voilà : petit a et petit b. Je vous ai expliqué qu'on cherchait la limite de $\frac{f(x)}{x}$; ça donnait petit a quand il y avait une asymptote oblique. Et qu'à ce moment-là, on fait f(x)-ax : ça donnait la constante, ça donnait l'ordonnée à l'origine. Vous vous rappelez ? Quand il n'y a pas d'asymptote oblique, (j'ai effacé la courbe, vous l'avez sur vos cahiers), la fonction exponentielle quand x tend vers $+\infty$ elle monte, elle monte très vite. La fonction logarithme, elle, elle part horizontalement ; la fonction exponentielle, elle, elle part en montant. Alors le $\frac{e^x}{x}$ dans ce cas-là, va tendre vers quoi ? »
130. Un élève : « x »
131. P : « Ça donnerait… S'il y a une direction, elle monte avec la direction de quoi ? »
132. Un élève : « D'une asymptote verticale »
133. P : « Oui. Elle monte avec une direction verticale. La fonction log, elle montait avec une direction horizontale, d'où le $\frac{\ln x}{x}$ qui tend vers 0. La fonction exponentielle, elle monte avec une direction verticale. Alors, coefficient directeur d'une droite qui est verticale, qu'est-ce que c'est ? Ça n'existe pas, mais si vous regardez la droite, si vous la faites tourner en la faisant monter, (vous la voyez, vous la voyez la droite ?). Je prends mon repère ici et puis une droite, je la fais tourner en montant, son coefficient directeur qu'est-ce qu'il fait ? »
134. Des élèves : « il augmente »
135. P : « Il tend vers $+\infty$. On va voir que $\frac{e^x}{x}$, et bien, ça tend vers $+\infty$. C'est lié à cette direction verticale. Pour prouver que $\frac{e^x}{x}$ tend vers $+\infty$, on va faire une comparaison de fonctions, comme tout à l'heure avec la comparaison de x, on va comparer e^x non pas à x mais à x^2. Alors, vous allez travailler un peu tout seul parce que vous devez savoir le faire et on vient de le faire pour e^x-x, alors c'est pas beaucoup différent. Alors, essayez de me faire la comparaison entre e^x et x^2. D'où étude du signe de la différence… »

136. Un élève : « Hou la la! »
137. P : « Allez Cél., on dérive. »
P passe de table en table, puis une élève est envoyée au tableau où elle écrit :
138.

$f(x)= e^x-x^2$
$f'(x)= e^x-2x$

139. P : « Alors qu'est-ce qu'on fait de ça ? Pour trouver le signe de e^x-2x, qu'est-ce qu'on peut faire ? »
140. l'élève au tableau : « On factorise par x »
141. P : « On factorise par x, ça donnera quoi grand Dieu ?! »
142. L'élève au tableau : « Ben $\frac{e^x}{x}$!… »
143. P : « Quand on ne peut pas traiter les choses algébriquement, on les traite par l'analyse. On fait une étude de fonction. Donc là, algébriquement, je sais pas m'en sortir donc je passe à la dérivée de f' :

$f''(x)=$

et je trouve

$f''(x)= e^x-2$

Ah ?… »
144. Un élève : « e^x supérieur à 0 »
145. P : « e^x-2, ça ressemble à quoi ça e^x-2 ? »
146. Un élève : « A ln2. f''(x)=0 quand x=ln2 »
147. Une élève : « Ah ouais! »
148. Le même élève : « Hé, c'est ça… »
149. P : « On en est là. Bien f''(x)=0 quand e^x=2. Donc quand x=ln2 :

$f''(x)=0 \Leftrightarrow e^x=2$
$\Leftrightarrow x=\ln 2$

150. Un élève qui s'adresse à celui qui a fait le calcul avec P : « Mais tu aurais pu trouver direct pour là… f' »
151. P : « Ça on l'a jamais fait. C'est la première fois qu'on le fait ce passage-là : e^x=2. La fonction logarithme, elle nous sert beaucoup là. C'est une bijection : a=b équivaut à lna=lnb. J'ai deux nombres positifs, cette équation-là équivaut à cette équation-là. C'est bien parce que ça nous donne la solution. OK ? En fait c'est la fonction réciproque, c'est la même chose :

$e^x-2>0$

lorsque ?… »
152. Des élèves : « x>ln2 »
153. P : « Fonction bijective croissante, lorsque x>ln2

$\Leftrightarrow x>\ln 2$

et

$e^x-2<0 \Leftrightarrow x<\ln 2$

Bien, alors tableau de variation de f' : allez-y! »
P circule de table en table
154. P : « On trouve quoi ? On trouve un minimum, c'est bon.

x	$-\infty$		ln2		$+\infty$
f''		-	0	+	
f'		↘	2-2ln2 2(1-ln2)	↗	

Bien est-ce que c'est positif ou négatif ce machin-là , (P parle de 2-2ln2) »
155. Des élèves : « Positif »
156. P : « Oui. Est-ce que vous avez regardé votre machine pour regarder ça ? »
157. Des élèves : « Oui », « Non ».
158. P : « Non parce que 1 c'est log. de quoi ? »
159. Des élèves : « De e »
160. P : « Et e par rapport à 2 ? »
161. Des élèves : « C'est supérieur »
162. P : « C'est plus grand. Donc 1-ln2 je sais que c'est ?… »
163. Des élèves et P : « Positif »
164. P : « Quel est le signe de ma dérivée ? »
165. Des élèves : « Positive »
166. P : « Elle est positive. Elle a un minimum positif : même chanson que tout à l'heure! Rebelote comme tu dis!

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'		+	
f			

Alors, où est-ce que vous voulez étudier ça ? On a étudié ça pour trouver la limite de $\frac{e^x}{x}$.
Donc ce qui nous intéresse, c'est par là *(P montre la partie du tableau de variation comprise entre 0 et +∞).* Qu'est-ce qu'on pourrait mettre ici ? *(P montre le point intersection de la ligne de f et de la colonne de 0 dans le tableau de variation).* Je mets 0 ici, qu'est-ce que je trouve ici ? »
167. Des élèves : « 1 »
168. P : « 1. Bien, quel est le signe de f sur [0; +∞ [? »
169. Un élève : « positive »
170. P : « Positive :

Pour $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 1$

Donc … Je peux effacer ici ce calcul intermédiaire ? »
171. Les élèves : « Oui »

172. P : « Conclusion de ceci :

<u>Conclusion</u>

e^x-x^2 est strictement positif. e^x, on va dire $e^x \geq x^2$

$\mathbf{x \geq 0 \Rightarrow e^x \geq x^2}$

C'est bon ? C'était ça l'objet : comparer la fonction e^x à x^2. Bien, alors maintenant je vous demande la limite de $\frac{e^x}{x}$ »

173. Un élève : « Puisque $\frac{e^x}{x}$ est supérieur à x… »

174. P : « $\frac{e^x}{x}$, alors là on va mettre x strictement supérieur à 0 :

$\mathbf{x > 0 \ \frac{e^x}{x} > x}$

Conclusion : $\mathbf{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$

Vous mettez ça dans votre tête et vous l'y laissez ; ça fait partie des choses à savoir, même si c'est écrit sur le formulaire. Je vous ai un peu compliqué la vie pour trouver cette limite parce que je voulais vous faire faire des comparaisons de fonctions. Il y avait une autre façon de trouver ça qui était quand même un petit peu plus simple. C'est de se dire que on connaît des choses sur la fonction logarithme et que peut-être ici, ça pourrait servir la fonction logarithme. Vous voyez pas où vous pourriez faire intervenir la fonction logarithme ? »

175. Un élève : « $\frac{1}{x}$ c'est la dérivée de lnx… »

176. Une élève : « Ah ouais!… »

177. P : « Pardon ? Ouh là! Dérivée de… c'est vrai! C'est vrai, c'est vrai . C'est dur! »

178. Des élèves tentent des réponses : « $\frac{1}{e^{-x}}$ », « $\frac{1}{x}$ », « $\ln e^x$ »

179. P écrit au tableau :

Autre démonstration

$$\mathbf{\frac{e^x}{x} = \frac{e^x}{\ln e^x} = \frac{1}{\frac{\ln e^x}{e^x}}}$$

$\mathbf{x = \ln e^x}$

180. Des élèves : « Ah oui! », « Oh!… »

181. P : « Ça sert souvent ça. Compliquer les choses, des fois, ça simplifie. Alors après comment je continue ?… Qu'est-ce qu'on connaît en +∞ de limite avec la fonction logarithme ? »

182. Des élèves : « $\frac{\ln x}{x}$ »

183. P : « $\frac{\ln x}{x}$, en $+\infty$ ça tend vers ?… »
184. P et des élèves : « Ça tend vers 0 »
185. P : « Alors ?… Vous voyez pas là-dessus $\frac{\ln x}{x}$? »
186. Des élèves : « C'est l'inverse »
187. P : « C'est l'inverse! C'est $\frac{1}{\frac{\ln e^x}{e^x}}$ et je cherche la limite de ça en $+\infty$. Alors en $+\infty$, e^x tend vers ?… »
188. Des élèves : « $+\infty$ »
189. P : « $\frac{\ln e^x}{e^x}$ tend vers ?… »
190. Des élèves : « 0 »
191. P : « 0 positif ou négatif ?… »
192. Des élèves : « positif »
193. P : « Positif, 0 positif. Et l'inverse tend vers $+\infty$. Vous avez vu ? Bon, alors on écrit tout ça :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln e^x}{e^x} = 0 \text{ positif}$$

Je peux écrire tous les quotients que je veux avec e^x qui n'est jamais nul. donc la limite de l'inverse nous donne donc $+\infty$, sachant que c'est une fonction positive

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{\ln e^x}{e^x}} = +\infty$$

Ça y est ? Bon. Vous vous rappelez que l'on fait les choses en parallèle avec la fonction log. Pour la fonction log., une fois qu'on avait montré que la limite de $\frac{\ln x}{x}$ c'était 0 en $+\infty$, avec un petit tour de passe-passe, on avait démontré dans la foulée que la limite xlnx en 0 était 0. Ça vous rappelle des choses ? Bien! Alors ici, on va avoir des choses… notre formule :

$$\ln(\frac{1}{x}) = -\ln x$$

nous permettait de passer de $+\infty$ à 0 parce que quand x tend vers $+\infty$, 1/x tend vers 0, et je passais comme ça de calculs de limites en $+\infty$ à des calculs de limites en 0. Alors la formule qu'on sort de ça quand on part de la fonction exponentielle, c'était que :

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

et même chose. Des choses qui se passent en $+\infty$ vont permettre de parler de choses qui se passent en -∞. Et on vient de trouver que $\frac{e^x}{x}$ a une limite $+\infty$ en $+\infty$.On a étudié ça en $+\infty$ et bien sûr on va re-utiliser ça, on va utiliser cette formule pour trouver des choses en -∞. Alors, essayez un petit peu de chercher et de gribouiller, pour me dire qu'est-ce qu'on peut trouver comme chose en -∞ en utilisant cette limite-là. Vous avez deux choses. Vous avez :

$$\mathbf{e^{-x} = \frac{1}{e^x}} \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \mathbf{\frac{e^x}{x}} = +\infty$$

Alors vous vous servez de ça et vous me trouvez quelquechose pour la fonction exponentielle en -∞. »

P circule de table en table.

194. P en direction d'un élève : « Il faut trouver des choses, c'est à toi de les trouver. Je voudrais que tu trouves des choses en -∞, à partir du fait qu'en +∞ il y a une certaine limite qui existe. Tu as un moyen de passer de -∞ à +∞ avec la formule qui dit que $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$. »

Les élèves travaillent.

195. P : « Tu as trouvé des choses ? »

196. L'élève interrogé : « $\frac{1}{e^{-x}}$, $\frac{1}{x\,e^{-x}}$ »

197. P : « Oui, bien. Alors, on va prendre les choses de façon très naturelle en partant d'ici (P montre la limite de $\frac{e^x}{x}$) et en disant : si x tend vers -∞, pour aller vers +∞ je vais prendre quelle variable ?… »

198. Des élèves : « -x »

199. P : « -x. Donc je vais pouvoir écrire que :

$$\lim_{x \to -\infty} \mathbf{\frac{e^{-x}}{(-x)}} = +\infty$$

Bon, j'ai pas écrit autre chose que ça pour l'instant. Je vais transformer mon e^{-x}. Donc :

$$\lim_{x \to -\infty} -\mathbf{\frac{1}{xe^x}} = +\infty$$

Alors vous me dîtes maintenant quelle est la limite lorsque x tend vers -∞ de x e^{-x}. »

200. Un élève : « 0 »

201. P : « Et oui, c'est 1 sur ça ; plutôt -1 sur ça et donc c'est trouvé. Voilà, vous avez les quatre limites qu'il faut connaître par cœur :

$$\lim_{x \to -\infty} \mathbf{xe^x = 0}$$

Minute papillon! Il y en a une cinquième »

202. Un élève : « La limite de $\frac{e^x}{x}$ en -∞, c'est quoi alors ?… »

203. P : « Ah, mais ça c'est pas une forme indéterminée la limite en -∞ de $\frac{e^x}{x}$! »

204. L'élève qui posait la question : « Ah oui! »

205. P : « C'est $\frac{1}{x} \times e^x$. C'est donc le produit de deux fonctions qui tendent chacune vers 0.

La dernière, la cinquième. La cinquième, c'est simplement le taux de variation de la fonction en 0. Alors, écrivez-moi le taux de variation de la fonction en 0. »
206. *Les élèves écrivent et P envoie un élève au tableau :*

$$\mathbf{\frac{e^x - 1}{x - o}}$$

207. « Alors la limite de ça quand x tend vers 0, qu'est-ce que c'est ? »
208. Un élève : « La dérivée »
209. P : « La dérivée en 0 ? »
210. L'élève : « $\frac{1}{x}$, ah non! »
211. Un autre : « e de x »
212. P : « Oui exponentielle de x. Exponentielle de x en 0, ça fait quoi ? »
213. Un élève : « Ça fait 1 »
214. P. en direction de l'élève au tableau : « Tu écris simplement ici que la dérivée de la fonction au point 0 c'est e^0 »
215. L'élève au tableau écrit :

$$\mathbf{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 = (e^0)}$$

216. P : « J'ai écrit simplement que la dérivée de e^x en 0, c'est 1. Mais ça il faut quand même le savoir par coeur. Pour jeudi … »

COURS DU 4/2/98 : EQUATIONS AVEC LN

1. Lyd. est au tableau et note l'énoncé de l'exercice que P lui dicte :

$\ln(x+1)+\ln(x+3)=\ln(x+7)$

Lyd. écrit :

$Df=\{x\in\mathbb{R}/x+1>0, x+3>0, x+7>0\}$

2. P : « Mets le son s'il te plaît ! »
3. Lyd. : « L'ensemble de définition est :

$Df=]-1;+\infty[$ »

4. P : « Bon. x doit être supérieur à la fois à -1, -3, -7. Donc ça nous fait]-1;+∞[»
5. Lyd. : « On sait que lna+lnb=lnab, donc :

$\ln((x+1)(x+3))=\ln(x+7)$
$\Leftrightarrow \ln(x^2+4x+3)=\ln(x+7)$
$\Leftrightarrow x^2+4x+3=x+7$

6. *P rajoute au tableau*

Sur Df $\ln((x+1)(x+3))=\ln(x+7)$

6. Lyd.

$\Leftrightarrow x^2+3x-4=0$
$\Delta =$

8. P : « Bon, c'est pas trop méchant à résoudre. Tu as besoin de Δ pour résoudre ça ? Franchement! »
9. *Lyd. efface* Δ
10. P : « Bon, 1 est solution évidente. Donc la deuxième est ?… »
11. P et des élèves : « -4 »
12. *Sous la dictée de P, Lyd. écrit* :

$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-4$

« -4 il appartient pas au domaine de définition »
13. P : « Bon, bien… »
14. *Lyd. écrit*

$S=\{1\}$

15. P : « Bon, alors deuxième équation »
16. *Lyd. écrit* :

2. $\ln(x^2+4x+3)=\ln(x+7)$

17. P : « Qu'est-ce que tu peux déjà nous raconter ? Qu'est-ce qui change ? »
18. Lyd. : « C'est l'ensemble de définition qui change »
19. P : « Bon, et ça va donner quoi ? »
20. Lyd. : « Ben $-\infty$,… »
21. P : « Non, non, mais qu'est-ce qui va arriver ? Qu'est-ce qui change ? Est-ce que ça va changer quelquechose aux solutions ? »
22. Lyd. : « Non, les solutions c'est les mêmes, mais elles marchent toutes les deux… »
23. P : « Les solutions de l'équation, tu vas trouver toujours 1 » *P montre l'équation précédente et* **S={1}.**
24. Lyd. : « Non. Y'aura 1 et -4 »
25. P : « Bon. Cette fois-ci, ça va changer parce que le domaine de définition va changer et on traite celle-là *(P montre $x^2+3x-4=0$),* alors vas-y montre-le »
26. *Lyd. écrit* :

$Df=\{x\in\mathbb{R}/\ x^2+4x+3>0,\ x+7>0\}$

27. P : « Tout le monde a vu ça ? Tout le monde a compris ça ? *(Des élèves répondent oui)* Bien. *En revenant au tableau et à l'adresse de Lyd.* : Oui, alors y'a quelquechose qui existe en mathématiques à la place des virgules *(et P rajoute des parenthèses et des et dans les écritures des Df)* »
28. *Lyd. écrit* :

$Df=]-7;-3[U]-1;+\infty[$

29 P : « Bon, alors ce polynôme x^2+4x+3, c'est pas la peine qu'on se fatigue pour trouver ses solutions, parce qu'on les connaît déjà hein… (P montre la précédente équation). On a vu que x^2+4x+3 c'est $(x+1)(x+3)$ et les solutions c'est -1 et -3, donc ce polynôme-là… *(en direction de Lyd.)* Je voudrais que tu détailles un petit peu »
30. Lyd. écrit :

•$x^2+4x+3>0$
$\Leftrightarrow x\in]-\infty;-3[U]-1;+\infty[$

« Signe de a à l'extérieur des racines »

•$x+7>0$
$\Leftrightarrow x>-7$

31. P : « $x>-7$, d'où ce domaine de définition qu'elle a écrit, qui est exact : $]-\infty;-3[U]-1;+\infty[$. Tu nous écris que ceci est équivalent à cela *(P montre* **$\ln(x^2+4x+3)=\ln(x+7)$** *et* **$\ln((x+1)(x+3))=\ln(x+7)$***)),* ce type de calcul est là, équivalent à ça, à ça, à ça *(P montre* **$x^2+4x+3=x+7$, $x^2+3x-4=0$, $x=1$ ou $x=-4$***),* donc tu écris que (E) sur Df.
32. *Lyd. note (E) l'équation* :

Sur Df (E)$\Leftrightarrow x\in]-\infty;-3[U]-1;+\infty[$
S={1;-4}

33. P : « Alors, le changement de décor, c'est que Df c'est plus le même. Et donc, cette fois-ci, on va accepter les deux solutions. Donc, l'autre équation avait une solution, celle-ci en a deux. Attention à l'importance de ces problèmes de domaine de définition quand on traite d'équations sur les logarithmes. On verra un exercice tout à l'heure pour illustrer cette histoire-là. Le suivant »
34. *Un autre élève est envoyé au tableau et écrit sous la dictée de P* :

$$\ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right)\geq 0$$

puis

$$\frac{x+1}{3x-5}\geq 0$$

35. P : « Est-ce que c'est positif ou nul ? »
36. L'élève efface ≥ et écrit >
37. P : « Strictement positif. Domaine de définition ?… »
38. L'élève au tableau :

x	-∞	-1	5/3 +∞
x+1	-	0 +	+
3x-5	-	-	0 +
$\frac{x+1}{3x-5}$	+	0 -	‖ +

$S=]-\infty;-1[\cup]\frac{5}{3};+\infty[$

39. P : « Bien , domaine de définition : on travaille sur la réunion d'intervalles… Alors maintenant on résout l'inéquation sur cette réunion d'intervalles »
40. *L'élève efface S et écrit Df, puis continue* :

$$\ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{3x-5}\geq 1$$

41. P : « Bon, c'est bien. C'est-à-dire que qu'est-ce qu'il a pensé et qu'il a pas écrit ?… »
42. Des élèves répondent (incompréhensible)
43. P : « Il a pensé et il a pas écrit que ça, c'est

$$\ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right)\geq 0\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right)\geq \ln 1$$

et puis il a pensé mais il l'a pas dit… la fonction logarithme est…
44. Un élève : « Croissante »
45. P : « Non seulement croissante, mais strictement croissante. On regardera ça tout à l'heure un peu plus en détail, mais quand une fonction est seulement croissante, vous ne pouvez pas

déduire ça de ça (*P montre* $\frac{x+1}{3x-5}$**≥1** *et* $\ln(\frac{x+1}{3x-5}) \geq \ln 1$).On ne peut le déduire que lorsque la fonction est strictement croissante ; on le regardera tout à l'heure de près.

46. L'élève au tableau écrit :

$$\Leftrightarrow \frac{x+1-3x+5}{3x-5} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-2x+6}{3x-5} \geq 0$$

x	-∞	3	5/3 +∞
-2x+6	+	0 -	+
3x-5	-	-	0 +
$\frac{-2x+6}{3x-5}$	-	0 +	‖ -

47. P : « Pourquoi y'a un moins là, et un plus là ? » (P montre les deuxièmes et troisièmes colonnes de la ligne **-2x+6**)

48. *L'élève rectifie et écrit* :

x	-∞	3	5/3 +∞
-2x+6	+	0 +	-
3x-5	-	-	0 +
$\frac{-2x+6}{3x-5}$	-	0	‖ -

Puis

x	-∞	3	5/3 +∞
-2x+6	+	0 -	-
3x-5	-	-	0 +
$\frac{-2x+6}{3x-5}$	-	0 +	‖ -

49. P : « Ceci est positif sur $]3;\frac{5}{3}[$«

50. Une élève : « Mais, $\frac{5}{3}$ c'est plus petit que 3! »

51. P : « Ben oui, là y'a un problème »

52. *L'élève au tableau s'est aperçu de son erreur, ce qu'il indique par un croisement de ses bras indiquant l'interversion des nombres, et recommence le tableau* :

x	-∞	5/3	3 +∞
-2x+6	+	+	0 -
3x-5	-	0 +	+
$\frac{-2x+6}{3x-5}$	-	‖ +	0 -

S=]$\frac{5}{3}$;3[

53. P : « Bon, alors $]\frac{5}{3};3[$, ça va être dans le domaine de définition, ça ? »
54. L'élève au tableau : « Oui »
55. P : « C'est dans le domaine de définition… Bon, alors j'ai plein de choses à dire là-dessus. Bon alors d'abord sur cette technique de tableau de signes, ça fait deux fois qu'on fait un tableau de signes…, d'abord pour $\frac{x+1}{3x-5}$ et pour $\frac{-2x+6}{3x-5}$, alors quand même, vous n'êtes plus en seconde! Pour trouver le signe d'une fraction comme ça, vous allez me faire le plaisir d'utiliser ce que vous savez sur le second degré :
$\frac{x+1}{3x-5}$ ça a le même signe que (x+1)(3x-5).
La seule chose qui change dans le tableau de signe de ça et de ça *(P montre* $\frac{x+1}{3x-5}$ *et* **(x+1)(3x-5)***)*, c'est cette double barre. A part ça, c'est le même signe. Le signe, c'est quoi ? Ben c'est le signe d'un polynôme du second degré ; je sais des choses sur le signe d'un polynôme du second degré. Il a des racines qui sont -1 et $\frac{5}{3}$ et c'est… Le premier coefficient est positif, donc c'est positif, négatif, positif. Et ici même histoire *(P montre* $\frac{-2x+6}{3x-5}$*)*, et ça éviterait de se tromper dans le tableau de signes. Les racines du polynôme que j'utiliserais, c'est 3 et $\frac{5}{3}$. Le premier coefficient serait négatif et donc ce polynôme serait positif entre les racines, c'est-à-dire entre 3 et $\frac{5}{3}$. Ça va plus vite, quand même! Là, vous avez un peu grandi depuis la seconde. Bon, ça c'était la première remarque.
Deuxième chose que je voulais vous dire, c'est que si je résous ce machin-là *(P montre* $\frac{x+1}{3x-5}\geq 0$*)*, ben ça j'ai pas à le faire *(P montre le tableau de signes associé)*, j'ai pas à me poser la question, pourquoi ? Je vais écrire simplement que

$$\mathbf{Df=\{x/\frac{x+1}{3x-5}>0\}}$$

Mais quand on fait un exercice, on anticipe un peu. On commence par les regarder avant de foncer dans les calculs. Alors, avant de foncer droit devant dans le calcul de Df, il faut quand même réfléchir deux minutes. Je vais regarder ça (*P montre* $\mathbf{\ln(\frac{x+1}{3x-5})\geq 0}$) et je vais voir que ça, je vais le remplacer par ça (*P montre* $\mathbf{\frac{x+1}{3x-5}\geq 1}$). C'est vite vu que ça, c'est ça. Et vous voyez bien que si $\frac{x+1}{3x-5}$ est plus grand que 1, alors ce sera positif (*P montre* $\mathbf{Df=\{x/\frac{x+1}{3x-5}>0\}}$). D'accord ? Donc toutes les solutions de ça (*P montre* $\mathbf{\frac{x+1}{3x-5}\geq 1}$), je sais bien qu'elles seront là dedans (*P montre* $\mathbf{Df=\{x/\frac{x+1}{3x-5}>0\}}$). C'est pas la peine que je calcule. Vu ? Faut être un peu paresseux quand on fait des maths, quand on peut! Du moment que j'ai fait ça (*P montre* $\mathbf{\frac{x+1}{3x-5}\geq 1}$), ça y est, j'ai pas besoin de savoir ce que c'est ça (*P montre* **Df**), puisque je sais que les solutions, elles seront dedans. D'accord ? Donc on peut s'éviter ce petit

calcul.
Troisième remarque qui vient de ce que Val. a fait sur son cahier. Il a écrit

$\mathbf{\ln(\frac{x+1}{3x-5})\geq 0}$

c'est

ln(x+1)-ln(3x-5)≥0

et puis ensuite :

ln(x+1)≥ln(3x-5)

et ensuite :

x+1≥3x-5.

Bon, est-ce que çà et ça, c'est la même inéquation ? Est-ce que j'ai écrit la même chose là *(P montre* $\mathbf{\ln(\frac{x+1}{3x-5})\geq 0}$ *et* **ln(x+1)-ln(3x-5)≥0***)* ? »

56. Un élève : « C'est pas le même ensemble de définition »

57. P : « C'est pas le même ensemble de définition. Quand x+1 est négatif et 3x-5 est négatif, ça, ça existe *(P montre* $\mathbf{\frac{x+1}{3x-5}}$*)*, cette équation-là *(P montre* $\mathbf{\ln(\frac{x+1}{3x-5})\geq 0}$*)* a un sens, et celle-là elle n'en a pas *(P montre* **ln(x+1)-ln(3x-5)≥0***)*. Et sur le tableau on voit bien : c'est-à-dire sur]-∞;-1[, ça (*P montre* $\mathbf{\ln(\frac{x+1}{3x-5})\geq 0}$*)* ça existe, et ça *(P montre* **ln(x+1)-ln(3x-5)≥0***)* ça n'existe pas. Ces deux phrases mathématiques n'ont pas le même sens, car elles n'ont pas de sens au même endroit. »

58. Un élève : « Sur Df oui »

59. P : « Sur Df, oui… Non pas sur Df! Ces deux phrases sont égales sur l'ensemble de définition de celle-là *(P montre* **ln(x+1)-ln(3x-5)≥0***)*.; quand les deux sont positifs. Alors, il se trouve qu'on a trouvé une solution qui était pas sur ce côté-là *(P montre la colonne du tableau de signes qui correspond à]-∞;-1[),* donc en fait les deux équations, elles vont avoir les mêmes solutions. Ça aurait pu… C'est un coup de bol! Ça aurait pu être autrement. Vu ?… Alors pour réfléchir un peu à ces choses-là, je vais vous donner un exercice de bac »

60. *Après avoir effacé le tableau, P écrit* :

Résoudre

1)ln(x+3)+ln(x+2)=ln(x+11)

2)$\mathbf{\ln(x^2+5x+6)=\ln(x+11)}$

3)$\mathbf{\ln(-x-2)=\ln(\frac{-x-11}{x+3})}$

4)ln(-x-2)=ln(-x-11)-ln(x+3)

« A vous! »

P circule dans la classe, regarde le travail des élèves et travaille avec des petits groupes d'élèves, pendant 7 minutes environ. Puis un élève, Bor., est envoyé au tableau.

61. *Bor. écrit* :

1)ln(x+3)+ln(x+2)=ln(x+11)

Df={x∈ℝ/(x+3>0) et (x+2>0) et (x+11>0)}

Df=]-2;+∞[

62. P : « D'accord : il faut que x soit supérieur à -3, -2, -11 donc x strictement supérieur à -2. Alors, on passe de là à quoi ? »

63. *Bor. écrit tandis que P lit à haute voix* :

$\ln[(x+3)(x+2)]=\ln(x+11)$

64. P : « L'idée dans une équation de ce type, c'est d'arriver à quelque chose qui soit :

ln■=ln●

et on transforme ça en ceci égale cela

⇔■=●

avec une équivalence sur le domaine de définition, bien sûr »
65. Bor. écrit :

$\ln(x^2+5x+6)=\ln(x+11)$

66. P : « Oui, alors là, on a le droit d'écrire simplement la même équation… après on fera des calculs, mais pour le moment on est arrivé à écrire ça »
P efface et écrit

$\ln[(x+3)(x+2)]=\ln(x+11)$
$\Leftrightarrow (x+3)(x+2)=(x+11)$

« Et après, c'est plus que du petit calcul de début de première, c'est une équation du second degré »
67. Bor. écrit :

$\Leftrightarrow x^2+5x+6=x+11$
$\Leftrightarrow x^2+4x-5=0$

68. P : « Bien, encore une équation sans calcul, vous voyez. Le but, c'est pas de vous faire appliquer les formules du second degré »
68. Bor. écrit

$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-5$

« 1 est dans le domaine de définition, -5 n'y est pas »

$S=\{1\}$

69. P : « Si vous voulez des parenthèses, ça s'écrit comme ça :

$\Leftrightarrow (x=1)$ ou $(x=-5)$

S={1} parce que notre -5 n'est pas dans l'ensemble de définition, OK ? Bon, qui a fini le deuxième ? Allez, viens faire le deuxième. On laisse les calculs parce qu'ils vont encore servir. Tout le monde a vu qu'ils vont encore servir ? »
70. *L'élève au tableau écrit :*

$Ef=\{x\in\mathbb{R}/(x^2+5x+6>0)$ et $(x+11>0)\}$

$x^2+5x+6>0 \Leftrightarrow (x<-3)$ **ou** $(x>-2)$

71. P : « On a déjà fait ce calcul. Ça vous dit quelque chose x^2+5x+6, on a fait le calcul, on s'en rappelle. On sait que c'est (x+3)(x+2). On sait bien que c'est un polynôme du second degré, qui a deux racines qui sont -2 et -3. On n'a pas besoin de faire de calculs. On n'a pas besoin de calculer Δ, etc… »
72. *L'élève au tableau a écrit* :

Ef=]-11;-3[U]-2;+∞[

73. P : « D'autre part, x doit être strictement supérieur à -11. Ce qui donne comme ensemble de définition]-11;-3[U]-2;+∞[. Alors calcul… »
74. *L'élève écrit* :

$\ln(x^2+5x+6)=\ln(x+11)$ **(A)**
$\Leftrightarrow x^2+5x+6x+11$

75. P : « Tu vas pas recopier ça, tu vas tout de suite ici » *(P montre* $\Leftrightarrow (x=1)$ **ou** $(x=-5)$*)*
76. *L'élève écrit* :

$\Leftrightarrow (x=1)$ **ou** $(x=-5)$
S={1;-5}

77. P : « Cette fois-ci, notre deuxième solution -5, elle est dans le domaine de définition. C'est la seule chose qui change ici entre nos deux équations. Entre celle-ci et celle-là, c'est le domaine de définition. Vu ? Tout le monde a vu ? Qui veut venir faire la troisième ? »
Un élève est volontaire et passe au tableau.
78. P : « On va garder… » *Une partie seulement du tableau est effacée et P écrit* :

1)ln(x+3)+ln(x+2)=ln(x+11)	**Df=]-2;+∞[**	**S={1}**
2)ln(x^2+5x+6)=ln(x+11)	**Df=]-11;-3[U]-2;+∞[**	**S={1;-5}**

79. *L'élève au tableau écrit* :

$$\ln(-x-2)=\ln\left(\frac{-x-11}{x+3}\right)$$
$$Df=\{x\in\mathbb{R}/-x-2>0,\ x+3\neq 0,\ \frac{-x-11}{x+3}>0\}$$
Df=]-11;-3[

80. P : « Alors, tu pourrais détailler un petit peu ça, quand même! -x-2 strictement positif veut dire… »
81. *L'élève écrit* :

-x-2>0
-x>2
x<

82. P : « Franchement, est-ce que tu as besoin d'écrire ça avant de trouver x ?! Ah lalalala, les réflexes conditionnés, c'est pas bon, hein!… *(P efface)* Pavlov, j'aime pas du tout! Tu as une tête pour réfléchir »
83. *L'élève écrit* :

$$-x-2>0 \Leftrightarrow x<-2$$

83. P : « Bon, ça c'était la première condition. La deuxième… » *et P note* :

•$-x-2>0 \Leftrightarrow x<-2$
•

84. *L'élève écrit* :

•$\dfrac{-x-11}{x+3}>0 \Leftrightarrow$

86. P : « Alors, ça a le même signe que le polynôme du second degré (-x-11)(x+3) qui a pour racines -11 et -3, qui a un premier… »
87. Un élève : « Le coefficient directeur est négatif… »
88. P : « C'est pas un coefficient directeur, c'est le coefficient de x^2. Qui a un coefficient de x^2 négatif, donc qui est positif entre les racines, c'est-à-dire sur ?… »
89. *L'élève écrit* :

$$\Leftrightarrow x \in -11 \ ; -3[$$

90. P : «]-11;-3[, c'est tout entier sur]-∞;-2[. Donc, Df=]-11;-3[. Alors, on continue logarithme de a égale logarithme de b équivaut à a égale b, donc on écrit l'équation (E_3) disons… »
91. *P et l'élève écrivent* :

sur Df :
$(E_3) \Leftrightarrow -x-2=\dfrac{-x-11}{x+3}$

92. P : « Bon. Là, on reconnaît l'équation. On va l'écrire équivalent à, avec le changement de signe :

$$\Leftrightarrow (x+2)(x+3)=(x+11)$$

Ça vous redonne l'équation de tout à l'heure
⇔
On résout pas. On a déjà résolu, c'est pas la peine de recommencer »
93. L*'élève écrit* :

$$\Leftrightarrow S=$$

94. P : « Non, non. C'est pas équivalent à S=. C'est équivalent à x égale ou x égale »
95. *L'élève écrit* :

$\Leftrightarrow$(x=-5) ou (x=1)

96. P : « Bon, 1 n'est pas dans le domaine de définition, donc c'est S égale… »
97. *L'élève écrit* :

S={-5}

98. P : « Pon. qui discute va venir nous faire le dernier… »
P écrit sous les deux premières équations :

3)ln(-x-2)=ln($\frac{-x-11}{x+3}$) **Df=]-11;-3[** **S={-5}**

99. *Pon. écrit* :

4)ln(-x-2)=ln(-x-11)-ln(x+3)
Df={x$\in\mathbb{R}$/x<-2, x<-11, x>-3}

100. *P rectifie l'écriture* :

Df={x$\in\mathbb{R}$/(x<-2) et (x<-11) et (x>-3)}

« Et qu'est-ce qu'on constate cette fois-ci ?… Ben, cette équation n'est jamais définie, elle n'a jamais de sens. Donc, c'est pas la peine de chercher des solutions »
101. *L'élève a écrit* :

Df=$\varnothing$

102. P : « Donc si on veut donner un ensemble de solutions
S=$\varnothing$
Donc vous voyez quatre équations qui ont donné lieu chaque fois à la même équation…, si on voulait transformer, etc… on trouverait chaque fois la même équation algébrique. Et puis, le domaine de définition n'est jamais le même, donc on a obtenu quatre sortes de solutions différentes. Bien hier j'ai eu la curiosité de résoudre ça avec la TI 92, et bien la TI 92, elle donne quatre fois {-1;5}. Alors, méfiez-vous comme de la peste de ce genre d'engins! Alors, sachez que la TI 92 est tout-à-fait nulle dans les équations avec logarithme! Alors, moralité : quand on a une équation avec logarithmes, première chose qu'on fait, c'est qu'on regarde de près le domaine de définition. Vous voyez qu'on peut faire de grosses bêtises si on se contente de faire du calcul sans regarder… »
103. P : « Je vous propose d'autres équations :
2
a)$(\ln x)^2$+lnx=2
b)$\ln x^2$+lnx=2

Qu'est-ce que c'est le signe important là dedans, qui change tout ? »
104. Une élève : « C'est la parenthèse »
105. P : « C'est la parenthèse. Souvent on oublie les parenthèses. »
P circule dans la classe tandis que les élèves recherchent l'exercice. La fin de l'heure sonne et les élèves ont à rechercher l'exercice pour le lendemain.

DEUX ELEVES COMMENTANT LES COURS DES 4&5/2/98 QU'ILS VISIONNENT

Chacun des deux élèves est respectivement désigné par G (garçon) et F (fille). La rencontre a lieu une semaine après le cours. Les numéros figurant en marge gauche sont ceux de la transcription du cours du 4/2/98.

Q : «Vous vous rappelez quand je suis venu, le cours portait sur quoi ? »
G&F : « Logarithme »
Q : « Logarithme… J'ai filmé la classe, peut-être que vous allez vous revoir. Je voudrais que vous me disiez, au fur et à mesure qu'on avance dans les exercices, des différents épisodes qui se passent dans la classe ou au tableau, etc… à quoi, vous, vous pensiez à ce moment-là. Essayez de faire cet effort de rappel : ce que ça évoquait, les questions que vous vous posiez, etc… Bon, on commence. Ça, c'étaient des exercices qui étaient à faire pour la séance ?… »
G&F : « Oui »
1. Q : « Vous, vous aviez su les faire ? »
G&F : « Oui »
F : « Je crois »
Q : « Toi, tu les avais faits ? »
G : « Oui, mais en fait je m'étais un peu compliqué la vie, parce qu'on pouvait d'abord faire l'ensemble de définition et ensuite résoudre. Moi, j'ai d'abord résolu et j'ai dit ça, ça appartient pas à l'ensemble de définition et tout ça, donc… C'est plus simple comme ça »
Q : « C'est-à-dire, qu'est-ce que tu avais fait toi ? Tu avais résolu… »
G : « Au départ, j'avais résolu sans regarder l'ensemble de définition et puis ensuite je me suis dit : Ah, mais il faut peut-être que… je trouve x égale -2, je dis : Ah mais le premier logarithme c'est ln(x+1), il faut que ce soit strictement positif donc c'était pas bon. J'avais pas fait l'ensemble de définition… »
Q : « Donc tu excluais les valeurs au fur et à mesure que tu… »
G : « Voilà, hum »
Q : « Tu regardais, tu testais si c'était dans l'ensemble de définition… »
G : « Les trois termes »
4 à 5. Q : « Les trois logarithmes… Et toi, qu'est-ce que tu avais fait sur ces équations ? »
F : « Moi, je m'en rappelle plus trop, mais je crois que j'avais commencé par l'ensemble de définition pour justement voir si on a besoin de résoudre ou pas »
6. G : « C'est là que quand elle a dit, « sur Df les logarithmes sont vrais et tout », moi justement comme j'avais pas fait l'ensemble, j'ai mis des équivalences, mais bon… C'était faux forcément parce que j'ai pas mis sur Df »
12. Q : « Et toi, là tu te souviens ?… »
F : « Non, mais moi je crois que j'avais fait juste puisque j'étais partie d'un… mais peut-être que j'avais pas marqué sur Df justement. J'avais marqué équivalent, mais j'avais pas marqué sur Df »
25, 26 et 27. Q : « Et là, vous aviez vu ça ?… »
G : « Ben, disons que… C'est les mêmes équations mais c'est plus le même ensemble de définition. Avant on avait 1 et -5, on a vu que ça appartenait pas à l'ensemble de définition. Mais là, vu que c'est du second degré, là je trouve que ça faisait positif avec, donc c'était bon. Et après on va faire trois-quatre éxos comme ça. Ce sera toujours les mêmes solutions… »
F : « Oui, y'a que l'ensemble de définition qui est différent »
G : « Et alors là, la calculette, elle donnait les solutions sans faire gaffe à l'ensemble… »
Q : « C'est ça, oui. D'ailleurs P fait la remarque. P a essayé avec la TI 92 »
33. Q : « Et là, vous pensiez à quoi, l'un et l'autre ? Toi, tu avais trouvé… »

T : « Oui, moi je crois que j'avais dû trouver »
Q : « Et toi ? »
G : « J'ai trouvé la solution pour ça, mais heu… »
34. Q : « Là ça change, c'est une inéquation. Vous vous rappelez de ce que vous aviez fait, vous sur votre propre cahier ? »
F : « Pas trop »
G : « Ben, on a déjà Df, après et ensuite… »
Q : « Toi, tu avais cherché Df ?… »
G : « Sur celui-là, ouais, parce que y'avait la… Vu qu'y avait le quotient »
Q : « Oui, parce que… Pour exclure la valeur qui annulait le dénominateur »
G : « Voilà, ouais, puis ensuite je me suis dit, bon ça c'est supérieur à 0 si x est supérieur à 1 ?… Ouais. Vu que c'est croissant, que ln est croissante, alors la valeur… enfin ça doit être supérieur à 1, supérieur ou égal à 1 pour que ça soit supérieur à 0 »
Q : « Donc vous vous étiez servi de la croissance de ln… enfin, le fait que ce soit une bijection croissante »
F : « Moi, je croyais que j'avais fait directement le domaine de définition »
45. G : « Oui, ça on l'a vu avec (nom d'un élève)… La partie entière, P nous a donné un exemple, c'est croissant mais pas strictement, donc pas bijectif »
Q : « Ouais, ouais. ça vous l'aviez vu avant la partie entière, avant le logarithme »
G : « Heu, non »
F : « On l'a vu dans un devoir »
Q : « Ah, P vous l'a donné… »
G : « Y'a assez longtemps, oui »
Q : « P a dit là, on va voir tout à l'heure que si une fonction est simplement croissante… »
G : « Je sais pas si on l'a vu après »
F : « Si, je crois. Non, P l'avait pas dit avant ?… »
Q : « P a dit : on va voir après »
G : « Ah, dans ce cours-là je sais pas »
Q : « Non P a dit : on va voir après, c'est pas dans ce cours, je crois pas. Et partie entière de x, vous l'avez vu quand ? »
G : « Hou la…Ça, la partie entière on l'a vue au début »
F : « Au début de l'année »
Q : « Au début de l'année ? »
F : « Oui, y'a longtemps »
Q : « Avant le logarithme ? »
G : « Bien avant »
F : « Oui »
G : « Avant qu'on ait commencé les fonctions, en fait »
F : « Oui »
G : « Et après en faisant la continuité, on nous a donné des exemples où c'était… »
F : « Mmm… »
Q : « Pas continu… »
G : « Voilà »
47 et 48. Q : « Et là, sur vos cahiers, vous aviez écrit comme P les points importants. Par exemple ln(x+1) supérieur à ln1, comme la fonction ln est une bijection strictement croissante, équivaut à x+1 sur je ne sais plus trop quoi, supérieur à 1 etc… ? »
F : « Non. Moi, je l'écris pas. Parce qu'il y a des trucs qu'on se dit dans la tête, que c'est une bijection, tout ça… on le fait pas »
Q : « Oui, vous avez fait comme lui *(l'élève qui est au tableau),* quoi! »
F : « Oui »

49. Q : « Vous avez vu ce qu'il avait fait ? Il avait interverti 3 et 5/3 »
G et F : « Oui »
55. Q : « Vous vous rappelez ce que P va dire, là ? »
G : « Que c'est un peu comme du second degré »
Q : « Voilà »
F: « Oui »

•*Au moment où P écrit* $\boldsymbol{Df=\{x/\frac{x+1}{3x-5}>0\}}$ **:**

G : « P a dit : forcément c'est supérieur à 1, donc de toutes façons pour résoudre l'inéquation ≥1, ça fera forcément partie de Df »
Q : « Ça, vous le réutilisez maintenant ? »
G : « Ben, j'ai pas eu l'occasion, non »
Q : « Tu as pas eu l'occasion dans les problèmes… »
F : « Moi, j'ai l'habitude de faire Df, donc ça vient automatiquement. On n'y pense pas, souvent… Y'a des trucs qu'on voit pas »
Q : « Parce que les automatismes… »
F : « Oui »
Q : « … ça cache les subtilités de chaque exercice »
G : « Ouais, ça revient au même. Parce que pour penser, justement, que résoudre l'inéquation $\frac{x+1}{3x-5}\geq 1$ ça fera partie de Df, le temps qu'on trouve ça, peut-être qu'on l'a déjà fait maintenant l'ensemble de définition, du moins sinon, je trouve que ça y mène directement »

•*Au moment où P demande si résoudre* $\boldsymbol{\ln(\frac{x+1}{3x-5})\geq 0}$*, c'est résoudre*
ln(x+1)-ln(3x-5)≥0 :

G : « Ben non, c'est Df et D'f »
59. G : « Bac 72 »
60. G : « Celui-là, je sais pas… On nous donne pas la même équation et on devait voir… comparer avec l'ensemble de définition »
Q : « Et ça, c'est ce que vous vous êtes dit quand vous l'avez vu immédiatement l'exercice ? Comment vous vous êtes lancé dedans ?… Vous vous disiez quoi, à ce moment par exemple ? »
F : « Comme on avait vu juste avant qu'il fallait bien chercher l'ensemble de définition, là on l'a cherché »
Q : « D'accord ? Mais vous aviez vu que c'était quatre fois la même équation, à peu près? »
F : « Oui »
Q : « Parce qu'il y a un moment où il y a un développement, enfin il développe un produit… Bon y'a un x^2, y'a du second degré, y'a un signe qui change… quand on regarde de près les équations, y'en a une c'est lna+lnb=lnc, puis après y'a lnab=lnc, mais ab développé… »
Q : « Là, apparemment, y'en a qui réfléchissent »

Deux minutes environ après que les élèves de la classe aient commencé à travailler sur l'exercice :

Q : « Bon, là on va un peu avancer. A moins que ça vous dise quelquechose… Vous, vous étiez entrain de… »
G : « De chercher, oui »
F : « Oui »
61. Q : « Bon y'a un élève qui est passé au tableau. Donc vous, vous vous dites quoi pendant ce temps-là où vous aviez fait les exos, apparemment vous aviez compris… »
G : « Ah, moi j'avais pas fait je crois… »
Q : « Tu avais pas fait… »

G : « Non, pas les quatre »
F : « Pas fini, non »
Q : « Pas les quatre ?… »
F : « Non, non »
Q : « Le premier, la première équation… »
G : « Oui, mais pas les quatre, moi je les avais… »
65. Q : « Vous en avez fait depuis des équations avec logarithmes… et exponentielles peut-être ? »
G : « Je pense pas. Après ça, je pense… »
Q : « Vous avez fait le barycentre… »
G : « Oui, on a fait le barycentre et ça je pense pas qu'on en ait fait après »
F : « Non »
Q : « Donc vous ne l'avez plus retravaillé depuis ? Même dans des devoirs, des tests, des trucs comme ça, vous l'avez eu ?… »
G : « Non, on a eu des exos d'étude de fonction et là, sûrement on a dû, heu… Si y'avait plusieurs logarithmes »
F : « Oui »
G : « Si y'avait logarithme de ça sur ça, peut-être qu'on l'avait développé après, mais je pense pas qu'on l'ait fait… »
Q : « Et l'exponentielle, vous l'avez commencée »
G : « Oui »
Q : « Vous l'avez faite la leçon ? »
70. *F se reconnaît passant au tableau*
Q : « C'est toi ? A quoi tu pensais là ? »
F : « Je sais pas du tout »
G : « Quand on est au tableau bon, on croit comme ça faire l'exercice, mais bon… »
F : « Oui »
G : « C'est comme si on y était pas, si on était dans…, qu'on faisait sur… qu'on était seul l'exercice quand on l'a fait, si on l'a pas fait, sûr que… »
Q : « Et là, tu te souviens cette histoire de parenthèses ? »
F : « Là ? faut mettre des parenthèses là ? »
Q : « Oui »
F : « Comme on m'a appelée pour ça… »
Q : « Quand est-ce que vous l'aviez appris ? »
F : « Ça, c'est à force de…, quand on corrige des exercices au tableau que… on nous dit de les mettre »
Q : « Est-ce qu'il y a un moment où P vous dit, enfin il me semble, P vous dit : mais enfin, faut noter les choses correctement, les parenthèses avec le et ou le ou, je sais plus très bien ?… Peut-être qu'on l'a passé je me rappelle plus. Pour toi, c'est naturel quoi ? »
F : « Oui, c'est une habitude que j'ai prise »
73. G : « Oui, disons que cette année, ils sont plus pointilleux sur la rédaction qu'avant. Même quand on fait un tableau de variation, on met f(x) au lieu de mettre f et qu'on passe à la variation, ils aiment pas trop »
Q : « Oui, oui »
F : « Ce qu'il y a, c'est que moi on m'a toujours appris à être pointilleuse dans les rédactions, donc y'a pas… »
Q : « Oui, oui y'a pas de problème »
G : « Ça, c'est les profs femmes »
F : « Mmm »
Q : « Elles ont plus pointilleuses que les hommes ? »

G : « Il me semble, en tout cas c'est ce que j'ai remarqué moi! »
76. Q : « On peut pas dire que tu parles beaucoup! »
F : « Mmm. Mais là je pense que ce qu'elle m'avait dit c'est parce que je redétaillais tout le calcul, alors qu'on l'avait fait juste avant au-dessus »
79. Q : « Ça vous ennuie pas vous, quand ça répète les exos ? »
G : « Non, là c'était pour nous montrer l'importance du domaine de définition. C'est vrai que parfois c'est un peu lourd »
Q : « Bon, on va peut-être avancer un peu. Voilà, ça c'était le cours du lendemain »

La numérotation suit désormais, selon le même principe que précédemment, celle des interventions du cours du 5/2/98.

1. Q : « Ça, c'étaient des équations que P vous avait donné à chercher la veille. Et là, vous vous étiez dit quoi quand vous êtes partis dans la résolution, parce qu'elles sont quand même un petit peu différentes ? »
G : « P nous les a données à la fin de l'heure. On avait cinq minutes pour les faire. Moi, au départ j'avais pas de suite reconnu qu'on pouvait avoir… comme équation du second degré $X^2+X=2$, alors j'avais commencé par le développer, bon… ça faisait rien. Puis après, je me suis dit : Ah oui mais, bon…, après j'ai pensé »
Q : « Et toi ? »
F : « Moi, j'avais traité les deux. J'avais pas fait attention. J'avais traité $(\ln x)^2$ comme $\ln x^2$. Je trouvais deux fois le même résultat »
Q : « Tu avais traité les deux de la même manière. Mais tu avais fait quoi pour résoudre la première, par exemple, d'équation ? »
F : « J'avais marqué que c'était égal à 2lnx. Donc j'avais 3lnx=2 »
Q : « Ah, d'accord! Tu avais fait celle-là comme… Ah d'accord! »
F : « Oui, j'avais fait les deux pareil »
Q : « Et tu avais pas vu la parenthèse, le changement de place de la parenthèse ? »
F : « Ben, je sais pas. Comme on venait juste de faire la leçon, j'avais pas dû faire attention qu'il y avait une différence, je sais pas… »
Q : « Et toi, tu avais vu que c'était du second degré en faisant un changement de variable »
G : « Après oui. Au départ, j'avais factorisé par ln »
Q : « Factorisé par ln ?! »
G : « x »
Q : « Et là, c'était une impasse ?… »
G : « lnx(1+lnx), oui »
2,3&4. G : « Quoi ? Il l'a faite sans… Ah oui! J'avais fait la forme canonique dans celui-là! Non, j'avais pas fait, en fait, avec le second degré »
Q : « C'est-à-dire tu avais fait quoi ? La forme canonique du polynôme ou… ? »
G : « $(\ln x)^2+\ln x=2$, j'ai rajouté un 4 pour que ça fasse un carré, égale 0 ou moins quelquechose »
Q : « Tu avais écrit $(\ln x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}=2$ ou -2=0 ? »
G : « Voilà, ouais »
6. G : « Alors, c'est qu'il doit y avoir un autre exercice où c'est la même chose. On doit trouver $X=\frac{1}{2}$… »
Q : « Après ? »
G : « Peut-être, mais il me semblait… »

Q : « Là, c'était le premier exercice que vous aviez sur le thème en fait, de cette catégorie, où il fallait faire un changement de variable pour tomber sur une équation du second degré? »
G : « Je pense »
Q : « Mais en fait, tu peux expliquer pourquoi tu étais revenu à la forme canonique, etc…? A ce moment-là, dans ta tête, tu pensais à quoi ? »
G : « Ben, si j'avais commencé… J'avais commencé, donc, par factoriser par lnx et ça me donnait rien. Et donc forcément, j'ai pas dû penser à poser X=lnx, alors je me suis dit $(\ln x)^2+\ln x$, je peux mettre $(\ln x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}-2=0$. Ça faisait égale $\frac{3}{4}$ ou $\frac{5}{4}$, je sais plus quoi. Et donc après, je pouvais résoudre… »
Q : « Oui, en fait tu abaissais le degré de l'équation, puisque dans chaque facteur tu avais quelquechose qui était du premier degré en lnx. Et tu sais résoudre lnx=a ? Oui, P vous l'avait enseigné ça puisque tu aboutissais là-dessus »
G : « On avait un peu commencé l'an dernier »
Q : « Comment ça, l'an dernier ? »
G : « On avait commencé logarithme et exponentielle »
Q : « Ah bon! »
G : « Oui »
Q : « En première ? »
G : « Oui »
Q : « Et toi, tu avais fait la deuxième équation comme la première ? »
F : « Oui »
14. Q : « Alors la seconde équation tu l'avais fait juste alors ? »
F : « Oui, je pense »
Q : « Et toi *(en direction de G),* tu l'avais fait comme lui *(l'élève au tableau)* ? »
G : « Oui »
16. Q : « Et là, vous, vous faites comment ? Parce qu'il a l'air d'être embarrassé… »
F : « Moi, j'avais marqué $\ln x=\frac{2}{3}$… »
G : « Voilà, ouais »
Q : « Et là ? »
F : « Et après»
G : « $x=e^{\frac{2}{3}}$ »
F : « $x=e^{\frac{2}{3}}$, oui »
Q : « Donc, vous êtes pas passés par ça *($\sqrt[3]{e^2}$ qui est écrit au tableau)* ? »
F : « Non »
Q : « Vous aviez appris en cours à passer de… à résoudre une équation en logarithme de x égale a ? »
G : « Oui, on l'avait marqué. On avait pris un exemple je pense. A la fin de la leçon, P avait dit lnx=3, je crois… »
Q : « Et d'écrire $e^{\frac{2}{3}}$, ça vous gênait pas ?… »
G : « Non, non. En fait on avait fait comme ça : 2, c'est 2lne, donc égale $\ln e^2$. Donc dès qu'on avait lnx=3, donc $x= e^3$ »
Q : « Oui, mais là y'a une nouveauté quand même… C'est la puissance fractionnaire, l'exposant fractionnaire »
F : « Oui »
G : « Là, heu… Ça on l'a fait après, l'exposant fractionnaire, on a fait ça quand même! »
Q : « Oui, vous l'avez fait après. Donc, vous avez quand même franchi le pas… »
F : « Oui »

Q : « Oui. Je veux dire : là le $e^{\frac{2}{3}}$, vous l'avez fait après, quand vous avez étudié les fonctions puissances j'imagine ? »
F et G : « Oui »
Q : « Exponentielle et puissance »
F : « Oui »
Q : « A ce moment-là du cours, vous ne l'aviez pas fait ? »
F : « Oui, à ce moment-là, non on ne l'avait pas fait »
Q : « Et donc, ça vous gênait pas d'écrire $e^{\frac{2}{3}}$? »
F : « Ben non »
G : « Non, vu qu'on l'avait fait l'année dernière, on l'avait un peu commencé, heu… »
F : « Mais moi, même, je l'avais pas fait l'an dernier! »
Q : « Toi, tu l'avais fait l'an dernier. Mais toi non, j'imagine »
F : « Moi je l'avais pas fait, non, mais… »
Q : « Et tu te demandais pas ce que ça signifiait, non ? »
F : « Ben non »
Q : « Non ? »
F : « Non, ça me semblait normal! »
Q : « C'est-à-dire ? »
G : « lne c'est 1, donc 2 ou 3alne, ça fait e puissance a… »
Q : « Oui »
G : « Je sais pas… e ça reste comme ça. Là, je pensais pas que c'était une fonction, que c'était l'exponentielle, c'est un nombre e ?!… »
Q : « Oui »
G : « Donc du coup, je vois pas en quoi ça pouvait gêner si on mettait e puissance 2, e puissance 3… »
Q : « Ah oui! e puissance 2, e puissance 3, ça va… »
G : « Ah! $\frac{2}{3}$… »
Q : « Et oui! Ma question c'était sur les $\frac{2}{3}$… »
G : « D'accord… On l'avait pas fait ?… »
F : « Non, mais les puissances fractionnaires, de toute façon, enfin… on connaissait $e^{\frac{1}{2}}$, avec la racine carrée »
Q : « Vous l'aviez vu déjà e puissance un demi et la racine carrée ? »
G&F : « Oui »
Q : « Et $\frac{2}{3}$? Parce qu'on peut dire, c'est une convention la puissance un demi… »
G : « On l'avait demandé la puissance un demi. Justement on voulait demander ça… »
Q : « Donc , ça vous choquait pas les fractions dans les exposants… »
G&F : « Non »
Q : « $e^{\frac{2}{3}}$, si on vous avez demandé ce que c'est, qu'est-ce que vous auriez pu dire à ce moment-là ? »
G : « Ben… L'exponentielle »
F : « Non »
G : « Exponentielle parce que tu avais déjà entendu le mot »
F : « Non, moi exponentielle je le savais pas »
Q : « Toi, non. Le e c'était pas l'exponentielle, c'était… »
G : « Un nombre »
Q : « Le nombre tel que le logarithme égale 1 »

F : « J'avais compris que c'était la réciproque, parce que sur la calculatrice… »
Q : « D'accord »
F : « … on prenait la touche de ln et au-dessus il y a e^x. C'est pour ça… »
Q : « Oui, mais la fraction pour l'exposant ? »
Silence des élèves
Q : « Ça vous gênait pas… »
F : « Ben non »
Q : « Si quelqu'un, à ce moment-là, avait demandé ça veut dire quoi $e^{\frac{2}{3}}$, qu'est-ce que vous auriez pu répondre ? »
Silence puis G : « $e^{\frac{2}{3}}$?… Ouais, je sais pas si j'aurais pu y répondre, ouais enfin… je sais pas »
F : « Non, je sais pas »
Q : « Parce que lui, il me semble qu'il s'est posé la question. Enfin, celui qui est passé au tableau, il a réfléchi un moment… on va revenir un peu. Je sais pas ce qui le gênait, si c'était ça ou la résolution de l'équation : si c'était d'écrire $e^{\frac{2}{3}}$ ou si c'était autre chose »
Q : « Voilà, il en est là : $x^3=e^2$. Et là… il écrit $\sqrt[3]{e^2}$, ce qui est juste. Mais vous aviez étudié la racine cubique à cette époque ? »
G : « On en avait parlé »
Q : « Oui ? »
G : « On en avait parlé »
Q : « Avec P ? »
G : « Oui, on l'avait eu un jour avant »
Q : « Avec les complexes peut-être, non ? »
G : « Non, on avait eu une suite… On avait fait un raisonnement par récurrence et justement ça faisait intervenir ça et, heu… enfin moi je l'avais pas fait parce que j'avais rien compris, on pouvait pas le faire d'ailleurs. P avait dit ça c'est des puissances… enfin la racine cubique… tout ça, c'est des puissances fractionnaires. Et donc, bon on en parlera plus tard, quoi… Donc, on en avait parlé plusieurs fois quand même… »
Q : « Quand même… C'est-à-dire que vous aviez déjà rencontré des exposants fractionnaires ? Et P avait dit, c'est la racine n-ième… »
G : « Eventuellement »
Q : « Eventuellement »
G : « Oui, on l'a fait en complexe aussi »
F : « Mmm »
Q : « Oui »
18 (Alors, regardez ces deux équations…). Q : « Donc là, pour toi qui pensais que les deux équations étaient les mêmes, tu as dû apprendre quelquechose ?… »
F : « Oui, mais j'avais compris dès qu'il a corrigé. Je me suis rendue compte de mon erreur, de ce que j'avais fait »
Q : « D'accord »
Q : « Vous aviez fait les racines n-ièmes de l'unité dans **C** ?… »
G et F approuvent.
Q : « Bon, on avance ? Vous avez des choses à dire là ? »
G&F : « Oui »
19 Q : « Là, c'était nouveau parce qu'il y avait tout d'un coup… »
G : « Humm »
Q : « Et là, vous vous êtes dit quoi ? »
G : « Ben, la somme et le produit… »
F : « Humm »

Q : « La somme et le produit des racines ?… »
F : « Non »
G : « Oui, et après je crois qu'on en a fait un. Y'avait x+y »
Q : « Oui, mais là, y'a pas le produit. Enfin, oui on passait… lnxy quoi! Oui, vous vous êtes dits immédiatement ça ? »
G : « Oui, mais je crois qu'après, y'avait x+y, voilà ça a changé. Et là moi je suis parti… »
Q : « Et là tu es parti. Toi, aussi ? »
F : « Oui »
G : « Je suis parti sans regarder le départ »
Q : « D'accord. Et vous vous en êtes aperçus quand alors ? »
G : « Ben, j'avais pas fini puis P a dit… »
Q : « P a corrigé »
F : « Après, P l'a dit… »
G : « P a demandé qui avait fini et a dit : « tiens, vous n'avez pas fini, pourtant c'est rapide et tout », puis… »
Q : « Donc vous vous êtes dits : « tiens, y'a un truc ». Voilà, parce qu'après y'a somme et produit avec X=lnx et Y=lny. Donc là, y'en a pas mal qui cherchent le premier système »
20.21.22. (P : « Vous m'étonnez ») Q : « Evidemment, pour celui qui sait ! »
23.24.25.26.27. (P : « Qu'est-ce qu'on a dit ? ») Q : « Qu'est-ce que P avait dit ? »
G : « Le domaine de définition »
Q : « Ah oui, P faisait référence aux exercices qu'on a vus au début »
28.29.30.31.32.33. Q : « A part que P avait fait des équations à une inconnue ; là, il y en a deux, donc il fallait adapter quand même. L'ensemble de définition c'est $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\backslash$… quelquechose. Bien, on va s'arrêter là. Merci d'être venus »

COURS DU 7/1/97 : EXERCICES SUR LES ÉQUATIONS LOGARITHMIQUES

1. P : "Vous êtes censés connaître le cours sur la fonction logarithme. Je vous donne quelques équations. Vous les cherchez pendant 10 mn et ensuite on regarde ensemble". *Il est 14h25 et P écrit au tableau :*

Résoudre :
a) $(\ln x)^2 + 3\ln x - 4 = 0$
b) $\ln(x^2) + \ln ex - 4 = 0$
c) $\ln(x^4) + \ln(x^2) = 0$
d) $\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln 2$
e) $\ln(x^2-1) = \ln 2$

2. P : “ La fonction e permet un peu d’élargir le champ des équations et de résoudre des équations qui ne sont pas des équations algébriques ”.
3. *Murmures d’élèves.*
4. P : "L'inconnue est x. Bien sûr on cherche x". *P passe dans les rangs, vérifie et commente le travail des élèves.*
5. P : "Dans e fois x, qu'est-ce que c'est e Bar. ?".
P évoque l'équation : $\ln(x^2) + \ln ex - 4 = 0$.
6. Des élèves : "Heu… C'est l'exponentielle".
7. P : "Je n'ai jamais parlé d'exponentielle, jamais ! Qu'est-ce que c'est e ?"
8. D'autres élèves :"Un nombre."
9. P : "C'est un nombre. C'est lequel ? Défini par quoi ?"
10. Des élèves : "C'est la fonction inverse du logarithme"
11. P *(avec véhémence)* : "Nooooon : c'est un nombre ! C'est lequel ? Défini par quoi ?"
12. Un élève : "Logarithme de e égale 1"
13. P : "Bon, très bien : lne=1 ! Ça y est ? Ça fait plaisir quand vous étudiez votre cours ! e c'est le nombre défini par lne égale 1 !" *P continue d’aller de place en place et intervient à propos du travail vu sur les cahiers des élèves.*
14. P. : "log. de x égale -4, c'est pas possible ?!… Vous ne l'avez pas encore dans votre tête cette courbe du logarithme ?!…"
15. Des élèves : "Si, de 0 à $+\infty$ …"(incompréhensible).
16. P : "Et alors -4, ça n'y est pas sur l'axe des y ?".
17. Un élève : "Oui, ça tend vers $-\infty$ en 0".
18. P: "Ben alors, y'a bien -4 sur l'axe des y sur la courbe ?"
19. Des élèves : "Oui…"
20. P : "Donc logarithme de x égale -4, ça existe !"
21. P : "Vous savez çà":
P écrit au tableau :
$\ln e=1$
"et vous savez çà" :
P écrit au tableau :
$\ln x^n = n\ln x$
"alors çà, c'est quoi ?" :
P montre au tableau l'équation :
$\ln x = n$

"J'en déduis quoi de çà"
P montre ce qui est écrit au tableau et commente : “ Logarithme de x égale n, comment je peux résoudre çà ? ”
22. *Brouhaha de certains élèves : on entend un élève qui tente une réponse* "x égale e ?…"
23. P : "Ben oui parce que ça veut dire *(en écrivant au tableau)* :
$\ln x = n \times 1$
$\ln x = n \ln e$
$\ln x = \ln e^n$
ça se termine comment ?"
24. Plusieurs élèves : “ $x=e^n$ ”
25. P : "Oui, pourquoi ?"
26. Un élève : "C'est une formule que j'ai apprise l'année dernière"
27. P : "Pourquoi je peux passer de là à là… Parce que la fonction logarithme est ?…"
28. Des élèves : "Strictement croissante"
29. P : “ Strictement croissante…si vous voulez, et ?… ”
30. Un élève : “ bijective ”
31. P : “ C'est une bijection de ?… Ensemble de départ ? … ”
32. P avec des élèves : “]0 ; +∞[sur … ensemble d’arrivée ?…]-∞ ; +∞[”.
33. P : “ Ces exercices n'ont pas vraiment un intérêt pratique, leur intérêt est de vous faire travailler sur les propriétés de la fonction logarithme ; les propriétés sur les opérations, multiplication-addition et les propriétés de bijection ”

34. *14h32*. P : “ On peut corriger le premier ? ”
35. *Les élèves approuvent et Bar. est envoyé au tableau*
36 P *en écrivant au tableau* : “ Qu’est-ce qu’on rencontre ici ?… ”
37. Bar. : “ On part de X = lnx ”
38. D’autres élèves : “ lnx = X ”
39. P *en écrivant au tableau* : “ Je vais dire…
a) ⇔ lnx est solution de $X^2 + 3X - 4 = 0$ ”
40. P : “ Les solutions de cette équation du second degré sont ?… ”
41. Des élèves : “ 1 et -4 ”
42. P : “ Donc ça devient…
⇔ lnx = 1 ou lnx = -4 ”
43. P : “ De là, je vais remplacer çà par logarithme de x égale logarithme de quelque chose ”.
44. Bar. : “ lnx = lne ”
45. P : “ **$\Leftrightarrow$ $(\ln x = \ln e)$ ou $(\ln x = \ln(\frac{1}{e^4}))$**
et là, je dis ?… et vous devez l’écrire ça!
ln est une bijection de]0 ; +∞[sur R
et j’en déduis que ?… Mon équation, on va l’appeler (E). Mon équation (E), elle est donc équivalente à ?…
46. Bar. écrit avec l’aide de P : “ **(E) $\Leftrightarrow$ $x = e$ ou $x = \frac{1}{e^4}$** ”
47. P : “ Vous connaissez des fonctions qui ne sont pas bijectives et vous avez
f(x) = f(y)
et vous ne pouvez pas en déduire que x = y. Donnez-moi un exemple de quelque chose comme ça. ”
48. Un élève : “ cosinus ”
49. P : “ Ben, cosinus bien sûr ! Quand vous avez :
cosx = cosy

il n'y a que les mauvais élèves qui en déduisent x égale y ! Parce que c'est pas vrai, vu ?
~~x = y~~
x = y ce n'est qu'une solution possible. On peut passer de çà à çà (*P montre f(x) = f(y) et x = y*), seulement si f est bijective. Bien, la fonction logarithme c'est une brave petite fonction bien plus sympathique que le cosinus pour résoudre des équations ! Ça va ?… Alors deuxième ”
50. *Des élèves posent des questions sur la nécessité de mettre des parenthèses dans le c)*
51. P : “ Dans le c), vous y êtes ? ” et P donne le commentaire tandis que des élèves posent des questions sur la question à traiter (b) ou c)?)
52. P : “ C'était une remarque sur le c), vous me cherchez le b). D'ailleurs, il y a quelque chose qu'on a oubliée de faire là ! Qu'on aurait dû faire tout de suite, c'est quoi? ”
53. Une élève : “ Le domaine… ”
54. P : “ Le domaine de définition. Qu'est-ce qu'on aurait dû dire au début ? Avant de commencer ?… ”
55. Des élèves : “ Que x appartient à … ”
56. P : “ Que x appartient à]0, +∞[. A ne pas oublier quand on parle de ce genre d'équations ”

Pendant quelques minutes, les élèves cherchent le
b) $ln(x^2)$ + lnex - 4 = 0
Puis, une élève est envoyée au tableau pour le corriger et commence à écrire.
57. P : “ Attends ! Commence par nous dire qu'est-ce que c'est que x. Ça appartient à quel ensemble x ? On travaille sur quel ensemble ? On travaille sur D égale ?…

D =]0, +∞ [

Regardez! Pour que $ln(x^2)$ existe, on demande quoi à x ? ”
58. Un élève : “ D'être différent de 0 ”
59. P : “ D'être différent de 0. Pour que lnex existe, je demande à x d'être ?… ”
60. Des élèves : “ Ah! D'être différent de 0 ”
61. P: “ D'être strictement positif. Conclusion : le domaine de définition, c'est ?… ”
62. Des élèves avec P : “]0, +∞[ouvert, c'est vu ? ”
63. L'élève qui est au tableau écrit :
⇔ 2lnx + lne+ lnx - 4 = 0
64. P : “ Je ne veux jamais voir une ligne qui commence par un équivalent sans savoir ce qu'il y a avant! L'équation n'est pas à la ligne d'avant! A la ligne d'avant, on a écrit d'autres choses! Donc puisque j'ai écrit d'autres choses à la ligne d'avant, ça veut dire que j'ai interrompu le fil : je réécris l'équation. Je ne veux pas voir un signe équivalent entre rien et rien ; il faut quelque chose des deux côtés ”.
P fait écrire :
(E) ⇔ 2lnx + lne+ lnx - 4 = 0
65. P : “ Bon, alors dans notre équation… ”
66. L'élève au tableau écrit :
⇔ 3lnx = 3
⇔ lnx = 1
⇔ x = e
67. P : “ Tu mets bien des équivalences tout le long. Entre parenthèses, on rappelle que?… ”
68. L'élève écrit :
⇔ x = e (ln est bijective de]0, +∞ [sur R)
69. Une élève : “ On est obligé de le mettre ça entre parenthèses tout le temps ? ”
70. P : “ Le jour du bac, tu le mettras. En test, tu le mettras. Sur ton brouillon tu peux t'en dispenser ”.

De nouveau, quelques minutes sont consacrées à la recherche personnelle des autres exercices par les élèves. P passe vérifier le travail, conseiller, valider ou invalider un résultat. Après ce tour de classe, il est 14h45 :
71. P : “ D’abord, on va regarder la solution d’Al. qui est juste. Et après, on regardera une solution fausse et on cherchera pourquoi elle est fausse. Bien sûr, je vous ai posé cet exercice pour que vous le fassiez faux! ”.
72. Des élèves : “ Ah!… ”.
Brouhahas et protestations. Al. passe au tableau pour résoudre l’équation
c) $\ln(x^4) + \ln(x^2) = 0$
73. P : “ Qu’est-ce qu’on se demande d’abord ? ”
74. Des élèves : “ Le domaine ”, “ Df ”
75. P : “ Domaine de définition : pour quelles valeurs de x ceci existe ? Dès que x est ?… ”
76. Al. écrit :

Df = R*

77. P : “ Bon cette équation elle existe dès que x est différent de 0, puisque dans les logarithmes x apparaît dans les puissances 2 et 4. Bien, on continue. Logarithme de x^4, tu as eu la bonne idée de l’écrire… ”
78. *Pendant ce temps Al. écrit* :
$\mathbf{\ln(x^4) = X}$
$\mathbf{2X + X = 0}$
79. P : “ Oh! Que j’aime pas ça : tu écris (E) et tu écris en dessous (E) équivaut à ”.
80. Al. écrit alors :
(E) $\Leftrightarrow$ $\mathbf{2X + X = 0}$
81. *Des élèves demandent* : “ Pourquoi 2X ? Pourquoi pas X^2 ? ”
82. *P parle ce que Al. écrit* :
$\Leftrightarrow$ $\mathbf{3X = 0}$
83. *Al. écrit ce qui peut apparaître comme une réponse à la question posée par les élèves*

$\mathbf{\ln x^4 = 2\ln x^2}$

84. P : “ 3X = 0. X = 0 ”
85. Un élève : “ Madame, il faut mettre une valeur absolue ”
86. “ Attends une minute ”
87. Al. écrit :
$\Leftrightarrow$ $\mathbf{3\ln x^2 = 0}$
$\Leftrightarrow$ $\mathbf{\ln x^2 = 0}$
$\Leftrightarrow$ $\mathbf{\ln x^2 = \ln 1}$
$\Leftrightarrow$ $\mathbf{x^2 = 1}$
$\Leftrightarrow$ **x = 1 ou x = -1**
88. P : “ La bijection me dit que $x^2 = 1$. x égale 1 ou x égale -1. Bon, $\ln x^4 = 2\ln x^2$. Indubitable! ”
89. P *se tournant vers un groupe d’élèves* : “ Bon, alors lui il n’a pas pu faire apparaître le 1 et -1. Pourquoi votre truc est faux ? ”
90. Les élèves : “ On est passé par équivalence. Par la valeur absolue ”
91. P : “ Oui, tu as raison, tu as raison. Alors qu’est-ce que c’est qui ne va pas dans ce que vous avez fait ? C’est la même histoire que lorsqu’on manipule des racines carrées, et en seconde on vous a déjà expliqué ça. ”
92. P *tout en écrivant au tableau* : “ Vous avez $\ln x^2$ et ça existe si x différent de 0. Vous, vous écrivez que ça fait 2lnx. Ben ça, c’est pas toujours vrai. Quand est-ce que c’est vrai ça ? ”
93. Une élève : “ Si x différent de 0 ”
94. P : “ Si x égale -3, c’est pas vrai. C’est quand x est strictement positif. C’est exactement la

même chose que quand vous écrivez :
$\sqrt{a^2}$ **= a**
Ça, c'est vrai quand a est positif. Si a = -3, ça c'est faux! On vous avez déjà fait rencontrer des phénomènes comme ça. Vous n'avez le droit d'écrire ça que si x est positif. Vu ? Et c'est comme ça que vous vous êtes faits avoir. Alors Dur. avait eu une autre idée. C'était d'écrire :
$\mathbf{ln x^2 = ln|x|^2 = 2ln|x|}$
et ça c'est vrai dès que x est non nul. Donc ça devient un autre moyen de s'en tirer. On écrira que ça fait :
$\mathbf{4ln|x| + 2ln|x| = 0}$
$\mathbf{ln|x| = 0}$
$\mathbf{|x| = 1}$
D'où x égale 1 ou -1. Ça marche aussi, d'accord ? Mais n'oubliez pas que quand vous écrivez ça (*P montre* $lnx^2 = 2lnx$), de même que quand vous écrivez lna + lnb = lnab… Mais lnab, ça existe lorsque a est négatif et lorsque b est négatif ; par contre lna + lnb ça n'existe pas quand a et b sont négatifs tous les deux. C'est exactement la même chose que quand vous avez $\sqrt{(-2)\times(-3)}$, vous ne pouvez pas dire que c'est $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}$. OK ? Ça existe parce que $(-2)\times(-3)$ est positif, mais ça n'est pas pareil que $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}$. ”
95. P : “ Alors d) et e). Alors peut-être que maintenant vous allez comprendre pourquoi je vous ai posé d) et e) ”

Quelques minutes sont de nouveau laissées aux élèves pour qu'ils réfléchissent à la résolution des équations :
d) ln(x+1) + ln(x-1) = ln2
e) $ln(x^2-1) = ln2$
Certains élèves en profitent pour demander les programmes du test et du bac blanc à venir. A 14h55 un élève est envoyé au tableau.
96. P : “ Do-mai-ne-de-dé-fi-ni-tion, premièrement! ”
97. L'élève au tableau a écrit :
d ⇔ ln(x + 1)(x - 1) = ln2
98. P : “ Je ne suis pas d'accord! ”
99. *Des élèves protestent*
100. P : “ Bon, c'est vrai sur le domaine de définition. A condition d'avoir d'abord écrit le domaine de définition, sinon ça devient faux. Bon : x + 1 strictement positif, x - 1 strictement négatif, donc x strictement supérieur à 1 et à -1 ; donc domaine de définition]1; +∞[. Ça va pour tout le monde ? ”
101. L'élève au tableau a écrit :

Déf.f =]1; +∞ [

102. P : “ Bien! lna + lnb = lnab ”
103. L'élève au tableau a écrit :
⇔ $\mathbf{ln(x^2 - 1) = ln2}$ **et** $\mathbf{x \in Df}$
104. P : “ C'est même pas la peine que tu dises que x appartient à D, parce que c'est sous-entendu ”
105. L'élève au tableau :
⇔ $\mathbf{x^2 = 3}$ **et** $\mathbf{x \in Df}$
⇔ $\mathbf{x = \sqrt{3}}$
106. P : “ Bien, dans la foulée vous me faites le deuxième. Alors ici la différence, c'est que le domaine de définition, c'est plus le même. Cette fonction-là, elle existe aussi sur $]-\infty;-1[$. Vous voyez que c'est exactement le $\sqrt{(-2)\times(-3)}$. x +1 est négatif et x + 1 est négatif ; donc chacun des logarithmes n'existe pas, alors que le logarithme du produit, lui, il existe ”

107. Des élèves : “ C’est la même ? ”
108. P : “ Oui, c’est la même : c’est pas la peine de recommencer tout ça. $x^2 = 3$, cette fois-ci ça devient $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$ parce que cette fois-ci $-\sqrt{3}$ est dans le domaine de définition. ”
109. Pendant ce temps, l’élève au tableau a écrit :
e) $\ln(x^2 - 1) = \ln 2$
$Df =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$
$x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$
110. P : “ Vous notez tout de suite pour jeudi : 10, 11 et 14 page 144. Moralité dans toute cette histoire d’équations :
Premièrement : attention au domaine de définition! Et quand vous commencez, ce que je n’ai pas fait pour la première, par écrire le domaine de définition. Première chose.
1. Domaine de définition
Deuxième chose : se rappeler que lna + lnb = lnab à condition que a soit positif et b soit positif.
2. $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$
$a>0$ et $b>0$
On a vu aussi qu’il est impératif de se rappeler que la fonction logarithme est bijective. C’est ça qui vous permet de passer de lna = lnb à a = b.
3. ln est bijective
Quatrièmement : se rappeler que logarithme de e puissance n, ça fait n. Et la plupart du temps, c’est dans ce sens-là qu’on le lit :
4. $\ln e^n = n$
$\leftarrow$
111. Un élève : “ Il faut pas que a et b soient négatifs aussi ? ”
112. P : “ Ah non! Si a et b sont négatifs, ça n’existe pas logarithme de a et logarithme de b. Il faut que a et b soient du même signe… Vous avez entendu ce qu’il a raconté ? Il faut que a et b soient de même signe pour que logarithme de ab existe. OK ? Logarithme de -2 fois -3, c’est logarithme de 6. C’est pas égal à logarithme de -2 plus logarithme de
-3. Ce que tu pourras écrire si a et b sont de même signe, c’est ce qu’on a écrit tout à l’heure :
$\ln(ab) = \ln|a| + \ln|b|$
Mais là, ce sera à condition que ab soit positif. D’accord ? Mais çà *(P montre la formule écrite au 2),* c’est la formule classique qu’on apprend quand a et b sont positifs. De même que tu écris $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ quand a est positif et quand b est positif. OK ? Normalement, ces quatre choses-là, ça vous suffit pour résoudre des équations. Bien, on va regarder maintenant des inéquations. ”

Il est 15h05 et P note au tableau :
$\ln(x^2 - 1) \geq \ln 3$ (E)
113. Un élève : “ $x^2 \geq 4$ ”
114. P : “ C’est juste. On travaille sur quel ensemble ? ”
115. Plusieurs élèves : “ $]-\infty;-1[$ ”
116. P : “ Bon on travaille sur :
$Df =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$
puisque j’ai demandé que $x^2 - 1$ soit positif.
$(x^2 - 1 > 0)$
Bien, alors après ça ? Qu’est-ce que je dis après ? Qu’est-ce que vous faites de logarithme de a supérieur ou égal à logarithme de b ? ”
117. Un élève : “ Il faut que a soit supérieur à b ”
118. Un autre élève : “ ou égal ”
119. P : “

$\ln a \geq \ln b \Leftrightarrow a \geq b$
Pourquoi c'est vrai ça ? "
120. Plusieurs élèves répondent : " Parce que le logarithme "
121. P : " Parce que la fonction ?… "
122. Plusieurs élèves : " est croissante "
123. P : " Non, c'est pas parce que la fonction est croissante. Si elle n'était que croissante, on ne pourrait pas écrire ça! Parce qu'elle est strictement croissante ; ça change tout ça. Regardez :
Je mets a ici et b ici, et je dis que :
$f(b) \geq f(a)$
C'est parfaitement exact puisqu'ils sont égaux. Et bien pourtant,
$b < a$
OK ? Ma fonction, elle est croissante : $f(b) \geq f(a)$ c'est vrai, mais $b \geq a$ c'est faux. Vu ? Donc il ne vous suffit pas d'écrire que la fonction logarithme est croissante. Ça marche parce que f est strictement croissante. Quand la fonction est strictement croissante, et bien ça va marcher aussi avec l'inégalité. Donc mon inéquation (E), elle équivaut à :
$\Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 3$
124. Un élève : " Madame, pour x égal 1,5 ça fait pas supérieur ou égal à 3. Si on trouve 1,5 au carré ça fait 2,25 moins 1 ça fait 1,25 : c'est plus petit que 3! "
125. P : " Oui, c'est pas solution… "
126. Un autre élève : " Le domaine, c'est pas la solution "
127. Le premier élève : " Ah!… "
128. P : " Le domaine, c'est pas la solution. Le domaine ça veut dire que c'est vrai ou c'est faux, mais ça veut dire quelquechose. C'est ça que ça veut dire le domaine ; tu y es ? Y a vrai, y a faux et y a veut rien dire. Alors sur $]-\infty;-1[\ ]-\infty;-2]\cup]1;+\infty[$, ça veut dire quelquechose : ça veut dire si c'est vrai ou si c'est faux. Nous on cherche quand est-ce que c'est vrai. Ailleurs que là, ça veut rien dire. OK ? Bon
$\Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 3$
$\Leftrightarrow x^2 \geq 4$
Je vous écoute ?… "
129. Plusieurs élèves : " $]-\infty;-2]$ union … "
130. P : " Bon
$\Leftrightarrow x \in]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$
Petit dessin, toujours le même. Voilà, c'est là sur la courbe que x^2 est plus grand que 2 et sur l'axe des x c'est ça. Bon, on peut aussi faire le travail de troisième :
$x^2 - 4$ positif
$(x - 2)(x + 2)$ positif… "